GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

VI i VII GEOMETRYZACJE ISTOTNYCH KONSTRUKCJI ALGEBRY LINIOWEJ

1/4 i 8/4

2025/26

[illegible] $\overline{\underline{VI}}$

ABSTRAKCJĘ Def. 12 WYWIEDLIŚMY ZE STUDIUM STRUKTURY ROZMAITOŚCI RUCHÓW LOKALNYCH W ROZMAITOŚCI M. TO POZWOLIŁO NAM ZAOBSERWOWAĆ STRUKTURĘ ISTOTNIE BOGATSZĄ NIŻ TA (GENERYCZNA), O KTÓREJ MOWA W RZECZONEJ DEFINICJI. W SZCZEGÓLNOŚCI DOSTRZEGLIŚMY BARDZO SZCZEGÓLNĄ, BO LINIOWĄ POSTAĆ ZALEŻNOŚCI ODWZOROWAŃ PRZEJŚCIA TM POMIĘDZY TRYWIALIZACJAMI NATURALNYMI OD PUNKTU (WEKTORA) WE WŁÓKNIE. PONIŻEJ NADAJEMY TEJ OBSERWACJI STATUS OSOBNEJ DEFINICJI, O ROZLEGŁYM SPEKTRUM ZASTOSOWAŃ FIZYCZNYCH (WIĄZKI FORM RÓŻNICZKOWYCH, WIĄZKI SPINOROWE etc.).

Def. 14. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞. **Wiązka wektorowa rzędu** r **nad ciałem** $\mathbb{K}$ klasy C^∞ to wiązka włóknista $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ o własnościach

- $\forall_{x \in B} \; : \; \mathbb{V}_x \equiv \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\{x\}) \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^∞ (lokalnych trywializacji)

$$\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \restriction_{\mathbb{V}_x} \; : \; \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times r}, \qquad x \in B$$

  są izomorfizmami przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę $\mathbb{K}$-liniową na włóknach $\mathbb{V}$ są klasy C^∞, w szczególności więc mamy ODWZOROWANIA GŁADKIE

(6) $$\mathbb{A} \; : \; \underbrace{\mathbb{V} \times_B \mathbb{V}}_{= \mathbb{V} {}_{\pi_{\mathbb{V}}}\!\times_{\pi_{\mathbb{V}}} \mathbb{V}} \longrightarrow \mathbb{V}$$

modelowany na definiującej operacji binarnej $A^r \; : \; \mathbb{K}^{\times r} \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

(7) $$\begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{A}"] \arrow[d, "\tau_i \times \tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}) \times_{\mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}) \arrow[r, "(\mathrm{pr}_1, A^r \circ \mathrm{pr}_{2,4})"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r} \end{tikzcd}$$,

NIECH $f_a : X_a \to Y$, $a \in \{1, 2\}$. WÓWCZAS
$X_1 {}_{f_1}\!\times_{f_2} X_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$
$\overset{\shortparallel}{X_1} \times_Y X_2 \subset X_1 \times X_2$.

Fakt: ILEKROĆ f_1 LUB f_2 JEST SURJEKTYWNĄ SUBMERSJĄ, $X_1 \times_Y X_2$ JEST PODROZMAITOŚCIĄ $X_1 \times X_2$.

ORAZ RODZINĘ ODWZOROWAŃ KLASY C^∞

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \times \mathbb{V} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{V} \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}}"] \\ \mathbb{V} \arrow[r, "\pi_{\mathbb{V}}"'] & B \end{tikzcd}$$

$\lambda : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ (DZIAŁANIE CIAŁA SKALARÓW $\mathbb{K}$)

o $\mathbb{K}$-liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^r : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r}$ w rozumieniu diagramu przemiennego

$$(9) \qquad \begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{L}_\lambda"] \arrow[d, "\tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r} \arrow[r, "\ell^r_\lambda"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r} \end{tikzcd} .$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\operatorname{rk} \mathbb{V}$. Ilekroć $\operatorname{rk} \mathbb{V} = 1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, rightsquigarrow] & L \arrow[d, "\pi_L"] \\ & B \end{tikzcd} .$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^∞)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}} : B \longrightarrow \mathbb{V} : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \mathbf{0}^r), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej $\mathbb{V}$. Jest ono cięciem globalnym $\mathbb{V}$ w rozumieniu Uwagi 1, przy czym zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{V})$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(\mathbb{V})$ niosą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(B, \mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa rzędu $s \leq r$ wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ to podwiązka $(\mathbb{W}, B, \mathbb{K}^{\times s}, \pi_{\mathbb{V}} \restriction_{\mathbb{W}})$ tejże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jej włókno $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{V}_x$ jest podprzestrzenią $\mathbb{K}$-liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (nad ciałem $\mathbb{K}$) $(\mathbb{V}_\alpha, B_\alpha, \mathbb{K}^{\times r_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $r_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{1,2\}$ to dwójka (Φ, f) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) \;:\; (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times r_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times r_2}, \pi_{\mathbb{V}_2}),$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x \in B_1$,

(10) $$\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}} \;:\; \mathbb{V}_{1\,x} \longrightarrow \mathbb{V}_{2\,f(x)},$$

jest odwzorowaniem $\mathbb{K}$-liniowym.

E.g.,

(1) TRYWIALNA WIĄZKA WEKTOROWA: $(B\times\mathbb{K}^{\times r}, B, \mathbb{K}^{\times r}, pr_1)$ O OCZYWISTEJ STRUKTURZE LINIOWEJ (WPROST Z $\mathbb{K}^{\times r}$).

(2) WSTĘGA MÖBIUSA ∞ SZEROKOŚCI.

(3) $(TM, M, \mathbb{R}^{\times \dim M}, \pi_{TM})$

$$\begin{tikzcd} TM_1 \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi_{TM_1}"'] & TM_2 \arrow[d, "\pi_{TM_2}"] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

(Tf, f) - MORFIZM WIĄZEK WEKTOROWYCH

JEDNĄ Z FUNDAMENTALNYCH (WRĘCZ NISKOPOZIOMOWYCH – NA POZIOMIE PEWNIKA WYBORU) WYNIKÓW TEORII PRZESTRZENI LINIOWYCH JEST TWIERDZENIE O ISTNIENIU BAZY, CZYLI – NIECO BARDZIEJ ABSTRAKCYJNIE – IZOMORFIZMU Z MODELOWĄ PRZESTRZENIĄ WEKTOROWĄ. JEGO GEOMETRYCZNYM ODPOWIEDNIKIEM JEST PONIŻSZE

Tw. 9. Przyjmijmy oznaczenia Def. 14. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ i zbiorami r nigdzie nieznikających cięć lokalnych definiującymi nad każdym punktem bazy $x \in B$ (w ich wspólnym nośniku) r wektorów liniowo niezależnych $\sigma^k(x)$, $k \in \overline{1, r}$ w odnośnych włóknach $\mathbb{V}_x$. W szczególności wiązka wektorowa jest globalnie trywialna, tj. izomorficzna z wiązką $(B \times \mathbb{K}^{\times r}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \mathrm{pr}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje r jej cięć globalnych o tej własności.

D: $\boxed{\rightarrow}$ NIECHAJ $\tau : B\times\mathbb{K}^{\times r} \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}$ BĘDZIE TRYWIALIZACJĄ,

$$\begin{tikzcd} B\times\mathbb{K}^{\times r} \arrow[r, "\sim"', "\tau"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathbb{V} \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}}"] \\ B \arrow[r, equal, "(\mathrm{id}_B)"'] & B \end{tikzcd}$$

(ROZWAŻANIA PROWADZIMY DLA UPROSZCZENIA NAD B, ZAMIAST CZYNIĆ TO NAD $O\in\mathcal{T}(B)$.)

A WÓWCZAS τ-OBRAZEM ZBIORU $\varepsilon_a : B \to B\times\mathbb{K}^{\times r}$, $a\in\overline{1,r}$
$: x \longmapsto (x, e_a)$
LNZ CIĘĆ WIĄZKI TRYWIALNEJ, ZADANEGO PRZEZ WYBÓR $\{e_a\}_{a\in\overline{1,r}}$ BAZY W MODELU $\mathbb{K}^{\times r}$, JEST GŁADKO INDEKSOWANA PRZEZ $B\ni x$ RODZINA BAZ WE WŁÓKNACH $\mathbb{V}_x \ni (\tau\circ\varepsilon_a)(x)$. ISTOTNIE, τ JEST WERTYKALNE: $\pi_{\mathbb{V}}\big((\tau\circ\varepsilon_a)(x)\big)=x$, PRZETO $\tau\circ\varepsilon_a \in \Gamma(\mathbb{V})$, A NADTO – LINIOWO i ODWRACALNE

W OGRANICZENIU DO WŁÓKNA (IZOMORFICZNYM OBRAZEM UKŁADU LNZ JEST UKŁAD LNZ!).

I ODWROTNIE: NIECHAJ $\sigma_a \in \Gamma(\mathbb{V}), a \in \overline{1,r}$ BĘDZIE UKŁADEM CIĘĆ $\mathbb{V}$, O KTÓRYM MOWA W TREŚCI STWIERDZENIA. DOWOLNY WYBÓR BAZY: $\{e_a\}_{a\in\overline{1,r}}$ W MODELU $\mathbb{K}^{\times r}$ DAJE NAM WÓWCZAS DO DYSPOZYCJI DEFINICJĘ ODWZOROWANIA (JAWNIE GŁADKIEGO)

$$\Phi : B \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{V}, \quad (x, v^a \triangleright e_a) \longmapsto v^a \triangleright \sigma_a(x).$$

W OBRAZIE DOWOLNEJ LOKALNEJ TRYWIALIZACJI (NAD $\mathcal{O} \ni x$)

$$\tau : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times r}$$

$\mathcal{O} \overset{\circ}{\subset} (B)$

10

OTRZYMUJEMY

$$\tau \circ \Phi(x, v^a \triangleright e_a) = (x, v^a \varepsilon_a{}^b(x) \triangleright e_b)$$

DLA PEWNYCH $\varepsilon_a{}^b : \mathcal{O} \to GL(r, \mathbb{K})$. (ISTOTNIE: $\{\sigma_a(x)\}_{a \in \overline{1,r}}$ JEST BAZĄ W W_x, ZATEM $\{pr_2 \circ \tau \circ \sigma_a(x)\}_{a \in \overline{1,r}}$ JEST BAZĄ W $pr_2 \circ \tau(W_x) \cong \mathbb{K}^{\times r}$, MAMY PRZETO ODWRACALNĄ TRANSFORMACJĘ BAZY $(\varepsilon_a{}^b(x))_{a \in \overline{1,r}}^{b \in \overline{1,r}}$.)

W NATURALNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH (LOKALNYCH) ZADAWANYCH PRZEZ τ i MAPĘ LOKALNĄ NA $\mathcal{O}$ ODWZOROWANIE Φ JEST W OCZYWISTY SPOSÓB GŁADKO ODWRACALNE (WSZAK ODWRACALNE

111

MACIERZY $\left(\varepsilon_a{}^b(\cdot)\right)^{b\in\overline{1,r}}_{a\in\overline{1,r}}$ JEST OPERACJĄ ALGEBRAICZNĄ, WIĘC GŁADKO ZALEŻNĄ OD ARGUMENTU $x\in B$, OD KTÓREGO SAMA MACIERZ ZALEŻY WPROST Z KONSTRUKCJI GŁADKO. ZALEŻNOŚĆ OD WSPÓŁRZĘDNYCH v^a WE WŁÓKNIE JEST LINIOWO ODWRACALNA, WIĘC TAKŻE GŁADKA.) TO OZNACZA, ŻE $\Phi|_{\theta} \in \mathrm{Diff}(\theta\times\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}|_{\theta})$, ZATEM – WOBEC DOWOLNOŚCI – WYBORU θ (i τ) TAKŻE $\Phi \in \mathrm{Diff}(B\times\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V})$. $\square$

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI WYKORZYSTAMY Tw. 8. O WYSPRZĘGLANIU DO GEOMETRYZACJI ROZMAITYCH KONSTRUKCJI ALGEBRY LINIOWEJ, PRZYDATNYCH W ANALIZIE NA ROZMAITOŚCIACH...

1° **SUMA WHITNEYA** WIĄZEK WEKTOROWYCH $(\mathbb{V}_a, B, \mathbb{K}^{\times r_a}, \pi_{\mathbb{V}_a})$, $a \in \{1,2\}$

TO WIĄZKA WEKTOROWA $\begin{array}{c} \mathbb{K}^{\times r_1+r_2} \hookrightarrow \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \\ \downarrow \\ B \end{array}$ O 1-KOCYKLU

$g^{(a)}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \to GL(r_a, \mathbb{K})$

PRZEJŚCIA $g^{\oplus}_{ij} := g^{(1)}_{ij} \oplus g^{(2)}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \to GL(r_1, \mathbb{K}) \oplus GL(r_2, \mathbb{K})$

$\subsetneq GL(r_1 + r_2, \mathbb{K})$

CZYLI $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \simeq \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{K}^{\times r_1} \oplus \mathbb{K}^{\times r_2}) / \sim_{g^{\oplus}_{ij}}$, TJ.

$$(x, v_1, v_2, j) \sim (x, g^{(1)}_{ij}(x)(v_1), g^{(2)}_{ij}(x)(v_2), i).$$

2° **WIĄZKA DUALNA** DO $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ TO WIĄZKA WEKTOROWA $\begin{array}{c} \mathbb{V}^* \hookleftarrow (\mathbb{K}^{\times r})^* \cong \mathbb{K}^{\times r} \\ \downarrow \\ B \end{array}$ O 1-KOCYKLU PRZEJŚCIA

$(g_{ij}(\cdot)^{-1})^*$, TJ.

$$\mathbb{V}^* \simeq \bigsqcup_{i\in I} \Theta_i \times \mathbb{K}^{\times r} /\sim \quad : \quad (x, \varphi, j) \sim (x, (g_{ij}(x)^{-1})^* \varphi, i)$$

$$\varphi \in (\mathbb{K}^{\times r})^* \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{K}), \qquad (g_{ij}(x)^{-1})^*\varphi \equiv \varphi \circ g_{ij}(x)^{-1}$$

POWYŻSZA DEFINICJA NADAJE SENS DUALNOŚCI WŁÓKNO PO WŁÓKNIE :

$$\underbrace{\langle [(x,\varphi,j)]_\sim}_{\bigsqcup_{i\in I}\Theta_i\times\mathbb{K}^{\times r}/\sim}, \underbrace{[(x,v,j)]_\sim}_{\bigsqcup_{i\in I}\Theta_i\times\mathbb{K}^{\times r}/\sim_{g_{ij}}}\rangle := \varphi(v)$$

$$\equiv \quad \equiv \checkmark$$

$$\langle [(x, g_{ij}(x)^{-1*}\varphi, i)]_\sim, [(x, g_{ij}(x)(v), i)]_\sim \rangle = (g_{ij}(x)^{-1*}\varphi)(g_{ij}(x)(v)).$$

114

3° **WIĄZKA WYZNACZNIKOWA** WIĄZKI $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$

TO WIĄZKA LINIOWA (!) $\det \mathbb{V} \rightsquigarrow \mathbb{K}$
$$\downarrow$$
$$B$$

O 1-KOCYKLU PRZEJŚCIA

$\det \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times}$, CZYLI $\det \mathbb{V} \simeq \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}) / \sim_{\det \circ g_{ij}}$

TJ. $(x, \lambda, j) \sim (x, \det g_{ij}(x) \cdot \lambda, i)$.

NIGDZIE NIE ZNIKAJĄCE CIĘCIE GLOBALNE $\det \mathbb{V}$ OKREŚLAMY MIANEM **ORIENTACJI NA** $\mathbb{V}$.

(PRZYP.: $\det \in \Lambda^{\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}} \mathbb{V}^* \setminus \{0\} \longleftrightarrow$ BAZA UPORZĄDKOWANA: $\{e_a\}_{a \in \overline{1,D}}$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} \overset{!!}{=} D$, $\quad \det(e_1, e_2, \ldots, e_D) \doteq 1$) $\hookrightarrow$ „ORIENTACJA"

115

ISTOTNĄ ROLĘ W GEOMETRII FIZYCZNEJ ODGRYWAJĄ CIĘCIA RÓŻNYCH WIĄZEK TENSORÓW typu (m,n):

$T \in \Gamma(TM^{\otimes m} \otimes T^*M^{\otimes n})$, w szczególności

4° METRYKA NA $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ TO $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*)$,

GDZIE $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* \simeq \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{K}^{\times r} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times r}) / \sim_{g_{ij}(\cdot)^{-1*} \otimes g_{ij}(\cdot)^{-1*}}$,

O WŁASNOŚCI: $g(x) \in \mathbb{V}_x^* \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_x^*$ jest FORMĄ 2-LINIOWĄ SYMETRYCZNĄ NIEZWYRODNIAŁĄ. W szczególności w PRZYPADKU $\mathbb{V} = TM$ MÓWIMY O METRYCE NA ROZMAITOŚCI M.

PARĘ (M, g) OKREŚLAMY WÓWCZAS MIANEM STRUKTURY METRYCZNEJ LUB ROZMAITOŚCI METRYCZNEJ.

MAMY:

TW. 10. DOWOLNA WIĄZKA WEKTOROWA (więc także dowolna rozmaitość!!) JEST RIEMANNOWSKO (!) METRYZOWALNA.

D: WYKORZYSTUJEMY MODELE LOKALNE

$$\tau_i : \mathbb{V}|_{O_i} \xrightarrow{\cong} O_i \times \mathbb{K}^{\times r}$$

I STOWARZYSZONE Z $\{O_i\}_{i\in I}$ C^∞ ROZKŁADY JEDNOŚCI $\{\varrho_i\}_{i\in I}$.

DEFINIUJEMY METRYKI MODELOWE (INDUKOWANE Z METRYKI EUKLIDESOWEJ $\delta_E^{(r,0)} : \mathbb{K}^{\times r} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{\times r} \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ NA MODELU):

$$O_i \ni x \longmapsto g_i(x) : \mathbb{V}_x \times \mathbb{V}_x \to \mathbb{K}, \quad (v_1, v_2) \longmapsto \delta_E^{(r,0)}\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(v_1), \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(v_2)\big),$$

A NASTĘPNIE „KLEIMY"

$$g(\cdot)(\cdot,\cdot) := \sum_{i\in I} \underbrace{\varrho_i(\cdot)}_{\geq 0!!!} \triangleright g_i(\cdot)(\cdot,\cdot).$$ □

POWYŻSZA ABSTRAKCYJNA KONSTRUKCJA WIĄZKI DUALNEJ V^* W PRZYPADKU $V = TM$ DOMAGA SIĘ ODNIESIENIA DO WYJŚCIOWEJ GEOMETRYCZNEJ KONSTRUKCJI PRZESTRZENI TOTALNEJ TM JAKO ROZMAITOŚCI RUCHÓW LOKALNYCH W BAZIE M...

PRZYPOMNIJMY: W KONSTRUKCJI $TM = \bigsqcup_{m \in M} P_m$ WPROWADZILIŚMY RELACJĘ RÓWNOWAŻNOŚCI (WSPÓŁ-STYCZNOŚCI) NA ZBIORZE LOKALNYCH KRZYWYCH $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ PRZEZ $m \in M$: $T_m M \equiv P_m \ni [\gamma]_{\sim_m}$. PRZY TYM DEFINICJA RELACJI POZWOLIŁA STOWARZYSZYĆ Z JEJ KLASAMI ABSTRAKCJI RÓŻNICZKOWANIA W PUNKCIE $m \in M$

ALGEBRY FUNKCJI GŁADKICH: $D_{[\gamma]_{\sim m}} : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto D(f\circ\gamma)(0)$.

NA PRAWACH POMOCNEJ HEUREZY MOŻEMY MYŚLEĆ O FUNKCJACH JAKO OBIEKTACH „DUALNYCH" DO PUNKTÓW/KRZYWYCH,

$$(f\circ\gamma)(0) = ev_{\gamma(0)}(f) \;:\; f \overset{*}{\sim} \gamma(0),$$

CO PROWADZI NAS WPROST DO DEFINICJI KO-WEKTORÓW, CZYLI WEKTORÓW KO-STYCZNYCH W m JAKO KLAS WSPÓŁ-KO-STYCZNOŚCI... FUNKCJI WŁAŚNIE, OKREŚLONYCH PRZY UŻYCIU DOWOLNYCH... KRZYWYCH LOKALNYCH: TJ. KLAS ABSTRAKCJI WZGL. RELACJI WSPÓŁ-KO-STYCZNOŚCI w m:

$$\forall f_1,f_2 \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}) : f_1 \sim_m f_2 \overset{ex}{\underset{Def}{\Longleftrightarrow}} \forall \underset{\gamma(0)=m}{\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to M} : D(f_2\circ\gamma)(0) = D(f_1\circ\gamma)(0)$$

KLASĘ WSPÓŁ-KO-STYCZNOŚCI FUNKCJI $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ OZNACZAMY SYMBOLEM $df(m) \equiv [f]_{\sim m}$ I NAZYWAMY KOWEKTOREM W m LUB WEKTOREM KOSTYCZNYM W m, LUB – HOMERYCKO – RÓŻNICZKĄ FUNKCJI W m. ZBIÓR TAKICH KLAS:

$$T_m^* M = \{ [f]_{\sim m} \mid f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \}$$

NAZYWAMY PRZESTRZENIĄ KOSTYCZNĄ (DO M) W m.

OTRZYMUJEMY ROZMAITOŚĆ RÓŻNICZEK/KOSTYCZNĄ

$$T^* M := \bigsqcup_{m \in M} T_m^* M .$$

ROZUMUJĄC ANALOGICZNIE JAK W PRZYPADKU PRZESTRZENI STYCZNEJ...

ROZUMUJĄC ANALOGICZNIE JAK W PRZYPADKU POCHODNYCH KIERUNKOWYCH LOKALNYCH $TM = \bigsqcup_{m \in M} P_m$, DOCHODZIMY BEZ TRUDU DO NASTĘPUJĄCYCH WNIOSKÓW:

(i) T^*M NIESIE – WŁÓKNO PO WŁÓKNIE (NAD M) – NATURALNĄ STRUKTURĘ $\mathbb{R}$-LINIOWĄ (OKREŚLONĄ NA REPREZENTANTACH KLAS);

(ii) NA T^*M JEST DOBRZE OKREŚLONY RZUT NA BAZĘ

$$\pi_{T^*M} : T^*M \longrightarrow M, \quad (m, [f]_{\sim m}) \longmapsto m;$$

(iii) ATLAS $[(\Theta, \kappa)]$ NA M INDUKUJE NA T^*M RODZINĘ <u>MAP NATURALNYCH</u>, KTÓRE POZWALAJĄ

121

STOPOLOGIZOWAĆ ZBIÓR T^*M I WYPOSAŻYĆ GO (TAUTOLOGICZNIE) W STRUKTURĘ GŁADKĄ ORAZ STRUKTURĘ WIĄZKI WEKTOROWEJ NAD BAZĄ M. ISTOTNIE, MAJĄC MAPY LOKALNE

$$(x^\mu)^{\mu\in\overline{1,n}} \equiv \kappa_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{\times n}, \quad n = \dim M, \quad i \in I,$$

DEFINIUJEMY NA $T^*M\restriction_{\mathcal{O}_i} \equiv \bigsqcup_{m\in\mathcal{O}_i} T^*_m M$ BIJEKCJĘ

$$\check{\kappa}_i : T^*M\restriction_{\mathcal{O}_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n}, \quad (m,[f]_{\sim_m}) \longmapsto \Big(\kappa_i(m), \big(D(f\circ\gamma_\mu)(0)\big)_{\mu\in\overline{1,n}}\Big)$$

PRZY UŻYCIU KRZYWYCH-PROSTYCH WSPÓŁRZĘDNIOWYCH: $\quad =: p_\mu([f]_\sim)$

$$\gamma_\mu : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \ni t \longmapsto \kappa_i^{-1}\big(\underbrace{\kappa_i(m) + t \triangleright e_\mu}_{\in\, \mathcal{U}_i}\big) \in \mathcal{O}_i$$

Jak łatwo widać,

$$D(\kappa_i \circ \gamma_\mu)(0) \equiv e_\mu$$

$$D(f \circ \gamma_\mu)(0) \equiv D\big((f \circ \kappa_i^{-1}) \circ (\kappa_i \circ \gamma_\mu)\big)(0) = D(f \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(m))(e_\mu)$$

$$\equiv \partial_\mu(m) f \left(\equiv \frac{\partial (f \circ \kappa_i^{-1})}{\partial x^\mu}(\kappa_i(m)) \right),$$

NB: Ustalenie pochodnych kierunkowych $\partial_\mu(m) f$, $\mu \in \overline{1,n}$ w pełni określa $D(f \circ \gamma)(0)$ $\forall \gamma$!

Powyższy rachunek pozwala już wprost wyznaczyć składowe z włókna odwzorowań przejścia między mapami naturalnymi...

AŻEBY JE SPRAWNIE OBLICZYĆ, WPROWADZAMY BAZĘ $\{\varphi^\mu\}_{\mu\in\overline{1,n}}$ DUALNĄ DO $\{e_\mu\}_{\mu\in\overline{1,n}}$, TJ., $\varphi^\mu(e_\nu)=\delta^\mu{}_\nu$, I PRZEPISUJEMY TRYWIALIZACJĘ NATURALNĄ

$$\check{\tau}_i : T^*M\restriction_{\mathcal{O}_i} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times\mathbb{R}^{\times n},\quad (m,[f]_{\sim m})\longmapsto \big(m,(D(f\circ\gamma_\mu)(0))_{\mu\in\overline{1,n}}\big)$$

W POSTACI

$$\check{\tau}_i(m,[f]_{\sim m})\equiv\big(m,D(f\circ\gamma_\mu)(0)\,\varphi^\mu\big)\equiv\big(m,D(f\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(m))\big),$$

A STĄD TAKŻE

$$\check{\tau}_i\circ\check{\tau}_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij}\times\mathbb{R}^{\times n} \circlearrowleft$$

$$: \big(m,D(f\circ\kappa_j^{-1})(\kappa_j(0))\big)\longmapsto\big(m,D(f\circ\kappa_j^{-1})(\kappa_j(m))\circ D(\kappa_j\circ\kappa_i^{-1})(\kappa_i(m))\big)$$

$$\equiv\big(m,\big(D(\kappa_i\circ\kappa_j^{-1})(\kappa_j(m))^{-1}\big)^* D(f\circ\kappa_j^{-1})(\kappa_j(m))\big). \quad (124)$$

TEN OSTATNI WYNIK POKAZUJE TOŻSAMOŚĆ (KLASY IZOMORFIZMU) NASZEJ KONSTRUKCJI GEOMETRYCZNEJ Z (KLASĄ TOŻSAMOŚCI) WCZEŚNIEJSZEJ KONSTRUKCJI ABSTRAKCYJNEJ NA PODSTAWIE TWIERDZENIA O WYSPRZĘGLANIU !

W OTRZYMANEJ TYM SPOSOBEM PREZENTACJI T^*M, A W POŁĄCZENIU Z WCZEŚNIEJSZĄ PREZENTACJĄ TM, MOŻEMY ZAPISAĆ DWOISTOŚĆ

$$
\begin{aligned}
\left\langle df(m), [\gamma]_{\sim_{\underset{\Theta_i}{\underset{\uparrow}{m}}}} \right\rangle &= D(f \circ \gamma)(0) \\
&= D(f \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(m)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma)(0) \\
&= \partial_\mu(m) f \cdot \frac{d(x^\mu \circ \gamma)}{d\tau}(0)
\end{aligned}
$$

RZECZ JASNA, NASZA KONSTRUKCJA KOWEKTORÓW (W PUNKCIE) PRODUKUJE FUNKCJĘ NA (DOW. MAŁYM) OTOCZENIU OTWARTYM (TEGOŻ PUNKTU), MA PRZETO SENS STWIERDZENIE, ŻE FUNKCJE (LOKALNIE) GŁADKIE (TAUTOLOGICZNIE)

$$x^\mu := pr_\mu \circ \kappa_i : \mathcal{O}_i \to \mathbb{R}$$

ZADAJĄ KOWEKTORY DUALNE DO RÓŻNICZKOWAŃ WSPÓŁRZĘDNIOWYCH:

$[\gamma_\nu]_m$

$$\langle dx^\mu(m), \partial_\nu(m) \rangle \equiv D(x^\mu \circ \kappa_i^{-1})(\kappa_i(m))(e_\nu) \equiv pr_\mu(e_\nu) = \delta^\mu{}_\nu .$$

OTRZYMUJEMY WIĘC NATURALNĄ BAZĘ T_m^*M DUALNĄ DO $\{\partial_\mu(m)\}_{\mu \in \overline{1,n}}$, A MIANOWICIE $\{dx^\mu(m)\}^{\mu \in \overline{1,n}}$.

BAZA TA OKREŚLA NATURALNY LOKALNY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA T^*M, W KTÓRYM IDENTYFIKUJEMY GŁADKIE CIĘCIA T^*M JAKO TE, KTÓRYCH (FUNKCYJONALNE) WSPÓŁCZYNNIKI ROZKŁADU W BAZIE dx^μ SĄ GŁADKIE. CIĘCIA TE OKREŚLAMY MIANEM PÓL KOWEKTOROWYCH. POŚRÓD NICH ODNAJDUJEMY

Def. 15. RÓŻNICZKA FUNKCJI $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ TO POLE KOWEKTOROWE

$$df : M \ni \underset{\mathcal{O}_i}{\hat{m}} \longmapsto \partial_\mu(m) f \triangleright dx^\mu(m)$$

$$\equiv \underbrace{\frac{\partial (f \circ \kappa_i^{-1})}{\partial x^\mu}}_{\in C^\infty(\mathcal{U}_i, \mathbb{R})}(\kappa_i(m)) \triangleright dx^\mu(m)$$

NB: (i) $f \longmapsto df$ $\mathbb{R}$-LINIOWE,

w szczególności: $d(\text{const}) = 0$

(ii) $d(f \cdot g) = f \triangleright dg + g \triangleright df$ (LEIBNIZ)

NA ZAKOŃCZENIE TEJ CZĘŚCI WYKŁADU OMÓWIMY JESZCZE NATURALNY TRANSPORT PÓL KOWEKTOROWYCH WZDŁUŻ ODWZOROWAŃ GŁADKICH...

NIE SPOSÓB WPRAWDZIE DUALIZOWAĆ WPROST – PUNKT PO PUNKCIE – TRANSPORT STYCZNY $T_m f$, $m \in M_1$ (DLA $f: M_1 \to M_2$), GDYŻ DLA f <u>NIE</u>INIEKTYWNEGO,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] m_1 \bullet \arrow[dr, mapsto] & \\ & \bullet\, f(m_2)=f(m_1) \\ m_2 \bullet \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd},$$

NATRAFIAMY NA

$$(T_{m_1} f)^* : T^*_{f(m_1)} M_2 \longrightarrow T_{m_1} M_1$$

$$|||$$

$$(T_{m_2} f)^* : T^*_{f(m_2)} M_2 \longrightarrow T_{m_2} M_1$$

, CZYLI „$(Tf)^*$" <u>NIE</u> JEST „ODWZOROWANIEM"...

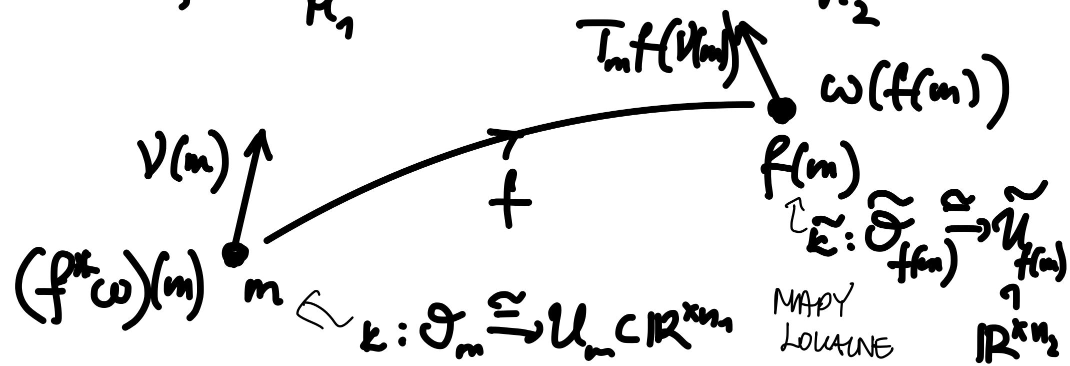
MOŻEMY JEDNAKOWOŻ POSŁUŻYĆ SIĘ Tf SPRYTNIE, TJ., UŻYWAJĄC DWOISTOŚCI:

$$f^* : \Gamma(T^*M_2) \longrightarrow \Gamma(T^*M_1)$$

$$: \omega \longmapsto f^*\omega$$

WEDLE SCHEMATU

$$\langle f^*\omega, V\rangle_{M_1} := \langle \omega, Tf\circ V\rangle_{M_2}$$



BEZ TRUDU WYZNACZAMY (FUNKCYJONALNE) WSPÓŁCZYNNIKI ROZKŁADU $f^*\omega$ W LOKALNEJ BAZIE WSPÓŁRZĘDNIOWEJ NA OTOCZENIU $\mathcal{O}_m \ni m$: (129)

$$\langle f^*\omega, \partial_\mu \rangle(m) \equiv \Big\langle \underset{\substack{\shortparallel \\ \omega_\beta(f(m))\, dy^\beta(f(m))}}{\omega(f(m))}, \frac{\partial(\tilde{\kappa}\circ f\circ \kappa^{-1})^\alpha}{\partial x^\mu}(\kappa(m))\, \partial_\alpha(f(m)) \Big\rangle$$

$$\partial_\alpha(f(m)) \equiv \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(f(m)), \qquad \tilde{\kappa} = (y^\alpha)^{\alpha\in\overline{1,m_2}}$$

$$= \omega_\alpha(f(m))\, \frac{\partial(\tilde{\kappa}\circ f\circ \kappa^{-1})^\alpha}{\partial x^\mu}(\kappa(m))$$

$$\Downarrow$$

$$(f^*\omega)(m) = \omega_\alpha(f(m))\, \frac{\partial(\tilde{\kappa}\circ f\circ \kappa^{-1})^\alpha}{\partial x^\mu}(\kappa(m)) \triangleright dx^\mu(m)$$

GŁADKA ZALEŻNOŚĆ OD m!

$$\Downarrow$$

$f^*\omega \in \Gamma(T^*M_1)$, JAKO SIĘ RZEKŁO!

CZĘŚĆ VII

CDN.