GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

III, IV i V ROZMAITOŚĆ RUCHÓW LOKALNYCH
11/3, 18/3 i 25/3 i JEJ PRZYDATNA ABSTRAKCJA
(oraz VI 1/4)

2025/26

Geß III

NASZYM NASTĘPNYM CELEM BĘDZIE SKONSTRUOWANIE SPÓJNEGO OPISU RUCHÓW NA ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWEJ, KTÓRY WPISZEMY W NADRZĘDNY SCHEMAT

„PRZESTRZENI TOPOLOGICZNEJ LOKALNIE MODELOWANEJ NA PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ".

CZYNIĄC TO, ODKRYJEMY NOWĄ STRUKTURĘ GEOMETRYCZNĄ, KTÓREJ FIZYKALNA PRZYDATNOŚĆ USPRAWIEDLIWI POŚWIĘCENIE JEJ OSOBNEJ UWAGI...

NATURALNYM MODELEM RUCHU W ROZMAITOŚCI

$$((X, \mathcal{J}(X)), [(\mathcal{O}_i, \kappa_i)])$$ KLASY C^{1+}

JEST KRZYWA $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$, $\varepsilon > 0$ KLASY C^{1+}

WIĘC TAKA, KTÓREJ DOWOLNA PREZENTACJA

WSPÓŁRZĘDNIOWA $\kappa_i \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^{\times \dim M}$

JEST KLASY C^{1+}. WYBRAWSZY DOWOLNY PUNKT

$x \in \mathcal{O}_i$, OKREŚLAMY RUCH LOKALNY PRZEZ x JAKO KLASĘ

ABSTRAKCJI KRZYWYCH PRZECHODZĄCYCH PRZEZ $x = \gamma(0)$

WZGLĘDEM RELACJI

$$\gamma_1 \sim_x \gamma_2 \overset{ex}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \gamma_1(0) = x = \gamma_2(0) \\ D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0) = D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0) \quad (*) \end{cases},$$

KTÓRĄ BĘDZIEMY OKREŚLAĆ MIANEM

RELACJI WSPÓŁSTYCZNOŚCI.

NA OBECNYM ETAPIE ZASADNYM WYDAWAŁOBY SIĘ DODANIE KWALIFIKACJI „W MODELU LOKALNYM", MAMY WSZAKŻE

Stw. 4. RELACJA $\sim_x$ JEST NIEZALEŻNA OD WYBORU LOKALNEJ MAPY κ_i.

D: ZAŁÓŻMY $x \in \Theta_{ij} = \Theta_i \cap \Theta_j$, A WTEDY (*) IMPLIKUJE

$$D(\kappa_j \circ \gamma_1)(0) = D(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1} \circ \kappa_i \circ \gamma_1)(0)$$
$$= D(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(x)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0)$$
$$\overset{*}{=} D(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(x)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0)$$
$$= D(\kappa_j \circ \gamma_2)(0) \qquad \square$$

WPROWADZONE POJĘCIE (BEZ DODATKOWEJ KWALIFIKACJI) MA ZATEM SENS.

W NASTĘPNYM KROKU IDENTYFIKUJEMY NA ZBIORZE RUCHÓW LOKALNYCH PRZEZ x,

$$P_x = \{ [\gamma]_{\sim_x} \mid \exists \varepsilon > 0 : \gamma \in C^{1+}(]-\varepsilon, \varepsilon[, X) \wedge \gamma(0) = x \},$$

NATURALNĄ STRUKTURĘ $\mathbb{R}$-LINIOWĄ: $\quad x \in \Theta_i$

(*) STRUKTURA GRUPY PRZEMIENNEJ:

$\forall\, [\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x} \in P_x$:

DOBRANE TAK, BY KRZYWA POZOSTAWAŁA W DZIEDZINIE MAPY κ_i $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$[\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x} := [\,]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \kappa_i^{-1}\big(\kappa_i(x) + t \triangleright (D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0))\big)]_{\sim_x}$$

O ELEMENCIE NEUTRALNYM

$[x]_{\sim_x}$ (KLASA WSPÓŁSTYCZNOŚCI KRZYWEJ STAŁEJ $\gamma(t) = x \ \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$)

(**) DZIAŁANIE CIAŁA BAZOWEGO:

$$\mathbb{R} \times P_x \longrightarrow P_x, \ (\lambda, [\gamma]_{\sim_x}) \longmapsto [\,]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \longmapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + \lambda t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_x}$$

Stw. 5. Powyższa definicja struktury $\mathbb{R}$-liniowej jest dobrze określona, w szczególności zaś jest niezależna od wyboru lokalnej mapy κ_i.

D: Pokażemy prawdziwość tezy dla $(*)$. Dowód dla $(**)$ przebiega analogicznie.

Niechaj $x \in \mathcal{O}_i$, a wtedy należy sprawdzić

$$\Big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t \longmapsto \overbrace{\kappa_i^{-1}\big(\kappa_i(x) + t \triangleright \big(D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0)\big)\big)}^{\equiv\, \gamma_i(t)} \Big]_{\sim x}$$

$$\Big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t \longmapsto \overbrace{\kappa_j^{-1}\big(\kappa_j(x) + t \triangleright \big(D(\kappa_j \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_j \circ \gamma_2)(0)\big)\big)}^{\equiv\, \gamma_j(t)} \Big]_{\sim x}$$

Jest $\gamma_i(0) = \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x)) = x = \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x)) = \gamma_j(0)$, a nadto

–np.– $D(\kappa_i \circ \gamma_i)(0) = D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \gamma_2(0))$

$$\equiv D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j \circ \gamma_2)(0)$$

$$= D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(\overset{\gamma_1(0)}{\overset{\shortparallel}{x}})) \circ D(\kappa_j \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(\overset{\gamma_2(0)}{\overset{\shortparallel}{x}})) \circ D(\kappa_j \circ \gamma_2)(0)$$

ℝ-LINIOWOŚĆ POCHODNEJ

$$= D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(x)) \circ \Big(D(\kappa_j \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_j \circ \gamma_2)(0) \Big)$$

$$\equiv D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(x)) \circ D(\kappa_j \circ \gamma_j)(0) = D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j \circ \gamma_j)(0)$$

$$= D(\kappa_i \circ \gamma_j)(0) \quad \checkmark$$

ŁĄCZNOŚĆ I PRZEMIENNOŚĆ TAK OKREŚLONEJ OPERACJI BINARNEJ JEST OCZYWISTA. TAKŻE NEUTRALNOŚĆ $[x]_{\sim x}$ NIE ULEGA WĄTPLIWOŚCI. $\square$

IDENTYFIKACJA STRUKTURY $\mathbb{R}$-LINIOWEJ POCIĄGA ZA SOBĄ PYTANIE O WYMIAR, WIĘC TEŻ MODEL PRZESTRZENI P_x.

Stw. 6. $\forall x \in X : P_x \cong \mathbb{R}^{\times \dim X}$.

D: NIECH $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$. MAMY WÓWCZAS <u>DOBRZE</u> <u>OKREŚLONE</u> ODWZOROWANIE

DOWOLNY REPREZENTANT

$$\varphi_i^x : P_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times \dim X}, \quad [\gamma]_{\sim x} \longmapsto D(\kappa_i \circ \gamma)(0),$$

KTÓRE JEST W OCZYWISTY SPOSÓB $\mathbb{R}$-LINIOWE.

ROZWAŻMY ODWZOROWANIE

$$\Gamma_i^x : \mathbb{R}^{\times \dim X} \longrightarrow P_x, \quad v \longmapsto [\,\underbrace{]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t \longmapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \cdot v)}_{=: \Gamma_i^v(t)}\,]_{\sim x},$$

TAKŻE $\mathbb{R}$-LINIOWE (SPRAWDŹ TO!). BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ O TYM, ŻE

$$\mu_i^x \circ \Gamma_i^x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times \dim X}} \quad \wedge \quad \Gamma_i^x \circ \mu_i^x = \mathrm{id}_{P_x} .$$

ISTOTNIE,

$$(\mu_i^x \circ \Gamma_i^x)(v) \equiv D(\kappa_i \circ \Gamma_i^v)(0) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright v) = v \checkmark$$

ORAZ

$$(\Gamma_i^x \circ \mu_i^x)([\gamma]_{\sim x}) \equiv [\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}]_{\sim x} \text{, ALE}$$

$$\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}(0) = \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x)) = x = \gamma(0) \text{, A TAKŻE}$$

$$D(\kappa_i \circ \gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)})(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \equiv D(\kappa_i \circ \gamma)(0). \quad \square$$

NP.

POWYŻSZY DOWÓD PODPOWIADA DEFINICJĘ BIJEKCJI

$$\widetilde{\mu}_i : \bigsqcup_{x\in\mathcal{O}_i} P_x \xrightarrow[\text{BIJEKCJA}]{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}, \quad (x,[\gamma]_{\sim x}) \longmapsto (x, \mu_i^x([\gamma]_{\sim x}))$$

O ISTOTNEJ CESZE STRUKTURALNEJ: $\mathbb{R}$-LINIOWOŚCI WE „WŁÓKNIE" $P_x/\mathbb{R}^{\times \dim M}$.

NATURALNYM JEST MYŚLEĆ O $\widetilde{\mu}_i$ JAKO PROTOTYPIE LOKALNEJ MAPY NA „$\bigsqcup_{x\in X} P_x$", A KONKRETNIE:

MOŻEMY UŻYĆ $\widetilde{\mu}_i$ W DEFINICJI BIJEKCJI

$$\widetilde{\kappa}_i := (\kappa_i \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times \dim M}}) \circ \widetilde{\mu}_i : \bigsqcup_{x\in\mathcal{O}_i} P_x \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}}_{\subset T(\mathbb{R}^{\times 2\dim X})}, \quad (x,[\gamma]_{\sim x}) \longmapsto (\kappa_i(x), \mu_i^x(v)).$$

LADA MOMENT WYKORZYSTAMY BIJEKTYWNOŚĆ $\tilde{\mu}_i$, AŻEBY ZAINDUKOWAĆ NA ZBIORZE $\bigsqcup_{x\in X} P_x$ STOSOWNĄ TOPOLOGIĘ, TYMCZASEM JEDNAK PRZYJRZYMY SIĘ WYKAMAŁSZYM 8 ZE Z NASZYCH ROZWAŻAŃ PROTOTYPOM ODWZOROWAŃ PRZEJŚCIA: ILEKROĆ $x\in \mathcal{O}_{ij}$, DOSTAJEMY – DLA $(x,v)\in \mathcal{U}_i\times\mathbb{R}^{\times\dim X}$ –

$$\tilde{\kappa}_i\circ\tilde{\kappa}_j^{-1}(x,v) = \left(\kappa_i\times\mu_i^x\right)\circ\left(\kappa_j^{-1}\times\Gamma_j^x\right)(x,v)$$

$$= \left(\kappa_i\times\mu_i^x\right)\left(\kappa_j^{-1}(x),\left[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\,\ni t\longmapsto \kappa_j^{-1}\left(\kappa_j(x)+t\triangleright v\right)\right]_{\sim x}\right)$$

$$=\left(\left(\kappa_i\circ\kappa_j^{-1}\right)(x),\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\kappa_i\circ\kappa_j^{-1}\right)\left(\kappa_j(x)+t\triangleright v\right)\right)$$

$$=\left(\left(\kappa_i\circ\kappa_j^{-1}\right)(x),\,D\left(\kappa_i\circ\kappa_j^{-1}\right)\left(\kappa_j(x)\right)(v)\right).$$

ZAUWAŻMY: ODWZOROWANIA TE ZALEŻĄ LINIOWO OD ARGUMENTU Z „WŁÓKNA" $\mathbb{R}^{\times \dim X}$, PRZY CZYM ZALEŻNOŚĆ ODNOŚNEGO ODWZOROWANIA LINIOWEGO (IZOMORFIZMU) OD ARGUMENTU Z „BAZY" $\mathcal{U}_i$ JEST KLASY $C^{k-1}_{\geq 1+}$. MAMY ZATEM SZANSĘ NA KONSTRUKCJĘ ROZMAITOŚCI RUCHÓW LOKALNYCH KLASY GŁADKOŚCI O 1 NIŻSZEJ NIŻ WYJŚCIOWA KLASA GŁADKOŚCI ROZMAITOŚCI $((X,\mathcal{T}(X)),[(\mathcal{O},\kappa)])$.

POZOSTAJE „TYLKO" WSKAZAĆ STOSOWNĄ TOPOLOGIĘ NA $\bigsqcup_{x\in X} P_x$, WZGLĘDEM KTÓREJ $\tilde{\kappa}_i$ SĄ HOMEOMORFIZMAMI...

DOKONAMY WYBORU MINIMALNEGO: WYPOSAŻYMY $\bigsqcup_{x\in X} P_x$ W MOCNĄ TOPOLOGIĘ COFNIĘCIOWĄ (DLA TOPOLOGII PRODUKTOWEJ NA MODELU $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}$):

$$V \in \mathcal{T}\Big(\bigsqcup_{x\in X} P_x\Big) \overset{ex}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}} \forall_{i\in I}: \tilde{\kappa}_i\Big(V \cap \bigsqcup_{x\in \mathcal{O}_i} P_x\Big) \in \mathcal{T}(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X})$$

ODWZOROWANIA $\tilde{\kappa}_i$ SĄ W TEJ TOPOLOGII TAUTOLOGICZNIE HOMEOMORFICZNE, PRZETO OTRZYMUJEMY

TW. 7. NIECHAJ $((X, \mathcal{T}(X)), [(\mathcal{O}, \kappa)])$ BĘDZIE ROZMAITOŚCIĄ KLASY $C^{k(\geq 1)}$. WÓWCZAS $\Big(\Big(\bigsqcup_{x\in X} P_x, \mathcal{T}\Big(\bigsqcup_{x\in X} P_x\Big)\Big), \Big[\Big(\bigsqcup_{x\in \mathcal{O}.} P_x, \tilde{\kappa}.\Big)\Big]\Big)$ ↖ J/W JEST ROZMAITOŚCIĄ KLASY C^{k-1}.

D: J/W. □

Def. 8. Rozmaitość $\left(\left(TX := \bigsqcup_{x\in X} P_x \,,\, \mathcal{T}(TX)\right), \left[\left(\bigsqcup_{x\in \mathcal{O}_i} P_x \,,\, F_\cdot\right)\right]\right)$ określamy mianem rozmaitości stycznej do X.

Punkty $v \equiv [\gamma]_{\sim x} \in P_x$ to wektory styczne do X w x.

NB: wektory zadają różniczkowania $\mathbb{R}$-algebry $C^1(X,\mathbb{R})$:

$$D_{[\gamma]_{\sim x}}(f) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\gamma) \overset{x\in\mathcal{O}_i}{\equiv} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\kappa_i^{-1}\circ\kappa_i\circ\gamma)$$

$$\equiv D(f\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(x))\circ D(\kappa_i\circ\gamma)(0)$$ ← dobrze określone!

Czyli ...

CZĘŚĆ IV

ODTĄD ROZWAŻAMY ROZMAITOŚCI KLASY C^∞,
A NA NICH – FUNKCJE KLASY C^∞

Def. 9 NIECHAJ $((X, \mathcal{T}(X)), [(\mathcal{O}, \kappa)]) \in \mathbf{Man}^\infty$ I NIECH $C^\infty(X, \mathbb{R})$ OZNACZA ZBIÓR FUNKCJI KLASY C^∞ NA X, ZE STANDARDOWĄ (PUNKTOWĄ) STRUKTURĄ $\mathbb{R}$-ALGEBRY. RÓŻNICZKOWANIE W $x \in X$ TO ODWZOROWANIE

$$D^x : C^\infty(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

O WŁASNOŚCIACH

$$(R0) \quad D^x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^\infty(X, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

$$(R1) \quad D^x(f_1 \cdot f_2) = f_1(x) \cdot D^x f_2 + D^x f_1 \cdot f_2(x).$$

REGUŁA LEIBNIZA

PRZESTRZEŃ RÓŻNICZKOWAŃ W $x \in X$ BĘDZIEMY OZNACZAĆ $\mathrm{Der}_x C^\infty(X, \mathbb{R})$.

ISTOTNIE, JEST $D_{[\gamma]\sim x}(f\cdot g)=D((f\cdot g)\circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(x))\circ D(\kappa_i\circ\gamma)(0)$

$$= D\big((f\circ\kappa_i^{-1})\cdot(g\circ\kappa_i^{-1})\big)(\kappa_i(x))\circ D(\kappa_i\circ\gamma)(0)$$

„ZWYKŁY" LEIBNIZ

$$= \Big((f\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(x))\, D(g\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(x)) + (g\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(x))\, D(f\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(x))\Big)\circ D(\kappa_i\circ\gamma)(0)$$

$$\equiv f(x)\cdot D_{[\gamma]\sim x}\, g + g(x)\cdot D_{[\gamma]\sim x} f.$$

JEST TO SZCZEGÓLNY PRZYPADEK OGÓLNEJ KONSTRUKCJI

Def. 9' NIECHAJ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – PRZEMIENNE $\mathbb{R}$-ALGEBRY UNITALNE i NIECH $\varrho : \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ w $\mathbf{uAbAlg}_{\mathbb{R}}$ (homomorfizm).

RÓŻNICZKOWANIE $\mathcal{A}$ WZGL. ϱ TO $D:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ w $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ O WŁASNOŚCI $\forall\, a_1,a_2\in\mathcal{A}: D(a_1\cdot a_2) = \varrho(a_1)\cdot D(a_2) + \varrho(a_2)\cdot D(a_1)$.

Stw. 7. $\forall\, D^x \in \mathrm{Der}_x C^\infty(X,\mathbb{R})$:

(i) $\forall\, f \in C^\infty(X,\mathbb{R})$: f stała $\Rightarrow D^x f = 0$

(ii) $\forall\, f, g \in C^\infty(X,\mathbb{R})$: $f(x) = 0 = g(x) \Rightarrow D^x(f \cdot g) = 0$

D: Ad (i) Zauważmy: funkcję stałą można zapisać jako

$$f = c \cdot 1\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wobec $\mathbb{R}$-liniowości D^x dostajemy to

$$D^x f = c \cdot D^x 1 \equiv c \cdot D^x 1.$$

Pozostaje wyznaczyć $D^x 1$.

$$D^x 1 = D^x(1\cdot 1) \underset{RL}{=} D^x 1 \cdot 1(x) + 1(x)\cdot D^x 1$$
$$= 2 D^x 1$$
$$\Downarrow$$
$$D^x 1 = 0 \,. \quad \blacksquare$$

Ad (ii) $\Leftarrow$ WPROST Z REGUŁY LEIBNIZA I $\mathbb{R}$-LINIOWOŚCI. $\square$

MAMY TEŻ KLUCZOWE

Stw. 8. NIECHAJ $f_1, f_2 \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. JEŚLI $\exists_{\mathcal{O}_x \in \mathcal{J}(x)}$: $f_2\restriction_{\mathcal{O}_x} = f_1\restriction_{\mathcal{O}_x}$, WÓWCZAS ZACHODZI RÓWNOŚĆ

$$\forall D^x \in \mathrm{Der}_x C^\infty(X,\mathbb{R}) : D^x f_2 = D^x f_1 .$$

D: WYSTARCZY, RZECZ JASNA, SPRAWDZIĆ

$$\forall f \in C^\infty(X,\mathbb{R}) \left(\exists\, \Theta_x \in \mathcal{J}(x)\ \forall y \in \Theta_x : f(y) = 0 \implies \forall D^x \in \mathrm{Der}_x C^\infty(X,\mathbb{R}) : D^x f = 0 \right)$$

ROZWAŻMY $C := \operatorname{supp} f$ ORAZ DOWOLNY $\mathcal{U} \supset \operatorname{supp} f$, $\mathcal{U} \subset X$, O WŁASNOŚCI $x \notin \mathcal{U}$. JAKO ŻE $x \in X \setminus \operatorname{supp} f$ (NA MOCY ZAŁ.), PRZETO $\mathcal{U}$ ISTNIEJE NA MOCY TW. 1. [DIEUDONNÉ]. PRZYWOŁUJEMY TW. 6., BY STWIERDZIĆ ISTNIENIE $\tilde{\chi} \equiv \chi \in C^\infty(X,\mathbb{R})$: $\chi\restriction_C \equiv 1 \wedge \operatorname{supp}\chi \subset \mathcal{U}$, WIĘC TEŻ $\chi(x) = 0$. JEST ZATEM $f = f \cdot \chi$, A W TAKIM RAZIE:

$$D^x f = D^x(f \cdot \chi) = \overset{0}{f(x)} \cdot D^x \chi + \overset{0}{\chi(x)} \cdot D^x f = 0. \quad \square$$

INTYMNY ZWIĄZEK RÓŻNICZKOWAŃ W $x \in X$ Z WEKTORAMI STYCZNYMI W TYMŻE PUNKCIE USTANAWIA...

FO

Stw. 9. $\mathrm{Der}_x C^\infty(X,\mathbb{R}) \cong T_x X$ w $\mathrm{Vect}^{<\infty}_{\mathbb{R}}$.

D: ROZWAŻMY UPRZEDNIO WPROWADZONE ODWZOROWANIE:

$$D_\cdot : T_x X \longrightarrow \mathrm{Der}_x C^\infty(X,\mathbb{R}),\quad [\gamma]_{\sim_x} \longmapsto D_{[\gamma]_{\sim_x}}$$

JAK POKAZALIŚMY, JEST ONO JAWNIE $\mathbb{R}$-LINIOWE.

NIECH $[\gamma]_{\sim_x} = 0 \equiv [x]_{\sim_x}$, A WÓWCZAS

$$\forall_{f\in C^\infty(X,\mathbb{R})} : D_{[\gamma]_{\sim_x}} f = D(f\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(x)) \overset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\circ} \overbrace{D(\kappa_i\circ\gamma)(0)}^{0} \equiv 0,$$

CZYLI $D_{[\gamma]_{\sim_x}} = 0$, JEST ZATEM $D_\cdot$ INIEKCJĄ.

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI DOWODZIMY...

LEMAT 3. NIECHAJ $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ OTOCZENIE 0 i NIECH $f \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ SPEŁNIA $f(0)=0$. WÓWCZAS $\exists \{g_i \in C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R})\}_{i\in\overline{1,n}}\ \forall \underbrace{x}_{\equiv(x^i)}\in\mathcal{O}: f(x) = x^i g_i(x)$.

DL3: USTALAMY $x\in\mathcal{O}$ i DEFINIUJEMY

$$F: \underbrace{I}_{[0,1]} \xrightarrow{\ \subset\mathbb{R}\ } \mathbb{R},\quad t \longmapsto f(0 + t\cdot x)$$

– JAWNIE GŁADKA (BO $f\in C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R})$)

$[0,1]$: DOBRZE OKREŚLONE! T.j.

PODSTAWOWE TW. RACH. $\frac{d}{dx}$ i $\int$

$$\begin{cases} F'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(t\cdot x)\,x^i \\[2ex] F(1) = \displaystyle\int_0^1 dt\, F'(t) \quad \left(\Leftarrow\ F(0) = f(0) = 0\right). \end{cases}$$

JEST ZATEM:

$$f(x) = F(1) = \int_0^1 dt\, \frac{\partial f}{\partial x^i}(t\cdot x)\,x^i \equiv x^i \underbrace{\left(\int_0^1 dt\, \frac{\partial f}{\partial x^i}(t\cdot x)\right)}_{=:\, g_i(x)},$$

A PONIEWAŻ f JEST C^∞, PRZETO TAKŻE g_i SĄ C^∞ ($[0,1]$ JEST ZWARTY!) ■

F2

Oczywiście na pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_x \ni x$ możemy zawsze wybrać mapę

$\kappa : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times D})$: $\kappa(x) = 0$, a wtedy <u>dowolna</u>

funkcja $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ spełnia $(f - f(x))(x) \equiv 0$

$$\Leftrightarrow \left(f\circ\kappa^{-1} - f(x)\right)(\kappa(x)) = 0 \equiv \left(f\circ\kappa^{-1} - f(x)\right)(0),$$

zatem $\forall y \in \mathcal{O}_x$

$$\left(f\circ\kappa^{-1} - f(x)\right)(\kappa(y)) = \underline{x^i(\kappa(y))\, \overset{\equiv\,\tilde{g}_i(y)}{g_i(\kappa(y))}} \equiv \kappa^i(y)\,\tilde{g}_i(y),$$

tj. $f(y) = \overset{\equiv\,\text{const}}{f(x)} + \kappa^i(y)\,\tilde{g}_i(y)$. W takim jednak razie

$\tilde{\ } \leftarrow$ rozszerzenie do X

w świetle Stw. 7.

$$D^x f = D^x(f(x)) + D^x(\kappa^i \tilde{g}_i)$$

$$= 0 + \underset{=\,0}{\overset{\tilde{\kappa}^i(x)\,=}{\kappa^i(x)}}\, D^x\tilde{g}_i + D^x\tilde{\kappa}^i\cdot\tilde{g}_i(x) \equiv D^x\tilde{\kappa}^i\cdot\tilde{g}_i(x) \qquad (73)$$

DEFINIUJEMY

$$\gamma_{D^x} : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \ni t \longmapsto \kappa^{-1}(\overbrace{\kappa(x)}^{=0} + t \cdot D^x(\tilde{\kappa}^i)(x) \circ e_i),$$ DOST. MAŁE

$$\equiv \kappa^{-1}(tD^x(\tilde{\kappa}^1), tD^x(\tilde{\kappa}^2), \ldots, tD^x(\tilde{\kappa}^D))(x)$$

GDZIE $\{e_i\}_{i \in \overline{1,D}}$, $D = \dim X$ JEST BAZĄ STANDARDOWĄ w $\mathbb{R}^{\times D}$.

MAMY
$$D_{[\gamma_{D^x}]_{\sim x}} f = D(f \circ \kappa^{-1})(\kappa(x)) \cdot (D^x(\tilde{\kappa}^i) \circ e_i)$$

$$\equiv D(f \circ \kappa^{-1})(0)(D^x(\tilde{\kappa}^1), D^x(\tilde{\kappa}^2), \ldots, D^x(\tilde{\kappa}^D))^T(x)$$

ALE $f \circ \kappa^{-1}(\kappa(y)) = f(x) + \tilde{\kappa}^i(y)\tilde{g}_i(y)$, WIĘC

$$D(f \circ \kappa^{-1})(0) = (\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x), \ldots, \tilde{g}_D(x))$$
$$+ \overbrace{\tilde{\kappa}^i(x)}^{=0} D g_i(0),$$

CZYLI $D_{[\gamma_{D^x}]_{\sim x}} f \equiv D^x f$, CO DOWODZI SURJEKTYWNOŚCI D. $\square$

74

POWYŻSZE DAJE NAM DO RĘKI NATURALNĄ BAZĘ

$$\mathrm{Der}_x C^\infty(X,\mathbb{R}) \cong T_x X\,,$$ A MIANOWICIE

$$D_{[\,]-\varepsilon_i,\varepsilon_i[\,\ni t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x)\overset{!}{=}0 + t\cdot e_i)]_{\sim x}} f = D(f\circ\kappa^{-1})(\overset{\kappa(x)}{\overset{\shortparallel}{0}})\circ D(\kappa\circ\gamma_i)(0)$$

$$\shortparallel$$

$$D_{[\,]-\varepsilon_i,\varepsilon_i[\,\ni t \mapsto \kappa^{-1}(t\cdot e_i)]_{\sim x}} f \qquad =:\gamma_i \leftarrow \text{BAZA } P_x\,!$$

$$\shortparallel$$

$$D(f\circ\kappa^{-1})(0)\circ(0,0,\ldots,0,\overset{i}{\overset{\downarrow}{1}},0,\ldots,0)^T$$

$$\shortparallel$$

$$\partial_i(f\circ\kappa^{-1})(0)\,,$$

CZYLI W ZAPISIE SYMBOLICZNYM: $D_{[\gamma_i]_{\sim x}} = \partial_i$

ODTĄD NIEZADKO BĘDZIEMY PISAĆ (ZE ZROZUMIENIEM)

$$T_xX \ni v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv v^i \partial_i$$

NOTACJA: NIECH $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, A WTEDY

$$\boxed{\partial_i f(x) := \frac{\partial}{\partial x^i}\left(f \circ \kappa^{-1}\right)(\kappa(x))}$$

OMÓWIONĄ POWYŻEJ PREZENTACJĘ $T_x X$ JAKO $\mathrm{Der}_x C^\infty(X, \mathbb{R})$ MOŻEMY WYKORZYSTAĆ DO STOWARZYSZENIA ODWZOROWANIA LINIOWEGO $T_x X_1 \longrightarrow T_{F(x)} X_2$ Z ODWZOROWANIEM C^∞-GŁADKIM $F : X_1 \longrightarrow X_2$ WEDLE

Def. 10 $$T_x F : \underset{\substack{\cong \\ T_x X_1}}{\mathrm{Der}_x C^\infty(X_1, \mathbb{R})} \longrightarrow \underset{\substack{\cong \\ T_{F(x)} X_2}}{\mathrm{Der}_{F(x)} C^\infty(X_2, \mathbb{R})},$$

ODWZOROWANIE STYCZNOŚCIOWE DO F W x $\equiv dF(p)$

JEST ZADANY WZOREM

$$\forall D^x \in \mathrm{Der}_x C^\infty(X_1, \mathbb{R}), f \in C^\infty(X_2, \mathbb{R}) :$$

$$T_x F(D^x)(f) := D^x(f \circ F)$$

LHS $\in \mathrm{Der}_{F(x)} C^\infty(X_2, \mathbb{R})$

POWYŻSZA DEFINICJA MA SENS, GDYŻ

$$T_x F(D^x)(f_1 \cdot f_2) \equiv D^x((f_1 \cdot f_2) \circ F) \equiv D^x((f_1 \circ F) \cdot (f_2 \circ F))$$

$$\underset{RL}{=} (f_1 \circ F)(x) \cdot D^x(f_2 \circ F) + (f_2 \circ F)(x) \cdot D^x(f_1 \circ F)$$

$$= f_1(F(x)) \cdot T_x F(D^x)(f_2) + f_2(F(x)) \cdot T_x F(D^x)(f_1)$$

CELEM JEJ OSWOJENIA WARTO OBLICZYĆ T_xF NA BAZIE ZE STR. 74. DOSTAJEMY

$$T_xF(\partial_i)(f) = \partial_i(f\circ F)(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\circ F\circ \kappa^{-1}\right)(0)$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\left(f\circ \tilde{\kappa}^{-1}\right)\circ\left(\overset{\text{to w } X_2}{\tilde{\kappa}}\circ F\circ \underset{\text{to w } X_1}{\kappa}{}^{-1}\right)\right)(0)$$

$$\equiv \frac{\partial\left(f\circ\tilde{\kappa}^{-1}\right)}{\partial \tilde{x}^\alpha}\left(\tilde{\kappa}\circ F(x)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\tilde{\kappa}\circ F\circ\kappa^{-1}\right)^\alpha(0)$$

$$\equiv \frac{\partial\left(\tilde{\kappa}\circ F\circ\kappa^{-1}\right)^\alpha}{\partial x^i}(0)\,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha}\left(f\circ\tilde{\kappa}^{-1}\right)\left(\tilde{\kappa}\circ F(x)\right)$$

W SKRÓCIE (LECZ UWAŻNIE) ZAPISUJEMY ZAZWYCZAJ

$$T_xF(\partial_i) = \partial_i F^\alpha \tilde{\partial}_\alpha$$

MACIERZ 1. POCHODNYCH PREZENTACJI WSPÓŁRZĘDNIOWEJ.

BEZ TRUDU SPRAWDZAMY

Stw. 10. NIECHAJ $X_1, X_2, X_3 \in \mathrm{Man}^\infty$ I $F_1 : X_1 \xrightarrow{C^\infty} X_2$, $F_2 : X_2 \xrightarrow{C^\infty} X_3$.

ODNOŚNE ODWZOROWANIA STYCZNOŚCIOWE SPEŁNIAJĄ:

(i) $T_xF \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_xX_1, T_{F(x)}X_2)$

(ii) $T_x(F_2 \circ F_1) = T_{F_1(x)}F_2 \circ T_xF_1$ REGUŁA ŁAŃCUCHOWA

(iii) $T_x \mathrm{id}_{X_1} = \mathrm{id}_{T_xX_1}$.

F9

D: OCZYWISTY. $\square$

Cor. $F: X_1 \xrightarrow{\cong} X_2 \Rightarrow T_xF: T_xX_1 \xrightarrow{\cong} T_{F(x)}X_2$.

$$(T_xF)^{-1} = T_{F(x)}F^{-1}.$$

WOBEC JAWNIE GŁADKIEJ POSTACI T_xF W LOKALNEJ MAPIE κ (WOKÓŁ x) i ODNOŚNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH NATURALNYCH ∂_i DOSTAJEMY

Def. 11. $\forall\, X_1 \xrightarrow[C^\infty]{F} X_2\ \exists\, TX_1 \xrightarrow[C^\infty]{TF} TX_2 : \forall_{x \in X_1}: TF(x) \equiv T_xF.$

ODWZOROWANIE STYCZNE

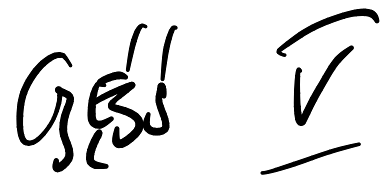
MAMY OCZYWIŚCIE

Stw. 11. Niechaj $X_1, X_2, X_3 \in \mathbf{Man}^\infty$ i $F_1 : X_1 \xrightarrow{C^\infty} X_2$, $F_2 : X_2 \xrightarrow{C^\infty} X_3$.

Wówczas
$$\begin{cases} T(F_2 \circ F_1) = TF_2 \circ TF_1 \\ T\,\mathrm{id}_{X_1} = \mathrm{id}_{TX_1}. \end{cases}$$

STWIERDZAMY ZATEM FUNKTORIALNOŚĆ T...

NIE-GENERYCZNA STRUKTURA TX ODNOTOWANA NA str. 62. PODDAJE SIĘ NATURALNEJ ABSTRAKCJI, O NADER ISTOTNYCH ZASTOSOWANIACH FIZYKALNYCH, KTÓRĄ ZAJMIEMY SIĘ W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI...



PUNKTEM WYJŚCIA DO DALSZYCH ROZWAŻAŃ JEST STRUKTURA ROZMAITOŚCI NA ZBIORZE WEKTORÓW LOKALNYCH W $M \in \mathrm{Man}^\infty$:

$$TM \equiv \bigsqcup_{m \in M} P_m \quad , \quad P_m = \{ [\gamma]_{\sim m} \mid \exists \varepsilon > 0 : \gamma \in C^\infty(]-\varepsilon, \varepsilon[, M) \} ,$$
$$\gamma(0) = m$$

WPROWADZONA UPRZEDNIO. TA BYŁA ZAINDUKOWANA PRZY UŻYCIU BIJEKCJI STOWARZYSZONYCH Z MAPAMI LOKALNYMI NAD POKRYCIEM $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$: $\kappa_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{\times n}$, $n \equiv \dim M$, $i \in I$ WEDŁUG SCHEMATU

(MAPY NATURALNE NA TM)

$$\tilde{\kappa}_i : \bigsqcup_{m \in \mathcal{O}_i} P_m \ni (m, [\gamma]_{\sim m}) \xmapsto{\cong} (\kappa_i(m), D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n}$$

WYKORZYSTUJEMY TAUTOLOGICZNĄ GŁADKOŚĆ TYCH OSTATNICH 82

(WZGL. STANDARDOWEJ STRUKTURY GŁADKIEJ NA PRZECIWDZIEDZINIE — PATRZ: Stw. 1. NA STR. 15.)

ORAZ TAKĄŻ GŁADKOŚĆ MAP κ_i, AŻEBY „WIERNIE UMODELOWAĆ LOKALNIE" TM (NAD $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$):

$$\tau_i := (\kappa_i^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times n}}) \circ \tilde{\kappa}_i : TM\restriction_{\mathcal{O}_i} \xrightarrow[C^\infty]{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n}, \quad i \in I$$

IZOMORFICZNY W $\mathbf{Man}^\infty$

PRZYWOŁAWSZY POSTAĆ ODWZOROWAŃ PRZEJŚCIA DLA ATLASU $\left(\{\pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i)\}_{i\in I}, \tilde{\kappa}_i\right)$ (PATRZ: STR. 61), STWIERDZAMY:

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}\restriction_{\tau_j(TM\restriction_{\mathcal{O}_{ij}})} : \underbrace{\tau_j(TM\restriction_{\mathcal{O}_{ij}})}_{=\, \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R}^{\times n}} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\tau_i(TM\restriction_{\mathcal{O}_{ij}})}_{=\, \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R}^{\times n}},$$

$$: (m, v) \longmapsto \left(m, D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(m))(v)\right)$$

P3

CO ZAPISZEMY W SKRÓCIE W POSTACI

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}\restriction_{\tau_j(\pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_{ij}))} : \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R}^{\times n} \circlearrowleft, \quad (m,v) \longmapsto (m, g_{ij}(m)(v))$$

DLA $\quad g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \xrightarrow[C^\infty]{} GL(n;\mathbb{R}), \quad m \longmapsto D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(m)).$

ZAUWAŻAMY GŁADKOŚĆ „ODWZOROWANIA PRZEJŚCIA" $\underset{\mathbb{R}}{\llcorner} \Rightarrow C^\infty$

$$\mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}, \quad (m,v) \longmapsto \underbrace{g_{ij}(m)}_{C^\infty}(v) \equiv \tilde{v}.$$

Z POWYŻSZEGO RACHUNKU WYŁANIA SIĘ NASTĘPUJĄCY INTUICYJNY „LOKALNIE TRYWIALNY ≡ PRODUKTOWY" OBRAZEK ROZMAITOŚCI TM :

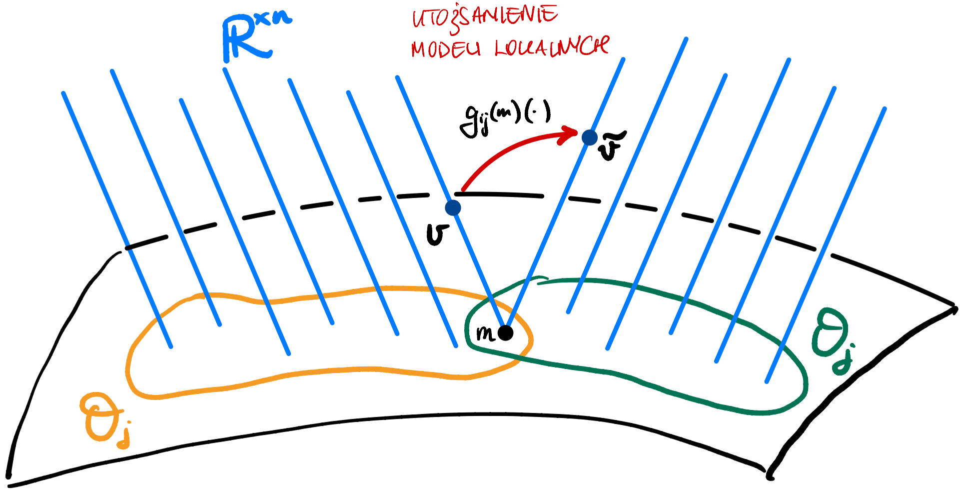
(PATRZ: Rys. 1. NA STR. 15.)

$$TM\restriction_{\mathcal{O}_i} \underset{C^\infty}{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n}$$

TO SAMO „WŁÓKNO" NAD $\forall x \in \mathcal{O}_i$!

PRZY CZYM TYM RAZEM (PATRZ: Def. 4 i CAŁA CZĘŚĆ I)

UTOŻSAMIENIE MODELI „TRYWIALIZACJI LOKALNYCH" LOKALNYCH NAD PRZECIĘCIEM ICH DZIEDZIN W „BAZIE" M (TJ. $\mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$) JEST IDENTYCZNOŚCIĄ NA TYMŻE PRZECIĘCIU, A WE „WŁÓKNIE" $\mathbb{R}^{\times n}$ JEST REALIZOWANE PRZEZ AUTOMORFIZMY $g_{ij}(m)$ — W TYM WYPADKU ODWZOROWANIA LINIOWE — GŁADKO INDEKSOWANE PRZEZ BAZĘ $\mathcal{O}_{ij} \ni m$, CO PRZEDSTAWIAMY NA PONIŻSZYM RYSUNKU POGLĄDOWYM...



ODNOTOWUJEMY NA MARGINESIE WARUNEK — SPEŁNIONY TRYWIALNIE W OBECNYCH OKOLICZNOŚCIACH — SAMOZGODNOŚCI UTOŻSAMIEŃ: $\forall_{m \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(m) \circ g_{kj}(m)^{-1} \circ g_{ki}(m) = \mathbb{1}_n$.

NASZE OBSERWACJE PODDAJĄ SIĘ NATURALNEJ, A PRZY TYM NADER UŻYTECZNEJ FIZYKALNIE ABSTRAKCJI, W RAMACH KTÓREJ ROZWAŻYMY ROZMAITOŚCI „WIERNIE MODELOWANE LOKALNIE" NA PRODUKCIE KARTEZJAŃSKIM ...

Def!

Def. 12. **Wiązka włóknista** klasy C^∞ to czwórka

$$(E, B, F, \pi_E)$$

złożona z rozmaitości gładkich:

- E, zwanej **przestrzenią totalną** (**wiązki**);
- B, zwanej **bazą** (**wiązki**);
- F, zwanej **włóknem typowym** (**wiązki**);

oraz odwzorowania (surjektywnego) klasy C^∞

$$\pi_E \;:\; E \longrightarrow B\,,$$

zwanego **rzutem na bazę** (**wiązki**), dla których istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B wraz ze stowarzyszoną z nim rodziną dyfeomorfizmów klasy C^∞

$$\tau_i \;:\; \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F\,,$$

zwanych **trywializacjami lokalnymi** (**wiązki**), domykających diagramy przemienne

$$\begin{tikzcd} \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & \circlearrowright & \mathcal{O}_i \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathcal{O}_i & \end{tikzcd}\;.$$

Pokrycie o powyższej własności określamy mianem **trywializującego**. Odwzorowania

$$g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F) \subseteq \mathrm{Diff}^\infty(F, F)$$

określone, dla wszystkich par indeksów $(i,j) \in I^{\times 2}$, dla których $\mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \varnothing$, przez superpozycje dyfeomorfizmów

$$\tau_{ij} := \tau_i \circ \tau_j^{-1}\restriction_{\mathcal{O}_{ij}\times F} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \times F \circlearrowleft \;:\; (x, f) \longmapsto \big(x, g_{ij}(x)(f)\big)\,,$$

gdzie odwzorowanie $\mathcal{O}_{ij} \times F \longrightarrow F \;:\; (x,f) \longmapsto g_{ij}(x)(f)$ jest z założenia klasy C^∞, są nazywane **odwzorowaniami przejścia** (**wiązki**), a grupa automorfizmów $\mathrm{Aut}(F)$ włókna typowego (której ewentualne zawieranie się właściwe w grupie $\mathrm{Diff}^\infty(F, F)$ dyfeomorfizmów włókna typowego wyraża zgodność z dodatkową na nim strukturą, jak np. struktura liniowa lub struktura grupy) zyskuje miano **grupy strukturalnej** (**wiązki**).

(PATRZ: Stw. 1. NA STR. 15.)

WIĄZKĘ BĘDZIEMY ZAZWYCZAJ REPREZENTOWAĆ TAK

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, rightsquigarrow] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ & B \end{tikzcd}$$

ODMIENNY STATUS ONTOLOGICZNY

Przeciwobraz punktu $x \in B$ względem rzutu

$$\pi_E^{-1}(\{x\}) \equiv E_x$$

nazywamy **włóknem wiązki E nad x.**

Morfizm wiązek włóknistych między dwiema wiązkami włóknistymi $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ to para (Φ, f) odwzorowań klasy C^∞, które czynią przemiennym poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{E_1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E_2 \arrow[d, "\pi_{E_2}"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd} .$$

Izomorfizm wiązek włóknistych pokrywający identyczność na bazie, czyli spełniający warunek $f = \mathrm{id}_B$, nosi miano **równoważności wiązek włóknistych**.

E.g.,

(1) **Wiązka trywialna** to czwórka

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & B \times F \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & B \end{tikzcd} ,$$

a więc np. 2-torus $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, walec $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

(2) **Wstęga Möbiusa** jako wiązka nietrywialna nad $\mathbb{S}^1$ o włóknie typowym $\mathbb{R}$.

(3) **Wiązka Hopfa** $(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1, h)$, przy czym rzut na bazę π_{H} we współrzędnych $(z_1, z_2) \equiv ((x_0, x_1), (x_2, x_3))$ na $\mathbb{C}^{\times 2} \equiv \mathbb{R}^{\times 4} \supset \{\ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{\times 4} \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\ \} \equiv \mathbb{S}^3$ przyjmuje postać $\pi_{\mathrm{H}}(z_1, z_2) = (2 z_1 \overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{\times 3}$.

BEZ TRUDU STWIERDZAMY SUBMERSYWNOŚĆ RZUTU NA BAZĘ (PATRZ: * NA STR. 86). KLUCZOWĄ CECHĘ STRUKTURALNĄ ODWZOROWAŃ TEGO RODZAJU USTALA PONIŻSZE

Stw. 12. Niechaj $M_A,\ A \in \{1,2\}$ będą rozmaitościami gładkimi i niech $f : M_1 \longrightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie $x \in M_1$. Istnieje wówczas otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$ punktu $f(x)$, na którym jest określone odwzorowanie $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \longrightarrow M_1$ klasy C^∞ o własnościach

$$f \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \qquad \wedge \qquad \sigma \circ f(x) = x\,,$$

zwane **cięciem lokalnym** odwzorowania f przez x.

<u>*Dowód:*</u> Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia $\mathcal{O}_x \ni x$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n_1})$, $n_1 \equiv \dim M_1$, w której $\kappa_1(x) = 0$, a także – do pewnego otoczenia $\widetilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_2 : \widetilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2 \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n_2})$, $n_2 \equiv \dim M_2$, w której $\kappa_2 \circ f(x) = 0$. Submersywność f w x oznacza, że odwzorowanie styczne

$$\mathsf{T}_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : \mathsf{T}_{\kappa_1(x)=0}\mathbb{R}^{\times n_1} \equiv \mathbb{R}^{\times n_1} \longrightarrow \mathsf{T}_{\kappa_2 \circ f(x)=0}\mathbb{R}^{\times n_2} \equiv \mathbb{R}^{\times n_2}$$

jest epimorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych. Niechaj zatem $V_1 \subset \mathbb{R}^{\times n_1}$ będzie (dowolną) podprzestrzenią izomorficznie odwzorowywaną w $\mathbb{R}^{\times n_2}$ przez (ograniczenie) $\mathsf{T}_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$, a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy C^∞

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}\restriction_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{\times n_2}\,,$$

o jawnie niepustej dziedzinie (wszak V_1 jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{\times n_1}$, a $\mathcal{U}_1$ jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. . . .

… Istotnie, wobec tożsamości $\mathrm{T}_0 V_1 \equiv V_1$ dziedzina $\mathrm{T}_0 F$ przyjmuje postać $\mathrm{T}_0 \mathcal{U}_1 \cap \mathrm{T}_0 V_1 \equiv \mathbb{R}^{\times n_1} \cap V_1 = V_1$, co oznacza, że $\mathrm{T}_0 F$ jest izomorfizmem

$$\mathrm{T}_0 F \equiv \mathrm{T}_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1} .$$

W odwołaniu do Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań wnioskujemy zatem, że $F \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \restriction_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$ ma pożądaną lokalną odwrotność $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1} \restriction_{F(\mathcal{U}_0)}$ klasy C^∞ na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_0 \subset F(\mathcal{U}_1 \cap V_1)$ wektora $0 \equiv \kappa_2 \circ f(x)$. Homeomorficzny przeciwobraz $\kappa_2^{-1}(\mathcal{U}_0)$ tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu $f(x)$, na którym jest określone lokalne cięcie σ klasy C^∞. □

MAMY TEŻ — INSTRUMENTALNO W KONTEKŚCIE MODELOWANIA SYMETRII CECHOWANIA/LOKALNYCH W TEORII POLA—

Stw. 13. (Kwazi-uniwersalna własność submersji). Niechaj $f : M_1 \longrightarrow M_2$ będzie surjektywną submersją klasy C^∞. Ponadto niech N będzie C^∞-rozmaitością, a $\check{F} : M_2 \longrightarrow N$ dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie $\check{F}$ jest klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie złożone $\check{F} \circ f : M_1 \longrightarrow N$ ma tę własność,

$$\begin{tikzcd} & & N \\ M_1 \arrow[urr, "\check{F}\circ f"] \arrow[rr, two heads, "f"'] & & M_2 \arrow[u, "\check{F}"'] \end{tikzcd}$$

$$\check{F}\circ f \in C^\infty(M_1, N) \Longrightarrow \check{F} \in C^\infty(M_2, N).$$

W SZCZEGÓLNOŚCI: KAŻDEMU ODWZOROWANIU GŁADKIEMU $F: M_1 \longrightarrow N$ STAŁEMU NA POZIOMICACH f ODPOWIADA DOKŁADNIE JEDNO ODWZOROWANIE

$\check{F} \in C^\infty(M_2, N)$ O WŁASNOŚCI WYRAŻONEJ – WRAZ Z RZECZONĄ WŁASNOŚCIĄ F – PRZEZ DIAGRAM PRZEMIENNY

$$\{(m_1,m_2)\in M_1\times M_1 \mid f(m_1)=f(m_2)\} = M_1 \times_{M_2} M_1$$

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \times_{M_2} M_1 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
M_1 \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, bend right, "F"'] & & M_1 \arrow[dl, "f"'] \arrow[ddl, bend left, "F"] \\
 & M_2 \arrow[d, dashed, "\check{F}"] & \\
 & N &
\end{tikzcd}.$$

D: Ilekroć $\check{F}$ jest klasy C^∞, także $\check{F}\circ f$ ma tę własność jako superpozycja odwzorowań klasy C^∞.

I odwrotnie, niechaj $\check{F}\circ f \in C^\infty(M_1, N)$. Wobec surjektywności f dowolny punkt w M_2 możemy przedstawić w postaci $f(x)$ dla pewnego $x \in M_1$. Wybierzmy zatem (dowolnie) punkt $f(x) \in M_2$ oraz jego otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$, na którym jest określone cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \longrightarrow M_1$ odwzorowania f spełniające warunki z tezy Kw.R Przyjąwszy zapis dowodu rzeczonego stwierdzenia, otrzymujemy tożsamość

$$\check{F}\restriction_{\mathcal{O}_{f(x)}} \equiv \check{F}\circ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} = (\check{F}\circ f)\circ\sigma\,,$$

która dowodzi C^∞-gładkości $\check{F}\restriction_{\mathcal{O}_{f(x)}}$ na gruncie założenia o C^∞-gładkości $\check{F}\circ f$ oraz wynikającej ze Stw.R C^∞-gładkości cięcia lokalnego σ. Dowolność wyboru $f(x)$ pozwala wnioskować o globalnej C^∞-gładkości $\check{F}$.

PRZECHODZIMY NASTĘPNIE DO DOWODU DRUGIEJ CZĘŚCI TEZY, DOTYCZĄCEJ ISTNIENIA I JEDNOZNACZNOŚCI $\check{F}\in C^\infty(M_2,N)$...

1° NIECH $\check{F}_\alpha, \alpha \in \{1,2\}$ BĘDĄ DOWOLNYMI TAKIMI ODWZOROWANIAMI. WÓWCZAS $\check{F}_2\restriction_{f(M_1)} = \check{F}_1\restriction_{f(M_1)}$, ALE $f(M_1) = M_2$, BO f EPI, ZATEM $\check{F}$ JEDYNE, O ILE $\exists$.
POKRYWAMY M_2 DZIEDZINAMI $\mathcal{O}_i, i \in I$ CIĘĆ LOKALNYCH $\sigma_i : \mathcal{O}_i \to M_1$ SUBMERSJI f (NA PODST. Stw. 12.) i DEFINIUJEMY $\check{F}_i := F \circ \sigma_i : \mathcal{O}_i \to N$, $i \in I$. NA PRZECIĘCIACH DZIEDZIN: $\check{F}_i\restriction_{\mathcal{O}_{ij}} = \check{F}_j\restriction_{\mathcal{O}_{ij}}$ WOBEC STAŁOŚCI $\check{F}$ NA POZIOMICACH f. TO PRZESĄDZA O GŁADKOŚCI $\check{F} : M_2 \to N$, $m \mapsto \check{F}_i(m)$ DLA $m \in \mathcal{O}_i$. □

NB: ZBIÓR CIĘĆ LOKALNYCH (E, B, F, π_E) OZNACZAMY SYMBOLEM $\Gamma_{loc}(E)$, A ZBIÓR CIĘĆ GLOBALNYCH — SYMBOLEM $\Gamma(E)$.

ISTNIENIE TRYWIALIZACJI LOKALNYCH W POŁĄCZENIU Z INTUICJĄ, JAKIEJ DOSTARCZA PRZYKŁAD MOTYWACYJNY $TM \to M$ WSKAZUJE NA MOŻLIWOŚĆ ZAKODOWANIA INFORMACJI O STRUKTURZE WIĄZKI W RODZINIE $\{g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \to \mathrm{Aut}(F)\}_{i,j \in I}$ LOKALNIE GŁADKICH ODWZOROWAŃ PRZEJŚCIA. O TYM, JAK BOGATA I JAK WIERNIE PRZEZ NIE KODOWANA JEST TO INFORMACJA, MÓWI ...

Tw. 8 (O rekonstrukcji (izotypu) wiązki włóknistej). Przyjmijmy zapis Def. 12. Odwzorowania przejścia wiązki włóknistej (E, B, F, π_E) o pokryciu trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B spełniają **warunek 1-kocyklu**

[TW. O WYSPRZĘGLANIU]

3 JĘZ. ANG. "THE CLUTCHING THEOREM"

$$\forall_{i,j,k\in I,\ x\in\mathcal{O}_{ijk}} \ :\ g_{ij}(x)\circ g_{kj}(x)^{-1}\circ g_{ki}(x) = \mathrm{id}_F\,. \tag{1}$$

I odwrotnie, niechaj $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej B i niech F będzie dowolną rozmaitością gładką o grupie automorfizmów $\mathrm{Aut}(F)\subseteq \mathrm{Diff}^\infty(F,F)$. Dowolna stowarzyszona z $\mathcal{O}_B$ rodzina odwzorowań

$$g_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow \mathrm{Aut}(F)\,,\qquad i,j\in I$$

indukujących odwzorowania klasy C^∞

$$\mathcal{O}_{ij}\times F\longrightarrow F\ :\ (x,f)\longmapsto g_{ij}(x)(f)$$

i spełniających powyższy warunek określa wiązkę włóknistą o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z $\mathcal{O}_{ij}$ tożsamych z g_{ij}. Ilekroć odwzorowania te są odwzorowaniami przejścia pewnej wiązki włóknistej nad B o włóknie typowym F, ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną na podstawie odwzorowań przejścia g_{ij}.

<u>*Dowód:*</u> Pierwsza część tezy jest bezpośrednią konsekwencją następującej równości, słusznej dla dowolnej trójki $(i,j,k)\in I^{\times 3}$ oraz $(x,f)\in\mathcal{O}_{ijk}\times F$:

$$\begin{aligned}(x,f) &\equiv (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{ijk}}\times\mathrm{id}_F)(x,f) = \big((\tau_i\circ\tau_j^{-1})\circ(\tau_k\circ\tau_j^{-1})^{-1}\circ(\tau_k\circ\tau_i^{-1})\big)(x,f)\\ &= \big(x, g_{ij}(x)\circ g_{kj}(x)^{-1}\circ g_{ki}(x)(f)\big)\,.\end{aligned}$$

Punktem wyjścia do dowodu drugiej jego części jest konstrukcja sumy rozłącznej $\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i\times F)$, na której określamy relację

$$(x,f,i)\sim_{g_{\cdot\cdot}}(y,g,j)\qquad\Longleftrightarrow\qquad\left\{\begin{array}{c} y = x\in\mathcal{O}_{ij}\\ g = g_{ji}(x)(f)\end{array}\right.\,,$$

Warunek 1-kocyklu spełniony przez odwzorowania przejścia sprawia, że jest to relacja równoważności, oto bowiem dla $i=j=k$ dostajemy

$$g_{ii}(x)\equiv g_{ii}(x)\circ g_{ii}(x)^{-1}\circ g_{ii}(x) = \mathrm{id}_F\,,$$

zatem $\sim_{g..}$ jest zwrotna, a dalej tenże warunek w połączeniu z poprzednią konkluzją implikuje skośną symetrię g_{ij},

$$g_{ji}(x) \circ g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \circ g_{ii}(x)^{-1} \circ g_{ij}(x) = \mathrm{id}_F\,,$$

która pociąga za sobą jej symetrię, i wreszcie stosownie przepisany warunek 1-kocyklu,

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ij}(x) \circ g_{kj}(x)^{-1} = g_{ki}(x)^{-1} = g_{ik}(x)\,,$$

oznacza, że jest ona przechodnia. Możemy zatem przejść od $\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i \times F)$ do zbioru klas abstrakcji

$$\mathscr{R}_{g.,.} \coloneqq \Big(\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i \times F)\Big)/_{g..}\,,$$

na którym określamy surjekcję

$$\pi_{\mathscr{R}_{g.,.}} \,:\, \mathscr{R}_{g.,.} \twoheadrightarrow B \,:\, [(x,f,i)]_{\sim g..} \longmapsto x\,.$$

Zauważmy, że dowolna klasa $[(x,f,i)]_{\sim g..}$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta o ustalonym indeksie, $(x,f,i) \in \mathcal{O}_i \times F \times \{i\}$, gdyż – wprost z definicji –

$$(y,g,i) \in [(x,f,i)]_{\sim g..} \qquad\Longrightarrow\qquad (y,g) = \big(x, g_{ii}(x)(f)\big) = \big(x, \mathrm{id}_F(f)\big) = (x,f)\,,$$

a ponieważ także

$$\forall_{(x,f)\in\mathcal{O}_i\times F} \,:\, (x,f,i) \in [(x,f,i)]_{\sim g..}\,,$$

przeto otrzymujemy bijekcję

$$[\tau_i] \,:\, \pi^{-1}_{\mathscr{R}_{g.,.}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F \,:\, [(x,f,i)]_{\sim g..} \longmapsto (x,f)\,.$$

Następnie wprowadzamy na $\mathscr{R}_{g.,.}$ topologię ilorazową nazywając otwartym dowolny podzbiór $\mathcal{O} \subset \mathscr{R}_{g.,.}$, którego przeciwobraz względem rzutu

$$\pi_\sim \,:\, \bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i \times F) \longrightarrow \mathscr{R}_{g.,.} \tag{2}$$

jest otwarty w $\widetilde{\mathscr{R}}_{g.,.}$ w topologii sumy rozłącznej przestrzeni $\mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$, z których każda jest nośnikiem topologii produktowej. W rzeczonej topologii ilorazowej bijekcje $[\tau_i]$ są homeomorfizmami, a rzut $\pi_{\mathscr{R}_{g.,.}}$ jest ciągły.

. . .

... Otrzymana tu topologia jest hausdorffowska. Istotnie, ilekroć $[(x_1, f_1, i_1)]_{\sim_{g..}} \neq [(x_2, f_2, i_2)]_{\sim_{g..}}$, mamy dwie możliwości: albo $x_2 \neq x_1$, a wtedy rozdzielamy punkty x_1 i x_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_{i_1}$ i $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_{i_2}$ w hausdorffowskiej (z założenia) bazie, po czym tworzymy jawnie rozłączne otoczenia otwarte $\pi_\sim(\mathcal{O}_\alpha \times F \times \{i_\alpha\})$, $\alpha \in \{1,2\}$ obu klas w $\mathscr{R}_{g.,.}$ ($\pi_\sim$ utożsamia punktu we włóknie nad *wspólnym* punktem w bazie!), albo też $x_2 = x_1$ przy $i_2 = i_1$ (jako że $x_2 = x_1$, możemy *wybrać* $i_2 = i_1$, ewentualnie za cenę zmiany f_2), a wtedy rozdzielamy punkty f_1 i f_2 zbiorami otwartymi – odpowiednio – $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ w hausdorffowskim (także z założenia) włóknie F i na zakończenie tworzymy rozłączne otoczenia otwarte $\pi_\sim(\mathcal{O}_{i_1} \times \mathcal{U}_\alpha \times \{i_1\})$, $\alpha \in \{1,2\}$ obu klas w $\mathscr{R}_{g.,.}$ (tym razem utożsamienia dotyczą punktów w $\bigsqcup_{i\in I}(\mathcal{O}_i \times F)$ o indeksach pokrycia *innych* niż i_1).

Możemy już teraz skonstruować atlas na tak określonej przestrzeni topologicznej. W tym celu ustalamy atlas na zbiorze $\mathcal{O}_i$ poprzez ograniczenie dowolnego atlasu na bazie B, otrzymując tym sposobem mapy lokalne $\xi_{i,A} : \mathcal{O}_{i,A} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A}$, $A \in J_i$ na podzbiorach $\mathcal{O}_{i,A} \in \mathscr{T}(\mathcal{O}_i)$ (w topologii podprzestrzeni) modelowanych na $\mathcal{U}_{i,A} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $n = \dim B$, a do tego – atlas na włóknie złożony z map lokalnych $\zeta_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}_\alpha$, $\alpha \in K$ na podzbiorach $\mathcal{V}_\alpha \in \mathscr{T}(F)$ modelowanych na $\mathcal{W}_\alpha \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times m})$, $m = \dim F$. To uczyniwszy, definiujemy atlas na $\mathscr{R}_{g.,.}$ jako zbiór map lokalnych

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha} \quad &: \quad \mathcal{Q}_{i,A,\alpha} \equiv \pi_\sim(\mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i,A} \times \mathcal{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^{\times n+m} \\ &: \quad [(x,f,i)]_{\sim_{g..}} \longmapsto \big(\xi_{i,A}(x), \zeta_\alpha(f)\big), \end{aligned}$$

które są dobrze określone, jako że – w świetle wcześniejszych naszych ustaleń – istnieje jedyny reprezentant $(x,f) \in \mathcal{O}_{i,A} \times \mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{O}_i \times F$ klasy $[(x,f,i)]_{\sim_{g..}}$ o ustalonym indeksie pokrycia $i \in I$. Na przecięciu ich dziedzin znajdujemy transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \kappa_{i,A,\alpha\, j,B,\beta} \equiv \kappa_{i,A,\alpha} \circ \kappa_{j,B,\beta}^{-1} \quad &: \quad \kappa_{j,B,\beta}\big(\mathcal{O}_{i,A\, j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}\big) \xrightarrow{\cong} \kappa_{i,A,\alpha}\big(\mathcal{O}_{i,A\, j,B} \times \mathcal{V}_{\alpha\beta}\big) \\ &: \quad \big(\xi_{j,B}(x), \zeta_\beta(f)\big) \longmapsto \big(\xi_{i,A}(x), \zeta_\alpha \circ g_{ij}(x)(f)\big) \quad \ldots \end{aligned}$$

ZAUWAŻMY: $\left(\xi_{i,A}(x),\zeta_\alpha\circ g_{ij}(x)(f)\right)\equiv\left(\xi_{i,A}\circ\xi_{j,B}^{-1}\left(\xi_{j,B}(x)\right),\zeta_\alpha\circ\left(g_{ij}\circ\xi_{j,B}^{-1}\right)\left(\xi_{j,B}(x)\right)\circ\zeta_\beta^{-1}\left(\zeta_\beta(f)\right)\right).$

Zważywszy, że odwzorowania $\xi_{i,A}\circ\xi_{j,B}^{-1}$ są transformacjami współrzędniowymi (rozdrobnionego) atlasu na B, C^∞-gładkimi z założenia, a ponadto $g_{ij}\circ\xi_{j,B}^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami odwzorowań przejścia, także C^∞-gładkimi (w działaniu na F, w rozumieniu opisu odwzorowań g_{ij} podanego w treści dowodzonego twierdzenia) z założenia, i wreszcie $\zeta_\alpha\circ g_{ij}(x)\circ\zeta_\beta^{-1}$ są lokalnymi prezentacjami automorfizmów $g_{ij}(x)$ włókna F, również C^∞-gładkimi z założenia, stwierdzamy, że transformacje $\kappa_{i,A,\alpha\,j,B,\beta}$ są C^∞-gładkie, zatem mapy lokalne $\kappa_{i,A,\alpha}$ określają na $\mathscr{R}_{g.,.}$ strukturę rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞. Względem tejże struktury odwzorowania $[\tau_i]$ są (tautologicznie) dyfeomorfizmami klasy C^∞ (także rzut na bazę, $\pi_{\mathscr{R}_{g.,.}}\restriction_{\mathcal{Q}_{i,A,\alpha}}\equiv\mathrm{pr}_1\circ[\tau_i]$, jest klasy C^∞) i określają na $\mathscr{R}_{g.,.}$ strukturę wiązki włóknistej klasy C^∞.

Na zakończenie wykażemy równoważność struktur wiązki włóknistej: wyjściowej na danej wiązce włóknistej (E,B,F,π_E), o lokalnych trywializacjach $\tau_i\ :\ \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_I)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times F,\ i\in I$, i tej zrekonstruowanej w sposób opisany wyżej z jej odwzorowań przejścia g_{ij}. W tym celu rozważymy odwzorowania dane lokalnie w postaci

$$\iota_i:=[\tau_i]^{-1}\circ\tau_i\ :\ \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times F\xrightarrow{\cong}\pi_{\mathscr{R}_{g.,.}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\,,\qquad i\in I \tag{3}$$

i zauważamy, że te lokalne dyfeomorfizmy w dowolnym punkcie $y\in\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$, zadawanym przez pewne $x\in\mathcal{O}_{ij}$ oraz $f\in F$ w postaci $y=\tau_i^{-1}(x,f)$, spełniają relację

$$\begin{aligned}\iota_j(y)\quad&\equiv\quad\iota_j\left(\tau_i^{-1}(x,f)\right)\equiv[\tau_j]^{-1}\circ\tau_j\circ\tau_i^{-1}(x,f)=[\tau_j]^{-1}\left(x,g_{ji}(x)(f)\right)=[\tau_i]^{-1}\circ[\tau_i]\circ[\tau_j]^{-1}\left(x,g_{ji}(x)(f)\right)\\&=\quad[\tau_i]^{-1}\left(x,g_{ij}(x)\circ g_{ji}(x)(f)\right)=[\tau_i]^{-1}(x,f)\equiv[\tau_i]^{-1}\circ\tau_i\circ\tau_i^{-1}(x,f)\equiv\iota_i(y)\,,\end{aligned}$$

czyli że stanowią ograniczenia określonego globalnie dyfeomorfizmu

$$\iota\ :\ E\xrightarrow{\cong}\mathscr{R}_{g.,.}\,,$$

...

dane wzorem

$$\iota\restriction_{\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \iota_i \,,$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_E"'] & \mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}} \arrow[d, "\pi_{\mathscr{R}_{g_{\cdot,\cdot}}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd} ,$$

która pozwala nam zidentyfikować ι jako postulowany izomorfizm wiązek. $\square$

POWYŻSZA DYSKUSJA ODPOWIEDNIOŚCI

WIĄZKI WŁÓKNISTE $\longleftrightarrow$ DANE LOKALNE g_{ij}
(1-KOCYKLE PRZEJŚCIA)

PODDAJE SIĘ NATURALNEMU WYSUBTELNIENIU NA GRUNCIE STUDIUM LOKALNEJ (SNOPOWEJ) REPREZENTACJI (IZO)MORFIZMÓW WIĄZEK WŁÓKNISTYCH...

→ DOPRECYZOWANIA POJĘCIA MORFIZMU DOSTARCZA PONIŻSZA SPECJALIZACJA

Def. B. ILEKROĆ WŁÓKNA TYPOWE F_α, $\alpha \in \{1,2\}$ WIĄZEK WŁÓKNISTYCH $(E_\alpha, B, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ NAD WSPÓLNĄ BAZĄ NALEŻĄ DO TEJ SAMEJ PODKATEGORII GŁADKIEJ $\mathcal{C} \subset \mathbf{Man}^\infty$ (E.G., SĄ PRZESTRZENIAMI LINIOWYMI, TORSORAMI GRUPY LIEGO ETC.) MORFIZMEM (WERTYKALNYM) UZGODNIONYM ZE STRUKTURĄ WE WŁÓKNIE POMIĘDZY NIMI NAZYWAMY MORFIZM WIĄZEK

$$\left(\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{E_1}"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_{E_2}"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}\right),$$

KTÓRY W OGRANICZENIU DO WŁÓKIEN JEST ZADAWANY PRZEZ GŁADKO INDEKSOWANĄ PRZEZ B RODZINĘ MORFIZMÓW KATEGORII $\mathcal{C}$, (98)

TJ. W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNYCH $\tau_i^{(a)} : \pi_{E_a}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F_a$, $i \in I$

STOWARZYSZONYCH Z POKRYCIEM WSPÓŁTRYWIALIZUJĄCYM

$\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ BAZY B ZACHODZI

$$\tau_i^{(2)} \circ \Phi \circ \tau_i^{(1)-1} : \mathcal{O}_i \times F_1 \longrightarrow \mathcal{O}_i \times F_2, \quad (x, f) \longmapsto (x, h_i(x)(f)),$$

GDZIE $h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F_1, F_2)$, PRZY CZYM

$$\mathcal{O}_i \times F_1 \ni (x, f) \longmapsto h_i(x)(f) \in F_2 \text{ JEST } C^\infty.$$

MAMY

Stw. 14. NIECHAJ (E_a, B, F_a, π_{E_a}), $a \in \{1,2\}$ BĘDĄ WIĄZKAMI

O WŁÓKNACH TYPOWYCH $F_a \in \mathcal{C} \subset \mathbf{Man}^\infty$ I 1-KOCYKLACH PRZEJŚCIA

$g_{ij}^{(a)} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_a) \equiv \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F_a, F_a)$ STOWARZYSZONYCH Z POKRYCIEM

WSPÓŁTRYWIALIZUJĄCYM $\{O_i\}_{i\in I}$ BAZY B. WÓWCZAS LOKALNE DANE $h_i : O_i \to \mathcal{C}(F_1,F_2)$ DOWOLNEGO IZOMORFIZMU WERTYKALNEGO $\Phi : E_1 \to E_2$ UZGODNIONEGO ZE STRUKTURĄ WE WŁÓKNIE SPEŁNIAJĄ RELACJĘ (*)

$$\forall_{i,j\in I}\ \forall_{x\in O_{ij}} : \quad g^{(2)}_{ij}(x) = h_i(x)\circ g^{(1)}_{ij}(x)\circ h_j(x)^{-1}.$$

I ODWROTNIE: KAŻDA RODZINA $\{h_i : O_i \to \mathcal{C}(F_1,F_2)\}_{i\in I}$ SPEŁNIAJĄCA TĘ RELACJĘ ZADAJE MORFIZM J/W.

D: Z JEDNEJ STRONY DLA DOWOLNEGO Φ J/W MAMY:

$$\forall_{x\in O_{ij}} : \quad \left(\tau^{(2)}_i\circ\Phi\circ\tau^{(1)-1}_i\right)(x,f) = \left(x, h_i(x)(f)\right)$$

$$= \left(\left(\tau^{(2)}_i\circ\Phi\right)\circ\tau^{(1)-1}_j\circ\left(\tau^{(1)}_j\circ\tau^{(1)-1}_i\right)\right)(x,f)$$

$$= \left(\left(\tau_i^{(2)} \circ \Phi \right) \circ \tau_j^{(1)-1} \right) \left(x, g_{ji}^{(1)}(x)(f) \right)$$

$$= \left(\left(\tau_i^{(2)} \circ \tau_j^{(2)-1} \right) \circ \left(\tau_j^{(2)} \circ \Phi \circ \tau_j^{(1)-1} \right) \right) \left(x, g_{ji}^{(1)}(x)(f) \right)$$

$$= \left(\tau_i^{(2)} \circ \tau_j^{(2)-1} \right) \left(x, h_j(x) \left(g_{ji}^{(1)}(x)(f) \right) \right)$$

$$= \left(x, g_{ij}^{(2)}(x) \left(h_j(x) \left(g_{ji}^{(1)}(x)(f) \right) \right) \right)$$

$\Updownarrow$ (1) (Sz. 93)

$$h_i(x) = g_{ij}^{(2)}(x) \circ h_j(x) \circ g_{ij}^{(1)}(x)^{-1}, \quad x \in O_{ij}, \quad i,j \in I$$

$\Updownarrow$

$$g_{ij}^{(2)}(x) = h_i(x) \circ g_{ij}^{(1)}(x) \circ h_j(x)^{-1} \qquad \blacksquare$$

Z DRUGIEJ STRONY DLA DOWOLNEJ RODZINY $\{h_i : O_i \to \mathcal{C}(F_1, F_2)\}_{i\in I}$ IZOMORFIZMÓW $F_1 \to F_2$ SPEŁNIAJĄCYCH (*) ZE str. 100 MOŻEMY ZDEFINIOWAĆ ODWZOROWANIA LOKALNIE GŁADKIE

$$\Phi_i : \pi_{E_1}^{-1}(O_i) \longrightarrow \pi_{E_2}^{-1}(O_i),\quad \tau_i^{(1)-1}(x,f) \longmapsto \tau_i^{(2)-1}(x, h_i(x)(f)),\quad i\in I,$$

KTÓRE NAD PRZECIĘCIAMI $O_{ij} \ni y$ SPEŁNIAJĄ RELACJĘ

$$\Phi_j\left(\tau_i^{(1)-1}(x,f)\right) \equiv \Phi_j\left(\tau_j^{(1)-1}(x, g_{ji}^{(1)}(x)(f))\right)$$

$$\equiv \tau_j^{(2)-1}\left(x, h_j(x)\left(g_{ji}^{(1)}(x)(f)\right)\right) \equiv \tau_i^{(2)-1}\left(x, g_{ij}^{(2)}(x)\left(h_j(x)\left(g_{ji}^{(1)}(x)(f)\right)\right)\right)$$

$$\underset{(*)}{=} \tau_i^{(2)-1}\left(x, h_i(x)(f)\right) \equiv \Phi_i\left(\tau_i^{(1)-1}(x,f)\right),$$

KTÓRE IMPLIKUJĄ ISTNIENIE ODWZOROWANIA GŁADKIEGO

$\Phi : E_1 \longrightarrow E_2$ O OGRANICZENIACH

$$\Phi\restriction_{\pi_{E_1}^{-1}(O_i)} = \Phi_i \,, \quad i \in I. \qquad \square$$

KONKLUZJA: OPISANA WCZEŚNIEJ ODPOWIEDNIOŚĆ PRZYJMUJE SUBTELNIEJSZĄ POSTAĆ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{KLASY IZOMORFIZMU} \\ \quad \text{WIĄZEK WEKTOROWYCH} \\ \qquad \text{O WŁÓKNIE TYPOWYM Z } \mathcal{T} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [\{g_{ij} : O_{ij} \to \mathcal{L}(F,F)\}]_{\sim} \\ g^{(2)}_{ij} \sim g^{(1)}_{ij} \quad (*) \end{array} \right\}$$