GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

III ROZMAITOŚĆ RUCHÓW LOKALNYCH

2025/26

NASZYM NASTĘPNYM CELEM BĘDZIE SKONSTRUOWANIE SPÓJNEGO OPISU RUCHÓW NA ROZMAITOŚCI RÓŻNICZKOWEJ, KTÓRY WPISZEMY W NADRZĘDNY SCHEMAT

„PRZESTRZENI TOPOLOGICZNEJ LOKALNIE MODELOWANEJ NA PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ".

CZYNIĄC TO, ODKRYJEMY NOWĄ STRUKTURĘ GEOMETRYCZNĄ, KTÓREJ FIZYKALNA PRZYDATNOŚĆ USPRAWIEDLIWI POŚWIĘCENIE JEJ OSOBNEJ UWAGI...

NATURALNYM MODELEM RUCHU W ROZMAITOŚCI

$$\big((X, \mathcal{T}(X)), [(\mathcal{O}_i, \kappa_i)]\big) \text{ KLASY } C^{1+}$$

JEST KRZYWA $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$, $\varepsilon > 0$ KLASY C^{1+}

WIĘC TAKA, KTÓREJ DOWOLNA PREZENTACJA

WSPÓŁRZĘDNIOWA $\kappa_i \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^{\times \dim M}$

JEST KLASY C^{1+}. WYBRAWSZY DOWOLNY PUNKT

$x \in \mathcal{O}_i$, OKREŚLAMY RUCH LOKALNY PRZEZ x JAKO KLASĘ

ABSTRAKCJI KRZYWYCH PRZECHODZĄCYCH PRZEZ $x = \gamma(0)$

WZGLĘDEM RELACJI

$$\gamma_1 \sim_x \gamma_2 \overset{ex}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \gamma_1(0) = x = \gamma_2(0) \\ D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0) = D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0) \quad (*) \end{cases},$$

KTÓRĄ BĘDZIEMY OKREŚLAĆ MIANEM

RELACJI WSPÓŁSTYCZNOŚCI.

NA OBECNYM ETAPIE ZASADNYM WYDAWAŁOBY SIĘ DODANIE KWALIFIKACJI „W MODELU LOKALNYM", MAMY WSZAKŻE

Stw. 3. RELACJA $\sim_x$ JEST NIEZALEŻNA OD WYBORU LOKALNEJ MAPY κ_i.

D: ZAŁÓŻMY $x \in \Theta_{ij} = \Theta_i \cap \Theta_j$, A WTEDY (*) IMPLIKUJE

$$D(\kappa_j \circ \gamma_1)(0) = D(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1} \circ \kappa_i \circ \gamma_1)(0)$$

$$= D(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(x)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0)$$

$$\overset{*}{=} D(\kappa_j \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(x)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0)$$

$$= D(\kappa_j \circ \gamma_2)(0) \qquad \square$$

WPROWADZONE POJĘCIE (BEZ DODATKOWEJ KWALIFIKACJI) MA ZATEM SENS.

W NASTĘPNYM KROKU IDENTYFIKUJEMY NA ZBIORZE RUCHÓW LOKALNYCH PRZEZ x,

$$P_x = \{ [\gamma]_{\sim_x} \mid \exists \varepsilon > 0 : \gamma \in C^{1+}(]-\varepsilon, \varepsilon[, X) \wedge \gamma(0) = x \},$$

NATURALNĄ STRUKTURĘ $\mathbb{R}$-LINIOWĄ: $x \in \Theta_i$

(*) STRUKTURA GRUPY PRZEMIENNEJ:

$\forall [\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x} \in P_x$:

DOBRANE TAK, BY KRZYWA POZOSTAWAŁA W DZIEDZINIE MAPY κ_i: $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$[\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x} := [\,]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \mapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \triangleright (D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0)))\,]_{\sim_x}$$

O ELEMENCIE NEUTRALNYM

$[x]_{\sim_x}$ (KLASA WSPÓŁSTYCZNOŚCI KRZYWEJ STAŁEJ $\gamma(t) = x \ \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$)

(**) DZIAŁANIE CIAŁA BAZOWEGO:

$$\mathbb{R} \times P_x \longrightarrow P_x, \quad (\lambda, [\gamma]_{\sim_x}) \longmapsto [\,]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \longmapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + \lambda t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0))\,]_{\sim_x}$$

Stw. 4. Powyższa definicja struktury $\mathbb{R}$-liniowej jest dobrze określona, w szczególności zaś jest niezależna od wyboru lokalnej mapy κ_i.

D: Pokażemy prawdziwość tezy dla (*). Dowód dla (**) przebiega analogicznie.

Niechaj $x \in \mathcal{O}_{ij}$, a wtedy należy sprawdzić

$$\big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t\longmapsto \overbrace{\kappa_i^{-1}\big(\kappa_i(x)+t\triangleright\big(D(\kappa_i\circ\gamma_1)(0)+D(\kappa_i\circ\gamma_2)(0)\big)\big)}^{\equiv\,\gamma_i(t)}\big]_{\sim x}$$

$$=\big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\ni t\longmapsto \overbrace{\kappa_j^{-1}\big(\kappa_j(x)+t\triangleright\big(D(\kappa_j\circ\gamma_1)(0)+D(\kappa_j\circ\gamma_2)(0)\big)\big)}^{\equiv\,\gamma_j(t)}\big]_{\sim x}$$

Jest $\gamma_i(0)=\kappa_i^{-1}(\kappa_i(x))=x=\kappa_j^{-1}(\kappa_j(x))=\gamma_j(0)$, a nadto

– np. – $D(\kappa_i\circ\gamma_i)(0)=D(\kappa_i\circ\gamma_1)(0)+D(\kappa_i\circ\gamma_2(0))$

$$= D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j \circ \gamma_2)(0)$$

$$= D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(\overset{\gamma_1(0)}{\overset{\shortparallel}{x}})) \circ D(\kappa_j \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(\overset{\gamma_2(0)}{\overset{\shortparallel}{x}})) \circ D(\kappa_j \circ \gamma_2)(0)$$

$\mathbb{R}$-LINIOWOŚĆ POCHODNEJ

$$= D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(x)) \circ \big(D(\kappa_j \circ \gamma_1)(0) + D(\kappa_j \circ \gamma_2)(0) \big)$$

$$= D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1})(\kappa_j(x)) \circ D(\kappa_j \circ \gamma_j)(0) = D(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j \circ \gamma_j)(0)$$

$$= D(\kappa_i \circ \gamma_j)(0) \quad ✓$$

ŁĄCZNOŚĆ I PRZEMIENNOŚĆ TAK OKREŚLONEJ OPERACJI BINARNEJ JEST OCZYWISTA. TAKŻE NEUTRALNOŚĆ $[x]_{\sim x}$ NIE ULEGA WĄTPLIWOŚCI. $\square$

IDENTYFIKACJA STRUKTURY $\mathbb{R}$-LINIOWEJ POCIĄGA ZA SOBĄ PYTANIE O WYMIAR, WIĘC TEŻ MODEL PRZESTRZENI P_x.

STW. 5. $\forall x \in X: \; P_x \cong \mathbb{R}^{\times \dim X}$.

D: NIECH $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$. MAMY WÓWCZAS DOBRZE OKREŚLONE ODWZOROWANIE

DOWOLNY REPREZENTANT

$$\varphi_i^x : P_x \to \mathbb{R}^{\times \dim X}, \quad [\gamma]_{\sim x} \longmapsto D(\kappa_i \circ \gamma)(0),$$

KTÓRE JEST W OCZYWISTY SPOSÓB $\mathbb{R}$-LINIOWE.

ROZWAŻMY ODWZOROWANIE

$$\Gamma_i^x : \mathbb{R}^{\times \dim X} \to P_x, \quad v \longmapsto \big[\,]-\varepsilon, \varepsilon[\ni t \longmapsto \underbrace{\kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \cdot v)}_{\text{„} \Gamma_i^v(t) \text{"}}\big]_{\sim x},$$

TAKŻE $\mathbb{R}$-LINIOWE (SPRAWDŹ TO!). BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ O TYM, ŻE

$$\mu_i^x \circ \Gamma_i^x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times \dim X}} \wedge \Gamma_i^x \circ \mu_i^x = \mathrm{id}_{P_x}.$$

ISTOTNIE,

$$(\mu_i^x \circ \Gamma_i^x)(v) \equiv D(\kappa_i \circ \Gamma_i^v)(0) \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright v) = v \checkmark$$

ORAZ

$$(\Gamma_i^x \circ \mu_i^x)([\gamma]_{\sim x}) \equiv [\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}]_{\sim x}, \text{ ALE}$$

$$\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}(0) = \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x)) = x = \gamma(0), \text{ A TAKŻE}$$

$$D(\underset{\text{NP.}}{\kappa_i} \circ \gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)})(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \equiv D(\kappa_i \circ \gamma)(0). \qquad \square$$

POWYŻSZY DOWÓD PODPOWIADA DEFINICJĘ BIJEKCJI

$$\widetilde{\mu}_i : \coprod_{x \in \mathcal{O}_i} P_x \underset{\text{BIJEKCJA}}{\xrightarrow{\cong}} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}, \quad (x, [\gamma]_{\sim x}) \longmapsto (x, \mu_i^x([\gamma]_{\sim x}))$$

O ISTOTNEJ CESZE STRUKTURALNEJ: $\mathbb{R}$-LINIOWOŚCI WE „WŁÓKNIE" $P_x / \mathbb{R}^{\times \dim M}$.

NATURALNYM JEST MYŚLEĆ O $\widetilde{\mu}_i$ JAKO PROTOTYPIE LOKALNEJ MAPY NA „$\coprod_{x \in X} P_x$", A KONKRETNIE: MOŻEMY UŻYĆ $\widetilde{\mu}_i$ W DEFINICJI BIJEKCJI

$$\widetilde{\kappa}_i := (\kappa_i \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times \dim M}}) \circ \widetilde{\mu}_i : \coprod_{x \in \mathcal{O}_i} P_x \xrightarrow{\cong} \overbrace{\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}}^{\subset T(\mathbb{R}^{\times 2 \dim X})}, \quad (x, [\gamma]_{\sim x}) \longmapsto (\kappa_i(x), \mu_i^x([\gamma])).$$

LADA MOMENT WYKORZYSTAMY BIJEKTYWNOŚĆ $\tilde{\mu}_i$, ATEBY ZAINDUKOWAĆ NA ZBIORZE $\bigsqcup_{x \in X} P_x$ STOSOWNĄ TOPOLOGIĘ, TYMCZASEM JEDNAK PRZYJRZYMY SIĘ WYŁANIAJĄCYM SIĘ Z NASZYCH ROZWAŻAŃ PROTOTYPOM ODWZOROWAŃ PRZEJŚCIA: ILEKROĆ $x \in \mathcal{O}_{ij}$, DOSTAJEMY – DLA $(x,v) \in \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}$ –

$$
\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_i \circ \tilde{\kappa}_j^{-1}(x,v) &\equiv \left(\kappa_i \times \mu_i^x\right) \circ \left(\kappa_j^{-1} \times \Gamma_j^x\right)(x,v) \\
&\equiv \left(\kappa_i \times \mu_i^x\right)\left(\kappa_j^{-1}(x), \left[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \ni t \longmapsto \kappa_j^{-1}\left(\kappa_j(x) + t \triangleright v\right)\right]_{\sim x}\right) \\
&= \left(\left(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}\right)(x), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}\right)\left(\kappa_j(x) + t \triangleright v\right)\right) \\
&\equiv \left(\left(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}\right)(x), D\left(\kappa_i \circ \kappa_j^{-1}\right)\left(\kappa_j(x)\right)(v)\right).
\end{aligned}
$$

ZAUWAŻMY: ODWZOROWANIA TE ZALEŻĄ LINIOWO OD ARGUMENTU Z „WŁÓKNA" $\mathbb{R}^{\times \dim X}$, PRZY CZYM ZALEŻNOŚĆ ODNOŚNEGO ODWZOROWANIA LINIOWEGO (IZOMORFIZMU) OD ARGUMENTU Z „BAZY" $\mathcal{U}_i$ JEST KLASY $C^{k-1}_{\geq 1+}$. MAMY ZATEM SZANSĘ NA KONSTRUKCJĘ ROZMAITOŚCI RUCHÓW LOKALNYCH KLASY GŁADKOŚCI O 1 NIŻSZEJ NIŻ WYJŚCIOWA KLASA GŁADKOŚCI ROZMAITOŚCI $((X, \mathcal{T}(X)), [(\vartheta, \kappa)])$.

POZOSTAJE „TYLKO" WSKAZAĆ STOSOWNĄ TOPOLOGIĘ NA $\bigsqcup_{x \in X} P_x$, WZGLĘDEM KTÓREJ $\widetilde{\kappa}_i$ SĄ HOMEOMORFIZMAMI...

DOKONAMY WYBORU MINIMALNEGO: WYPOSAŻYMY $\bigsqcup_{x\in X} P_x$ W MOCNĄ TOPOLOGIĘ COFNIĘCIOWĄ (DLA TOPOLOGII PRODUKTOWEJ NA MODELU $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}$):

$$V \in \mathcal{T}\Big(\bigsqcup_{x\in X} P_x\Big) \overset{\text{ex}}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} \forall_{i\in I}: \tilde{\kappa}_i\Big(V \cap \bigsqcup_{x\in \theta_i} P_x\Big) \in \mathcal{T}\big(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times \dim X}\big)$$

ODWZOROWANIA $\tilde{\kappa}_i$ SĄ W TEJ TOPOLOGII TAUTOLOGICZNIE HOMEOMORFICZNE, PRZETO OTRZYMUJEMY

Tw. 7. NIECHAJ $((X, \mathcal{T}(X)), [(\theta, \kappa)])$ BĘDZIE ROZMAITOŚCIĄ KLASY $C^{k(\geq 1)}$. WÓWCZAS $\Big(\big(\bigsqcup_{x\in X} P_x, \mathcal{T}(\bigsqcup_{x\in X} P_x)\big), [(\bigsqcup_{x\in\theta_{\cdot}} P_x, \tilde{\kappa}_{\cdot})]\Big)$ JEST ROZMAITOŚCIĄ KLASY C^{k-1}.

$\mathcal{T}$ j/w

D: J/W. □

63

Def. 8. Rozmaitość $\left(\left(TX := \bigsqcup_{x\in X} P_x, \mathcal{T}(TX)\right), [(\bigsqcup_{x\in\mathcal{O}_i} P_x, F_\cdot)]\right)$ określamy mianem rozmaitości stycznej do X. Punkty $v \equiv [\gamma]_{\sim_x} \in P_x$ to wektory styczne do X w x.

NB: Wektory zadają różniczkowania $\mathbb{R}$-algebry $C^1(X,\mathbb{R})$:

$$D_{[\gamma]_{\sim_x}}(f) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\gamma) \overset{x\in\mathcal{O}_i}{\equiv} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\kappa_i^{-1}\circ\kappa_i\circ\gamma)$$

$$\equiv D(f\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(x))\circ D(\kappa_i\circ\gamma)(0) \leftarrow \text{dobrze określone!}$$

czyli $D^x : C^1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$: (R0) $D^x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^1(X,\mathbb{R}),\mathbb{R})$

Reguła Leibniza (R1) $D^x(f_1\cdot f_2) = f_1(x)\cdot D^x f_2 + D^x f_1 \cdot f_2(x)$.

NIE-GENERYCZNA STRUKTURA TX ODNOTOWANA NA str. 62. PODDAJE SIĘ NATURALNEJ ABSTRAKCJI, O NADER ISTOTNYCH ZASTOSOWANIACH FIZYKALNYCH, KTÓRĄ ZAJMIEMY SIĘ W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI, ODKŁADAJĄC DYSKUSJĘ ZWIĄZKU Z RÓŻNICZKOWANIAMI NA RÓŻNICEJ...