DE ÆMULATIONIBUS REVOLUTIONUM
(MAWF '25/26 1.XIII & 1.XIV [RRS])

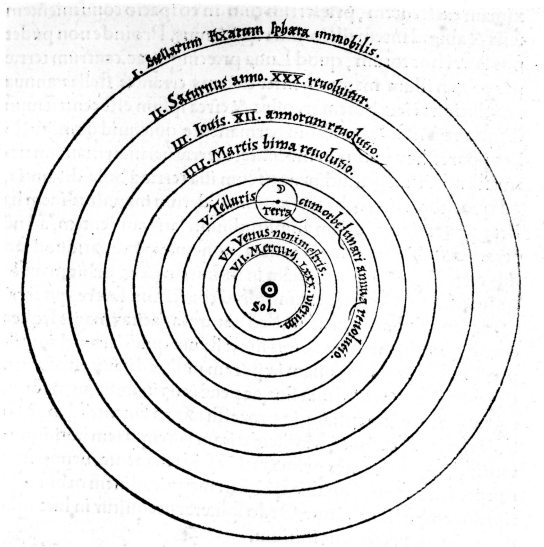

FIG. 1. „To kłamstwo! Kopernik była kobietą!"

SPIS TREŚCI

1. CLIFFORDOWSKIE REALIZACJE IZOMETRII

W niniejszym cyklu wykładów zajmiemy się szczegółową rekonstrukcją funktorialnego podniesienia izometrycznych automorfizmów przestrzeni kwadratowej (V, Q) do jej algebry Clifforda $\mathrm{Cliff}(V, Q)$, co doprowadzi nas ostatecznie do identyfikacji – w odwołaniu do prezentacji grupy ortogonalnej w terminach generatorów (i relacji), którą precyzuje Twierdzenie Cartana–Dieudonnégo – podgrupy w algebrze Clifforda implementującej na kanonicznie zanurzonej w $\mathrm{Cliff}(V, Q)$ wyjściowej przestrzeni V (poprzez ograniczenie doń odnośnych automorfizmów) transformacje ortogonalne. Nasze dociekania rozpoczniemy od

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Multyplikatywna grupa jedności** algebry Clifforda to zbiór

$$\mathrm{Cliff}(V,Q)^{\times} := \left\{ \gamma \in \mathrm{Cliff}(V,Q) \quad | \quad \exists_{\gamma^{-1} \in \mathrm{Cliff}(V,Q)} \; : \; \gamma.\gamma^{-1} = e^{\mathrm{C}} = \gamma^{-1}.\gamma \right\}$$

odwracalnych elementów $\mathrm{Cliff}(V, Q)$ ze strukturą grupy indukowaną z tejże algebry unitalnej (tj. w szczególności z operacją binarną daną przez mnożenie w algebrze Clifforda). **Reprezentacja**

dołączona tej grupy to homomorfizm grup

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{\cdot} \quad &: \quad \mathrm{Cliff}(V,Q)^{\times} \longrightarrow \mathcal{I}nn\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big) \\ &: \quad u \longmapsto \big(\ \mathrm{Cliff}(V,Q) \ni \gamma \longmapsto u.\gamma.u^{-1} \equiv \mathrm{Ad}_u(\gamma)\ \big)\,. \end{aligned}$$

Bywa on także nazywany **reprezentacją wektorową** $\mathrm{Cliff}(V,Q)^{\times}$.

W bezpośrednim nawiązaniu do uwagi wprowadzającej wysławiamy

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnego wektora nieizotropowego $v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ i dowolnego wektora $w \in V$ spełniona jest tożsamość

$$-\mathrm{Ad}_v(w) = w - 2\,\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v\,,$$

więc też – w szczególności –

$$\mathrm{Ad}_v(V) = V\,,$$

przy czym utożsamiliśmy – jak zwykle – przestrzeń V z jej monomorficznym obrazem w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$.

Dowód: Odwrotność wektora nieizotropowego v w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to

$$v^{-1} = Q(v)^{-1} \triangleright v\,,$$

stąd

$$-Q(v) \triangleright \mathrm{Ad}_v(w) = -v.w.v \equiv -v.\{w,v\} + v^2.w = -2\Phi_Q(w,v) \triangleright v + Q(v) \triangleright w\,.$$

□

Uwaga 1. Działanie dołączone w ograniczeniu (obustronnym) do $V \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)$ realizuje superpozycje przeciwności (odbicia wzgl. wektora zerowego) z odbiciami w płaszczyznach ortogonalnych (wzgl. Q) do wektorów nieizotropowych.

Powyższe obserwacje prowadzą nas wprost do

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i dla

$$V^{\times} := V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$$

zdefiniujmy grupę

$$P(V,Q) := \langle v \in V^{\times} \rangle \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)^{\times}\,, \tag{1}$$

tj. grupę generowaną multyplikatywnie (wzgl. mnożenia indukowanego z algebry $\mathrm{Cliff}(V,Q)$) przez wektory nieizotropowe. Reprezentacja dołączona $\mathrm{Cliff}(V,Q)^{\times}$ na $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ ogranicza się do reprezentacji

$$\underline{\mathrm{Ad}}_{\cdot} \ : \ P(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q) \ : \ u \longmapsto \mathrm{Ad}_u{\restriction}_{V \subset \mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

Dowód: Homomorficzność $\underline{\mathrm{Ad}}_{\cdot}$ jest oczywista,

$$\forall_{u_1,u_2 \in P(V,Q)} \ : \ \underline{\mathrm{Ad}}_{u_1.u_2} = \underline{\mathrm{Ad}}_{u_1} \circ \underline{\mathrm{Ad}}_{u_2}\,,$$

pozostaje zatem tylko sprawdzić, że endomorfizm $\underline{\mathrm{Ad}}_u$ zachowuje formę kwadratową Q, co czynimy – dla dowolnych $v \in V \setminus Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ i $w \in V$ – w bezpośrednim rachunku odwołującym się do Stw. 1,

$$\begin{aligned} Q \circ \underline{\mathrm{Ad}}_v(w) \quad &\equiv \quad Q(v.w.v^{-1}) = Q(-v.w.v^{-1}) = Q\big(w - 2\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v\big) \\ &\equiv \quad \Phi_Q\big(w - 2\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v, w - 2\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \triangleright v\big) \\ &= \quad \Phi_Q(w,w) - 4\tfrac{\Phi_Q(w,v)}{Q(v)} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(w,v) + 4\tfrac{\Phi_Q(w,v)^2}{Q(v)^2} \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v,v) \end{aligned}$$

$$= \quad Q(w)\,.$$

□

Reprezentacja dołączona, jakkolwiek przydatna przy wyrabianiu sobie pewnych elementarnych intuicji algebraicznych i geometrycznych, z których skorzystamy w dalszej części wywodu, ma jedną istotną niedoskonałość: Oto jej ograniczenie $\underline{\mathrm{Ad}}_{\cdot}$ nie zawiera w ogólności transformacji zmieniających orientację V na przeciwną, czyli – w świetle Tw. Cartana–Dieudonnégo 2 – zbioru generującego grupę $\mathrm{O}(V,Q)$, której emulacja jest naszym celem. Istotnie, w przypadku $\dim_{\mathbb{K}} V = 2n+1 \in 2\mathbb{N}+1$ endomorfizm Ad_v, $v \in V^\times$ odwzorowuje wektor v w siebie, $\mathrm{Ad}_v(v) = v$, a dowolny wektor $w \in \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$ – w wektor przeciwny, $\mathrm{Ad}_v(w) = -w$, co oznacza, że wyznacznik tego endomorfizmu ma wartość $\det \mathrm{Ad}_v = 1\cdot(-1)^{2n} = 1$. Ażeby naprawić tę niedoskonałość, musimy w naszej rekonstrukcji funktorialnego podniesienia automorfizmów przestrzeni kwadratowej wyjść poza zbiór automorfizmów wewnętrznych, co czynimy w następnej

Definicja 2. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Reprezentacja dołączona zwichrowana** multyplikatywnej grupy jedności algebry Clifforda, zwana także **reprezentacją J_V-wektorową** multyplikatywnej grupy jedności, to homomorfizm grup

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\cdot} \quad &: \quad \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Cliff}(V,Q)\big)\\ &: \quad u \longmapsto \Big(\ \mathrm{Cliff}(V,Q) \ni \gamma \longmapsto J_V(u).\gamma.u^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_u(\gamma)\ \Big)\,.\end{aligned}$$

Reprezentacja ta pozwala wyróżnić grupę

$$\Gamma(V,Q) := \Big\{\ u \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^\times \quad \Big|\quad \widetilde{\mathrm{Ad}}_u(V) = V\ \Big\} \supset P(V,Q)\,,$$

określaną mianem **grupy Clifforda**.

Punktu wyjścia do analizy grupy Clifforda dostarcza

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\big(\big((V,+_V,\mathsf{P}_V,\bullet \longmapsto 0_V),\ell_V\big),Q\big)$ będzie niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot} \ :\ \Gamma(V,Q) \longrightarrow \mathrm{GL}(V;\mathbb{K}) \equiv \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) \ :\ u \longmapsto \widetilde{\mathrm{Ad}}_u{\restriction}_{V\subset \mathrm{Cliff}(V,Q)}\,.$$

zadaje ciąg dokładny grup

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{K}^\times \longrightarrow \Gamma(V,Q) \xrightarrow{\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}} \mathrm{GL}(V;\mathbb{K})\,, \tag{2}$$

w którym

$$\mathbb{K}^\times \equiv \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$$

jest multyplikatywną grupą niezerowych elementów ciała $\mathbb{K}$.

Dowód: Przynależność do jądra $\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}$ (obrazów) elementów $\mathbb{K}^\times$ jest rzeczą oczywistą,

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{K}^\times}\ \forall_{v\in V}\ :\ \widetilde{\mathrm{Ad}}_{\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}}(v) \quad = \quad (\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}).v.(\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}})^{-1} \equiv (\lambda\triangleright e^{\mathrm{C}}).v.(\lambda^{-1}\triangleright e^{\mathrm{C}}) = \lambda\cdot_{\mathbb{K}}\lambda^{-1}\triangleright v = v\,.$$

Wnioskując odwrotnie, wybierzmy bazę ortogonalną $\{v_i\}_{i\in\overline{1,N}}$, $N \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ w przestrzeni V,

$$\forall_{i,j\in\overline{1,N}}\ :\ \Phi_Q(v_i,v_j) = \lambda_i\,\delta^{\mathbb{K}}_{i,j}\,, \qquad \lambda_i \in \mathbb{K}^\times\,,$$

i rozważmy dowolny element $u \in \mathrm{Ker}\,\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}$, który wprost na mocy definicji spełnia warunek

$$\forall_{v\in V}\ :\ J_V(u).v = v.u\,,$$

tj.

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_u(v) = v \equiv \mathrm{id}_V(v)\,.$$

Rozkładając $u = u_0 + u_1$ na składowe $u_k \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^k$, $k \in \{0,1\}$, przepisujemy powyższe w postaci

$$u_0.v - u_1.v = v.u_0 + v.u_1\,,$$

czyli – wobec Równ. (5.8) – równoważnie w formie układu warunków

$$u_0.v = v.u_0 \qquad \wedge \qquad u_1.v = -v.u_1\,.$$

Redukcja stopnia 2 w $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ określona przez relacje

$$\forall_{i,j\in\overline{1,N}} \;:\; v_i.v_j = -v_j.v_i + 2\lambda_i\,\delta^{\mathbb{K}}_{i,j}$$

pozwala przy tym rozpisać

$$u_0 \;=\; \alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N)\,,$$

$$u_1 \;=\; \beta_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1.\beta_0(v_2,v_3,\ldots,v_N)$$

w terminach pewnych wielomianów α_k,β_k parzystości k. Kładąc $v = v_1$, otrzymujemy z pierwszego z powyższych warunków równość

$$\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N).v_1 + v_1.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N).v_1 = v_1.\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1^2.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N)\,,$$

która sprowadza się ostatecznie do postaci

$$v_1.\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) - v_1^2.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) = v_1.\alpha_0(v_2,v_3,\ldots,v_N) + v_1^2.\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N)\,,$$

czyli

$$2\lambda_1 \triangleright \alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) = 0_{\mathbb{K}}\,.$$

Jako że Q jest niezwyrodniała, $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$, przeto $\alpha_1(v_2,v_3,\ldots,v_N) = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}$, a zatem u_0 nie zależy od v_1. Powtarzając analogiczne rozumowanie dla $v_j,\ j\in\overline{2,N}$, stwierdzamy ostatecznie, że

$$u_0 = \lambda \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,\quad \lambda\in\mathbb{K}\,.$$

W podobny sposób stwierdzamy, że także u_1 nie zależy od $v_i,\ i\in\overline{1,N}$, co wobec nieparzystości u_1 implikuje jego trywialność, $u_1 = \mathbf{0}_{\mathrm{Cliff}(V,Q)}$. W sumie zatem mamy

$$u = u_0 + u_1 = u_0 = \lambda \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

co z racji odwracalności u daje nam tezę dowodzonego stwierdzenia. □

Uwaga 2. Założenie o niezwyrodnieniu formy kwadratowej Q poczynione w ostatnim stwierdzeniu jest istotne, o czym przekonuje nas analiza przypadku $\mathrm{Cliff}(V,0) \equiv \bigwedge^{\bullet} V$. Oto więc dla dowolnych *niewspółliniowych* $v_1,v_2\in V\setminus\{0_V\}$ sprawdzamy tożsamość

$$(1_{\mathbb{K}} + v_1\wedge v_2)^{-1} = 1_{\mathbb{K}} - v_1\wedge v_2\,,$$

która oznacza, że $1_{\mathbb{K}} + v_1\wedge v_2 \in \mathrm{Cliff}(V,Q)^{\times}$. Przy tym dla dowolnego $v\in V$ zachodzi

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{1_{\mathbb{K}}+v_1\wedge v_2}(v) = J_V(1_{\mathbb{K}} + v_1\wedge v_2)\wedge v\wedge(1_{\mathbb{K}} - v_1\wedge v_2) = (1_{\mathbb{K}} + v_1\wedge v_2)\wedge(v - v\wedge v_1\wedge v_2)$$

$$= \; v - v\wedge v_1\wedge v_2 + v_1\wedge v_2\wedge v - v_1\wedge v_2\wedge v\wedge v_1\wedge v_2 = v - v\wedge v_1\wedge v_2 + v\wedge v_1\wedge v_2 = v\,,$$

co pokazuje dowodnie, że $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathrm{Ad}}.$ zawiera elementy nie-skalarne.

Zanim podejmiemy dalszą analizę relacji między grupą Clifforda a grupą automorfizmów przestrzeni kwadratowej (V,Q), wprowadzimy obecnie nader przydatną konstrukcję pomocniczą:

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Norma spinorowa** na $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ to odwzorowanie

$$\mathsf{N} \;:\; \mathrm{Cliff}(V,Q)\;\circlearrowleft \;:\; \gamma \longmapsto \gamma.J_V\circ T_V(\gamma)\,,$$

o oczywistej własności

$$\forall_{v\in V} \;:\; \mathsf{N}(v) = -Q(v)\triangleright e^{\mathrm{C}}\,.$$

Kluczową własność określonego powyżej odwzorowania wysławia

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz Stw. 3, zakładając przy tym, że przestrzeń kwadratowa (V,Q) jest skończenie wymiarowa i niezwyrodniała. Wówczas norma spinorowa ogranicza się do homomorfizmu grup

$$\mathsf{N}\restriction_{\Gamma(V,Q)} \;:\; \Gamma(V,Q) \longrightarrow \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathrm{C}} \equiv \mathbb{K}^\times .$$

Dowód: Zauważmy na wstępie, że dla dowolnego $u \in \Gamma(V,Q)$ i wszystkich $v \in V$ zachodzi – wprost na mocy definicji grupy Clifforda – $J_V(u).v.u^{-1} \in V$, więc także

$$J_V(u).v.u^{-1} = T_V\big(J_V(u).v.u^{-1}\big) = T_V(u)^{-1}.T_V(v).T_V \circ J_V(u) = T_V(u)^{-1}.v.J_V \circ T_V(u)\,,$$

czyli

$$v = \big(T_V(u).J_V(u)\big).v.\big(J_V \circ T_V(u).u\big)^{-1} = J_V\big(J_V \circ T_V(u).u\big).v.\big(J_V \circ T_V(u).u\big)^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_{J_V \circ T_V(u).u}(v)\,,$$

co wynika z tego, że $\Gamma(V,Q)$ w reprezentacji $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ zachowuje V, a przy tym jest grupą, i oznacza, że

$$J_V \circ T_V(u).u \in \operatorname{Ker} \widetilde{\mathrm{Ad}}.\restriction_V .$$

Przy tym wobec pierwszej z powyższych równości zachodzi

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Ad}}_{J_V \circ T_V(u)}(v) &= T_V(u).v.J_V \circ T_V(u)^{-1} \equiv T_V(u^{-1})^{-1}.v.J_V \circ T_V(u^{-1}) = J_V(u^{-1}).v.u \\ &\equiv J_V(u^{-1}).v.(u^{-1})^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_{u^{-1}}(v) \in V\,, \end{aligned}$$

co pozwala stwierdzić, że $J_V \circ T_V(u) \in \Gamma(V,Q)$, czyli też

$$J_V \circ T_V(u).u \in \Gamma(V,Q) \cap \operatorname{Ker} \widetilde{\mathrm{Ad}}.\restriction_V ,$$

a w takim razie na mocy Stw. 3 wyprowadzamy wniosek o istnieniu skalara $\lambda_u \in \mathbb{K}^\times$ spełniającego warunek

$$J_V \circ T_V(u).u = \lambda_u \triangleright e^{\mathrm{C}} .$$

To prowadzi do wniosku, że

$$\mathsf{N}\big(T_V(u)\big) \equiv T_V(u).J_V(u) = J_V\big(J_V \circ T_V(u).u\big) = J_V(\lambda_u \triangleright e^{\mathrm{C}}) = \lambda_u \triangleright e^{\mathrm{C}} .$$

Zarazem

$$V = J_V(u).V.u^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad V = J_V(u)^{-1}.V.u\,,$$

przeto

$$V \equiv T_V(V) = T_V\big(J_V(u)^{-1}.V.u\big) = T_V(u).T_V(V).T_V \circ J_V(u)^{-1} = T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}\,,$$

więc ostatecznie

$$\begin{aligned} V \equiv -J_V(V) &= -J_V\big(T_V(u).V.J_V \circ T_V(u)^{-1}\big) = -J_V \circ T_V(u).J_V(V).J_V \circ J_V \circ T_V(u)^{-1} \\ &= J_V \circ T_V(u).V.T_V(u)^{-1} \equiv \widetilde{\mathrm{Ad}}_{T_V(u)}(V)\,. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że

$$u \in \Gamma(V,Q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_V(u) \in \Gamma(V,Q)\,,$$

co pozwala wcześniejszą naszą konstatację przepisać w pożądanej postaci

$$\mathsf{N}(u) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}} \in \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

czyli

$$\mathsf{N}\big(\Gamma(V,Q)\big) \subset \mathbb{K}^\times \triangleright e^{\mathrm{C}} .$$

Na koniec bez trudu sprawdzamy, dla dowolnych $u_1, u_2 \in \Gamma(V,Q)$, że

$$\begin{aligned} \mathsf{N}(u_1.u_2) &\equiv u_1.u_2.J_V \circ T_V(u_1.u_2) = u_1.\mathsf{N}(u_2).J_V \circ T_V(u_1) = u_1.\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathrm{C}}.J_V \circ T_V(u_1) \\ &= u_1.J_V \circ T_V(u_1).\lambda_{T_V(u_2)} \triangleright e^{\mathrm{C}} \equiv \mathsf{N}(u_1).\mathsf{N}(u_2)\,. \end{aligned}$$

□

Wyposażeni w nowe narzędzie analizy strukturalnej, jakim jest norma spinorowa, możemy przyjrzeć się bliżej ciągowi dokładnemu grup (2). Czynimy to w poniższym

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Stw. 3. Ograniczenie $\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}$ reprezentacji dołączonej zwichrowanej zadaje homomorfizm grup

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot} \;:\; \Gamma(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q)\,.$$

Dowód: Zaczniemy od wyznaczenia – w odwołaniu do Stw. 4, a dla dowolnego $u \in \Gamma(V,Q)$ – normy

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\big(J_V(u)\big) \;&\equiv\; J_V(u).J_V\circ T_V\circ J_V(u) = J_V(u).T_V(u) = J_V\big(u.J_V\circ T_V(u)\big) \equiv J_V\big(\mathsf{N}(u)\big)\\ &=\; J_V(\lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}}) = \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}} \equiv \mathsf{N}(u)\,.\end{aligned}$$

Dla $u \in \Gamma(V,Q)$ mamy tożsamość (w oczywistym zapisie symbolicznym)

$$\begin{aligned}V \;&\equiv\; -V = J_V(V) = J_V\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(V)\big) \equiv J_V\big(J_V(u).V.u^{-1}\big) = -J_V\big(J_V(u)\big).V.J_V\big(u^{-1}\big)\\ &=\; -J_V\big(J_V(u)\big).V.J_V(u)^{-1}\,,\end{aligned}$$

z której wynika $J_V(u) \in \Gamma(V,Q)$. Uwzględniwszy powyższe oraz $u^{-1} \in \Gamma(V,Q)$, jak również treść Stw. 4, możemy następnie obliczyć, dla dowolnego (anizotropowego) $v \in V^{\times} \subset \Gamma(V,Q)$,

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(v)\big) \;&\equiv\; \mathsf{N}\big(J_V(u).v.u^{-1}\big) = \mathsf{N}\big(J_V(u)\big).\mathsf{N}(v).\mathsf{N}(u^{-1}) = \mathsf{N}(u).\mathsf{N}(v).\mathsf{N}(u)^{-1}\\ &\equiv\; \lambda_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}}.\mathsf{N}(v).\lambda^{-1}_{T_V(u)} \triangleright e^{\mathrm{C}} = \mathsf{N}(v)\end{aligned}$$

i na tej podstawie – stwierdzić, że działanie dołączone zwichrowane zachowuje $Q(v)$ dla wszystkich anizotropowych wektorów $v \in V^{\times}$. Z drugiej strony ilekroć $Q(v) = 0_{\mathbb{K}}$ (a dowolny wektor jest albo anizotropowy, albo spełnia $Q(v) = 0_{\mathbb{K}}$), zachodzi $\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(v) \notin V^{\times}$, gdyż w przeciwnym razie byłoby – w świetle wcześniejszych ustaleń – $v = \widetilde{\mathrm{Ad}}_{u^{-1}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_u(v)\big) \in \widetilde{\mathrm{Ad}}_u(V^{\times}) \subset V^{\times}$, co prowadziłoby do sprzeczności. Także zatem w przypadku izotropowym wartość (zerowa) formy kwadratowej jest zachowywana przez działanie $\widetilde{\mathrm{Ad}}$. □

Ostatnie stwierdzenie w połączeniu z definicją (1) podgrupy $P(V,Q) \subset \Gamma(V,Q)$ oraz tożsamością

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_v \equiv \mathsf{P}_v \tag{3}$$

każe postawić pytanie o surjektywny charakter indukowanego przez reprezentację dołączoną zwichrowaną homomorfizmu

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}\restriction_{P(V,Q)} \;:\; P(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q)\,.$$

Odpowiedzi na to pytanie dostarcza

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 2 oraz Stw. 2. Ograniczenie reprezentacji dołączonej zwichrowanej

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}\restriction_{P(V,Q)} \;:\; P(V,Q) \longrightarrow \mathrm{O}(V,Q)$$

jest epimorfizmem grup.

Dowód: Prosta konsekwencja definicji grupy $P(V,Q)$, tożsamość (3) oraz Tw. 2. □

Zanim postąpimy dalej w naszej eksploracji anatomii grupy Clifforda, wprowadzimy pewne wyróżnione jej podgrupy o absolutnie kluczowym znaczeniu dla naszych rozważań, zorientowanych ostatecznie na konstrukcję spinorów – ich obecność pozwoli wysubtelnić relację (2), dając nam wgląd w strukturę $\mathrm{Ker}\,\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}\restriction_{P(V,Q)}$. Oto więc mamy

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Grupa** Pin przestrzeni kwadratowej (V,Q) to podgrupa

$$\mathrm{Pin}(V,Q) \coloneqq \left\langle v \in Q^{-1}(\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}) \right\rangle \subset P(V,Q)\,.$$

Jej podgrupa

$$\mathrm{Spin}(V,Q) \coloneqq \mathrm{Pin}(V,Q) \cap \mathrm{Cliff}(V,Q)^0$$

nosi miano **grupy** Spin przestrzeni kwadratowej (V,Q).

W kontekście poprzedniego stwierdzenia najogólniejsze własności wprowadzonych tu grup opisuje

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 4 oraz Stw. 3. Podgrupy

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}\big(\mathrm{Pin}(V,Q)\big), \underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}\big(\mathrm{Spin}(V,Q)\big) \subset \mathrm{O}(V,Q)$$

są normalne.

Dowód: Izometryczne działanie definiujące grupy $\mathrm{O}(V,Q)$ na (V,Q)

$$\rho_{\mathrm{def}\,.} \equiv \mathrm{id}_{\mathrm{O}(V,Q)} \;:\; \mathrm{O}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V,Q)$$

podnosi się funktorialnie do $\mathrm{Cliff}(V,Q)$ na mocy Tw. 7-8.2, przy czym

$$\forall_{\chi\in\mathrm{O}(V,Q)} \;:\; [\mathrm{Cliff}(\chi), J_V] \equiv [\mathrm{Cliff}(\chi), \mathrm{Cliff}(P_V)] = \mathrm{Cliff}([\chi, P_V]) = \mathrm{Cliff}(0) = 0\,,$$

więc też dla dowolnych $v \in V^\times, w \in V$ oraz $\chi \in \mathrm{O}(V,Q)$ obliczamy

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\chi(v)}(w) &\equiv J_V \circ \chi(v).w.\chi(v)^{-1} = \chi \circ J_V(v).w.\chi(v^{-1}) = \mathrm{Cliff}(\chi)\big(J_V(v).\chi^{-1}(w).v^{-1}\big)\\ &= \mathrm{Cliff}(\chi) \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_v\big(\chi^{-1}(w)\big)\,,\end{aligned}$$

korzystając przy tym z tożsamości $\mathrm{Cliff}(\chi)(w) \equiv \chi(w)$ słusznej dla dowolnego $w \in V(\subset \mathrm{Cliff}(V,Q))$, czyli – wobec Równ (3) –

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\chi(v)}(w) = \chi \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_v \circ \chi^{-1}(w)\,,$$

co pozwala nam zapisać

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\chi(v)}\restriction_V = \mathrm{Ad}_\chi\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_v\restriction_V\big)$$

i na tej podstawie – w bezpośrednim odwołaniu do Def. 4 (obie grupy są generowane multyplikatywnie przez pewne wektory nieizotropowe w stosownej liczbie (parzystej dla $\mathrm{Spin}(V,Q)$), a nadto $Q \circ \chi(v) = Q(v)$) – ustalić pożądane relacje

$$\forall_{H\in\{\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}(\mathrm{Pin}(V,Q)), \underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}(\mathrm{Spin}(V,Q))\}} \;\forall_{\chi\in\mathrm{O}(V,Q)} \;:\; \mathrm{Ad}_\chi(H) \subset H\,.$$

□

Tytułem ukierunkowania dalszej dyskusji, która pozwoli należycie wyeksponować grupy Pin i Spin, zauważmy, że dla dowolnego skalara $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ (i dla każdego wektora $v \in V^\times$) spełniona jest tożsamość

$$\mathsf{P}_{\lambda\triangleright v} = \mathsf{P}_v\,,$$

jeśli zatem bylibyśmy w stanie przenormować wszystkie nieizotropowe wektory w V tak, by ich norma (spinorowa, tj. zadawana przez Q) była równa $\pm\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$, to wówczas w świetle Tw. 2 reprezentacja dołączona zwichrowana ograniczałaby się w oczywisty sposób do epimorfizmów $\mathrm{Pin}(V,Q) \twoheadrightarrow \mathrm{O}(V,Q)$ oraz $\mathrm{Spin}(V,Q) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(V,Q)$. Kłopot w tym, że tego typu operacja wymaga rozwiązania (w $\mathbb{K}^\times$) równania

$$\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \ni Q(\lambda \triangleright v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)$$

dla dowolnej wartości $Q(v)$, co tłumaczy się na warunek

$$\forall_{v\in V^\times} \;\exists_{\varepsilon_v\in\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}} \;:\; \tfrac{\varepsilon_v}{Q(v)} \in \{\; \lambda^2 \in \mathbb{K}^\times \quad | \quad \lambda \in \mathbb{K}^\times \;\}\,.$$

Warunek ten jest (szczęśliwie) spełniony dla $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, w ogólności zaś dostarcza motywacji dla

Definicja 5. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i wprowadźmy oznaczenie

$$\left(\mathbb{K}^{\times}\right)^2 \equiv \{\ \lambda^2 \in \mathbb{K}^{\times} \quad | \quad \lambda \in \mathbb{K}^{\times}\ \}\,.$$

Ciało $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ nazywamy **spinowym**, jeśli spełnia warunek

$$\mathbb{K}^{\times} = \left(\mathbb{K}^{\times}\right)^2 \cup \left(-\left(\mathbb{K}^{\times}\right)^2\right),$$

czyli

$$\forall_{\lambda\in\mathbb{K}^{\times}}\ \exists_{\mu\in\mathbb{K}^{\times}}\ :\ \mu^2 \in \{-\lambda, \lambda\}\,.$$

Zwieńczeniem naszych dociekań jest

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Dla dowolnej skończenie wymiarowej niezwyrodniałej przestrzeni kwadratowej (V, Q) nad ciałem spinowym $\mathbb{K}$ istnieją krótkie ciągi dokładne grup

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathrm{Pin}(V,Q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{O}(V,Q) \longrightarrow \mathbf{1}\,,$$

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathrm{Spin}(V,Q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{SO}(V,Q) \longrightarrow \mathbf{1}\,,$$

przy czym

$$\mathbb{F} = \begin{cases} \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \equiv \mathbb{Z}_2\,, & \text{gdy } \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \notin \mathbb{K} \\ \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}, -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\} \equiv \mathbb{Z}_4 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

co pokazuje, że grupy Pin i Spin są centralnymi rozszerzeniami grup – odpowiednio – ortogonalnej i specjalnej ortogonalnej przestrzeni kwadratowej. W szczególności dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i dowolnej sygnatury $(p,q) \in \mathbb{N}^{\times 2} \setminus \{(0,0)\}$, a przy oznaczeniach $G_{\mathbb{R}}(p,q) \equiv G(\mathbb{R}^{p,q})$, $G \in \{\mathrm{O}, \mathrm{SO}, \mathrm{Pin}, \mathrm{Spin}\}$, otrzymujemy krótkie ciągi dokładne

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}_{\mathbb{R}}(p,q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q) \longrightarrow \mathbf{1}\,,$$

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q) \longrightarrow \mathbf{1}\,,$$

w których – o ile tylko $(p,q) \neq (1,1)$ – podwójne nakrycia grupy ortogonalnej (wzgl. specjalnej ortogonalnej) przez grupę Pin (wzgl. Spin) są topologicznie nietrywialne nad $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q)$ – i tak np. podwójne nakrycie

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(n,0) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n,0) \longrightarrow \mathbf{1}$$

jest uniwersalne dla $n \geq 3$.

Dowód: Rozważmy dowolny element $u = v_1.v_2.\cdots.v_m \in \mathrm{Pin}(V,Q)$ z jądra homomorfizmu $\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}$ (określony przez wektory $v_i \in Q^{-1}(\{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\})$, $i \in \overline{1,m}$). Na mocy Stw. 3

$$u \in \mathbb{K}^{\times} \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

zatem – w świetle Stw. 4 i samej Def. 3 –

$$\begin{aligned} u.u &= u.J_V \circ T_V(u) \equiv \mathsf{N}(u) = \mathsf{N}(v_1).\mathsf{N}(v_2).\cdots.\mathsf{N}(v_m) \\ &= \left(-Q(v_1)\right) \cdot_{\mathbb{K}} \left(-Q(v_2)\right) \cdot_{\mathbb{K}} \cdots \cdot_{\mathbb{K}} \left(-Q(v_m)\right) \triangleright e^{\mathrm{C}} \in \mathbb{Z}_2 \triangleright e^{\mathrm{C}}\,. \end{aligned}$$

Mamy tutaj dwie wykluczające się wzajemnie ewentualności:

- albo $\mathbb{K} \not\ni \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}$, a wtedy nieodzownie $u^2 = e^{\mathrm{C}}$, czyli $u \in \{-e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\}$, tj.

$$\mathrm{Ker}\,\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \subseteq \{-e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\}\,,$$

ponieważ jednak

$$\underline{\widetilde{\mathrm{Ad}}}_{\pm e^{\mathrm{C}}} = \mathrm{id}_V\,,$$

przeto ostatecznie

$$\operatorname{Ker}\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot} = \{-e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\} \cong \mathbb{Z}_2\,,$$

- albo $\mathbb{K} \ni \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}}$, a wtedy oba znaki w powyższej tożsamości są dopuszczalne, więc

$$\operatorname{Ker}\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot} \subseteq \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, -e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\}\,,$$

a że

$$\forall_{x \in \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, -e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\}} \;:\; \widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_x = \mathrm{id}_V\,,$$

toteż

$$\operatorname{Ker}\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot} = \{-\sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, \sqrt{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}} \triangleright e^{\mathrm{C}}, -e^{\mathrm{C}}, e^{\mathrm{C}}\} \cong \mathbb{Z}_4\,.$$

Topologia podwójnych nakryć ma swój aspekt elementarny, który odróżnia nakrycia $\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow B$ postaci $\widehat{B} = B \times \mathbb{Z}_2$ (zwane trywialnymi) od nakryć przyjmujących postać trywialną jedynie lokalnie (nad bazą B), ale też – zwłaszcza w obecnym kontekście – aspekt wyższy, który odróżnia nakrycia n-spójne (dla $n \geq 1$) od nie-n-spójnych. Zanalizowanie tego ostatniego aspektu wymaga znajomości szczegółów topologii wszystkich grup uwikłanych w treść twierdzenia na poziomie wykraczającym dalece poza zakres niniejszego kursu – zainteresowanego Słuchacza odsyłamy do literatury źródłowej, jak choćby do doskonałej monografii S. Helgasona [Hel01]. W niniejszym dowodzie skupimy się natomiast na aspekcie elementarnym, wykazując, że podwójne nakrycia wymienione w drugiej części twierdzenia nie mają *globalnej* struktury podwójnej kopii bazy. W tym celu wystarczy połączyć krzywą ciągłą[1] punkty w przestrzeni totalnej nakrycia, które rzutują się na ten sam punkt bazy, a więc np. $-e^{\mathrm{C}}$ i e^{C} w $\mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)$. Jako że $(p,q) \neq (1,1)$ (na podstawie poczynionego tu założenia), zawsze znajdziemy wektory $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^{p+q}$ spełniające układ warunków

$$\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_1) = \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_2) =: \varepsilon \in \{-1,1\} \qquad \wedge \qquad e_1 \perp_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}} e_2\,.$$

Dla dowolnej takiej pary wektorów definiujemy krzywą (ciągłą)

$$\gamma \;:\; [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathrm{Cl}_{p,q}^{\mathbb{R}\,0} \;:\; t \longmapsto (\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2).(\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2)\,.$$

Bez trudu wyznaczamy

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 + \sin t \triangleright e_2) &= \cos^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_2) + 2 \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon\,,\\
\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(\cos t \triangleright e_1 - \sin t \triangleright e_2) &= \cos^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_1) + \sin^2 t \cdot \delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}(e_2) - 2 \sin t \cdot \cos t \cdot \Phi_{\delta_{\mathrm{E}}^{(p,q)}}(e_1, e_2) = \varepsilon
\end{aligned}$$

i na tej podstawie stwierdzamy, że krzywa leży w grupie Spin,

$$\gamma\big([0, \tfrac{\pi}{2}]\big) \subset \mathrm{Spin}_{\mathbb{R}}(p,q)\,,$$

będącej przestrzenią totalną rozpatrywanego nakrycia. Przy tym krzywa ta łączy ze sobą oba punkty w $\widetilde{\underline{\mathrm{Ad}}}_{\cdot}^{-1}(\mathrm{id}_V)$,

$$\gamma(0) = e_1.e_1 = \varepsilon \triangleright e^{\mathrm{C}}\,, \qquad\qquad \gamma(\tfrac{\pi}{2}) = -e_2.e_2 = -\varepsilon \triangleright e^{\mathrm{C}}\,,$$

co nie byłoby możliwe w topologii $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q) \times \mathbb{Z}_2$. □

[1] Przy naturalnych założeniach dotyczących topologii rozpatrywanych grup, znajdujących potwierdzenie w szczegółowych dociekaniach, np. na podstawie lektury rzeczonej monografii S. Helgasona.

Dodatek A. Uzupełnienie z teorii przestrzeni kwadratowych

Dyskusja cliffordowskiej realizacji grupy izometrii bazuje na Twierdzeniu Cartana–Dieudonnégo, zawierającym identyfikację prostego układu generującego tejże grupy. Ażeby je wysłowić, będziemy potrzebowali nieco elementarnego substratu z zakresu algebry liniowej.

Zacznijmy *adagio*...

Stwierdzenie 8. Niechaj (V,Q) będzie skończenie wymiarową niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową nad ciałem $\mathbb{K}$, a $W \subset V$ – jej dowolną podprzestrzenią o dopełnieniu ortogonalnym $W^{\perp_Q}$. Wówczas zachodzi równość

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} \tag{4}$$

oraz tożsamość

$$W = \left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q} .$$

Dowód: Izomorfizm $\mathbb{K}$-liniowy

$$l_{\Phi_Q} \ : \ V \xrightarrow{\cong} V^* \ : \ v \longmapsto \Phi_Q(v,\cdot) ,$$

o którego istnieniu przesądza niezwyrodnienie Q, indukuje epimorfizm

$$_W|l_{\Phi_Q} \ : \ V \twoheadrightarrow W^* \ : \ v \longmapsto \Phi_Q(v,\cdot)\restriction_W ,$$

dla którego możemy wypisać standardowy bilans wymiarów:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}_W|l_{\Phi_Q} + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}_W|l_{\Phi_Q} = \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} + \dim_{\mathbb{K}} W^* \equiv \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} ,$$

dowodzący słuszności postulowanej równości dla $\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Skoro zaś

$$W \subset \left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q} ,$$

co oczywiste, to ta sama równość odniesiona do podprzestrzeni $W^{\perp_Q}$ daje

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q} + \dim_{\mathbb{K}} \left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q} ,$$

więc też po obustronnym skróceniu (skończonego) składnika $\dim_{\mathbb{K}} W^{\perp_Q}$ w obu reprezentacjach $\dim_{\mathbb{K}} V$,

$$\dim_{\mathbb{K}} \left(W^{\perp_Q}\right)^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} W ,$$

a to już implikuje postulowaną tożsamość. □

W następnej kolejności wprowadzimy

Definicja 6. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{K}$ wyposażona w formę symetryczną γ jest nazywana **płaszczyzną hiperboliczną**, jeżeli jest niezwyrodniała (względem γ), $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$ i istnieje w niej niezerowy wektor izotropowy $v \in V$,

$$v \neq 0_V \quad \wedge \quad \gamma(v,v) = 0_{\mathbb{K}} .$$

Przestrzeń hiperboliczna to suma ortogonalna dowolnej rodziny płaszczyzn hiperbolicznych. Forma symetryczna dwuliniowa (wzgl. kwadratowa) na przestrzeni hiperbolicznej jest określana mianem **formy hiperbolicznej**.

Bazę $\{v,w\}$ płaszczyzny hiperbolicznej V spełniającą układ warunków

$$\gamma(v,v) = 0_{\mathbb{K}} = \gamma(w,w) \quad \wedge \quad \gamma(v,w) = 1_{\mathbb{K}} \tag{5}$$

nazywamy **parą hiperboliczną**.

Elementarnego opisu przestrzeni hiperbolicznych dostarcza

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Każda płaszczyzna hiperboliczna nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$ ma parę hiperboliczną. I odwrotnie, dowolna dwuwymiarowa przestrzeń symetryczna o bazie spełniającej warunki (5) jest płaszczyzną hiperboliczną.

Dowód: Niech V będzie płaszczyzną hiperboliczną o wektorze $v \neq 0_V$ izotropowym względem formy symetrycznej γ. Wobec $\operatorname{Ker}\gamma = \{0_V\}$ musi istnieć wektor $w \notin \langle v\rangle_{\mathbb{K}}$ spełniający warunek

$$\gamma(v,w) \neq 0_{\mathbb{K}}\,,$$

gdyż w przeciwnym razie $v \in \operatorname{Ker}\gamma$. Położywszy

$$u := \lambda \triangleright_V v +_V w\,, \qquad \lambda := -2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v,w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(w,w)\,,$$

bez trudu sprawdzamy, że układ $\{\gamma(v,w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u, v\}$ jest parą hiperboliczną dla V, oto bowiem $u \notin \langle v\rangle_{\mathbb{K}}$, a ponadto

$$\begin{aligned}\gamma\left(\gamma(v,w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u, \gamma(v,w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u\right) &\equiv \left(\gamma(v,w)^{-1}\right)^2 \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(\lambda \triangleright_V v +_V w, \lambda \triangleright_V v +_V w)\\ &= \left(\gamma(v,w)^{-1}\right)^2 \cdot_{\mathbb{K}} \left(\lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v,v) +_{\mathbb{K}} 2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v,w) +_{\mathbb{K}} \gamma(w,w)\right)\\ &= \left(\gamma(v,w)^{-1}\right)^2 \cdot_{\mathbb{K}} \left(2\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v,w) +_{\mathbb{K}} \gamma(w,w)\right) = 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

oraz

$$\gamma\left(\gamma(v,w)^{-1} \triangleright_{\mathbb{K}} u, v\right) \equiv \gamma(v,w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(\lambda \triangleright_V v +_V w, v)$$

$$= \gamma(v,w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \left(\lambda \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v,v) +_{\mathbb{K}} \gamma(w,v)\right) = \gamma(v,w)^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \gamma(v,w) = 1_{\mathbb{K}}\,.$$

I odwrotnie, jeżeli elementy bazy $\{v,w\}$ przestrzeni V spełniają relacje (5), to γ ma w tej bazie macierz

$$[\gamma]_{\{v,w\}} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & 1_{\mathbb{K}} \\ 1_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

która jest odwracalna ($\det_{(2)}([\gamma]_{\{v,w\}}) = -1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$). To pokazuje, że forma γ jest niezwyrodniała (wszak zerowość wyznacznika formy kwadratowej jest *niezmiennikiem* wyboru bazy), a zatem V jest w istocie płaszczyzną hiperboliczną. □

Przestrzenie hiperboliczne są naturalnym elementem opisu zwyrodniałych ograniczeń niezwyrodniałych form symetrycznych (lub – równoważnie – niezwyrodniałych rozszerzeń zwyrodniałych form symetrycznych) i jako takie pozwalają lepiej zrozumieć geometrię zanurzeń podprzestrzeni izotropowych w niezwyrodniałych przestrzeniach symetrycznych. Doskonałej ilustracji tej tezy dostarcza

Stwierdzenie 10 (O rozszerzeniu hiperbolicznym przestrzeni izotropowej)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ wyposażoną w niezwyrodniałą formę symetryczną γ i niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią V. Oznaczmy $\gamma_W := \gamma\restriction_{W\times W}$ i $W_0 := \operatorname{Ker}\gamma_W$. Wybierzmy w W_0 bazę $\{w_i\}_{i\in\overline{1,K}}$, $K \equiv \dim_{\mathbb{K}} W_0$ i niech D będzie dopełnieniem ortogonalnym W_0 w W,

$$W = W_0 \textcircled{\perp} D\,.$$

Wówczas istnieją wektory $\{v_i\}_{i\in\overline{1,K}} \subset D^\perp \subset V$ o tej własności, że dla każdego indeksu $i \in \overline{1,K}$ układ $\{v_i, w_i\}$ jest parą hiperboliczną rozpinającą płaszczyznę hiperboliczną $H_i := \langle v_i, w_i\rangle_{\mathbb{K}}$. Pary te zadają rozkład ortogonalny podprzestrzeni

$$\widetilde{W} := \langle v_1, v_2, \ldots, v_K, w_1, w_2, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} +_V D \subset V$$

dany wzorem

$$\widetilde{W} = H_1 \textcircled{\perp} H_2 \textcircled{\perp} \cdots \textcircled{\perp} H_K \textcircled{\perp} D\,.$$

Dowód: Oznaczmy

$$D_1 := \langle w_2, w_3, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} \oplus D\,.$$

Z inkluzji właściwej podprzestrzeni

$$D_1 \subsetneq W_0 \oplus D$$

wynika inkluzja właściwa ich anihilatorów,

$$D_1^{\perp_\gamma} \supsetneq (W_0 \oplus D)^{\perp_\gamma} ,$$

a stąd dalej – istnienie wektora $v_1 \in D_1^{\perp_\gamma} \setminus (W_0 \oplus D)^{\perp_\gamma}$, tj. takiego, który spełnia warunki

$$\forall_{j\in\overline{2,K}} \,:\, \gamma(v_1, w_j) = 0_{\mathbb{K}} , \qquad\qquad \forall_{v\in D} \,:\, \gamma(v_1, v) = 0_{\mathbb{K}}$$

oraz

$$\gamma(v_1, w_1) \neq 0_{\mathbb{K}} .$$

Wobec izotropowości wektora w_1 i niezwyrodnienia $\gamma\restriction_{\langle v_1, w_1\rangle_{\mathbb{K}}}$ podprzestrzeń $H_1 \coloneqq \langle v_1, w_1\rangle_{\mathbb{K}}$ jest zatem płaszczyzną hiperboliczną, co w świetle Stw. 9 oznacza istnienie takiego wektora $u_1 \in H_1$, który tworzy wraz z w_1 parę hiperboliczną. Przy tym oczywiście

$$\widetilde{W}_1 \coloneqq \langle v_1, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} +_V D = H_1 \textcircled{\perp} \langle w_2, w_3, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp} D .$$

Jądrem formy symetrycznej $\gamma_{\widetilde{W}_1} \coloneqq \gamma|_{\widetilde{W}_1\times\widetilde{W}_1}$ jest

$$\operatorname{Ker}\gamma_{\widetilde{W}_1} = \langle w_2, w_3, \ldots, w_K\rangle_{\mathbb{K}} ,$$

wobec czego całą opisaną procedurę możemy powtórzyć w odniesieniu do podprzestrzeni izotropowej

$$\widetilde{W}_1 = \operatorname{Ker}\gamma_{\widetilde{W}_1} \textcircled{\perp} \widetilde{D}_1 , \qquad \widetilde{D}_1 \coloneqq H_1 \textcircled{\perp} D .$$

□

Oczywistą konsekwencją powyższego jest

Corollarium 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, przy czym zakładamy, że V jest niezwyrodniałą przestrzenią kwadratową wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, $W \subset V$ zaś – jej podprzestrzenią Q-zerową. Wówczas

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq E(\tfrac{n}{2}) .$$

Podprzestrzeń, której wymiar wysyca powyższą nierówność, określamy mianem **maksymalnej podprzestrzeni Q-zerowej**.

Mamy także wygodne

Stwierdzenie 11. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, przy czym zakładamy, że (V, Q) jest (skończenie wymiarową) **przestrzenią hiperboliczną**, tj. sumą (Q-)ortogonalną skończonej liczby płaszczyzn hiperbolicznych. Niechaj $W_0 \subset V$ będzie dowolną maksymalną podprzestrzenią Q-zerową. Każda izometria $\chi \in \mathrm{O}(V, Q)$ o własności

$$\chi\restriction_{W_0} = \mathrm{id}_{W_0}$$

jest obrotem,

$$\chi \in \mathrm{SO}(V, Q) .$$

Dowód: Utożsamiwszy podprzestrzeń W_0 z treści Stw. 10 z maksymalną podprzestrzenią Q-zerową, o której mowa w treści twierdzenia dowodzonego, stwierdzamy istnienie (maksymalnie) Q-zerowego dopełnienia *prostego* $\Delta \subset V$ tejże podprzestrzeni,

$$W_0 \oplus \Delta = V ,$$

rozpiętego na wektorach v_i, $i \in \overline{1,n}$, $2n \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$ dopełniających elementy (dowolnej) bazy $\{w_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ do odnośnych par hiperbolicznych $\{w_i, v_i\}$. Istotnie, wektory v_i są parami ortogonalne (wszak $H_i \perp H_j$, ilekroć $i \neq j$), a do tego – izotropowe. Wprost na mocy założenia zachodzi przy tym

$$\forall_{i\in\overline{1,n}} \,:\, \chi(w_i) = w_i ,$$

a zatem także – dla dowolnych $(w,x) \in W_0 \times \Delta$ –

$$\begin{aligned}\Phi_Q\big(w, \chi(x) - x\big) &= \Phi_Q\big(w, \chi(x)\big) - \Phi_Q(w,x) \equiv \Phi_Q\big(\chi(w), \chi(x)\big) - \Phi_Q(w,x) = \Phi_Q(w,x) - \Phi_Q(w,x) \\ &= \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,,\end{aligned}$$

skąd wniosek:

$$\forall_{x\in\Delta} \;:\; \chi(x) - x \in W_0^{\perp_Q}\,.$$

Q-zerowość W_0 implikuje inkluzję

$$W_0 \subseteq W_0^{\perp_Q}\,,$$

która w konsekwencji równości (4), zapisanej dla W_0:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W_0 + \dim_{\mathbb{K}} W_0^{\perp_Q}\,,$$

a słusznej wobec niezwyrodnienia V, oraz w konsekwencji maksymalności W_0, pociągających za sobą równość

$$\dim_{\mathbb{K}} W_0^{\perp_Q} = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} W_0 = 2n - n = n \equiv \dim_{\mathbb{K}} W_0\,,$$

sprowadza się do tożsamość

$$W_0 = W_0^{\perp_Q}\,.$$

Możemy zatem przepisać wcześniejszy wniosek w postaci

$$\forall_{x\in\Delta} \;:\; \chi(x) - x \in W_0\,,$$

otrzymując tym sposobem w szczególności relacje

$$\forall_{i\in\overline{1,n}}\; \exists_{\mu_i^1,\mu_i^2,\ldots,\mu_i^n\in\mathbb{K}} \;:\; \chi(v_i) = v_i +_V \mu_i^j \triangleright w_j\,,$$

które przesądzają o górnotrójkątnej postaci macierzy endomorfizmu χ względem bazy $\mathscr{B} := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$$[\chi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & (\mu_i^j)^{j\in\overline{1,n}}_{i\in\overline{1,n}} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

Licząc wyznacznik χ w tej właśnie bazie, otrzymujemy pożądany wynik

$$\det\chi = \det_{(2n)}[\chi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\,.$$

□

Konsekwencją dużo mniej oczywistą, a fundamentalną dla teorii przestrzeni kwadratowych i teorii spinorów, jest[2]

Twierdzenie 2 (Cartana–Dieudonnégo)**.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy, zakładając dodatkowo, że przestrzeń kwadratowa (V,Q) nad ciałem $\mathbb{K}$ o charakterystyce $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ jest skończonego wymiaru, $N := \dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, i jest niezwyrodniała. Wówczas

$$\forall_{\chi\in\mathrm{O}(V,Q)}\; \exists_{n\in\overline{0,N}}\; \exists_{v_1,v_2,\ldots,v_n\in V^\times} \;:\; \chi = \mathsf{P}_{v_1} \circ \mathsf{P}_{v_2} \circ \cdots \circ \mathsf{P}_{v_n}\,,$$

przy czym

$$\chi \in \mathrm{SO}(V,Q) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \in 2\mathbb{N}\,.$$

[2] W swojej wersji pierwotnej, sformułowanej i udowodnionej dla $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, twierdzenie to pochodzi od É.J. Cartana [Car38a, Car38b]. Jego wersję ogólną oraz takiż dowód podał następnie J.A. Dieudonné w monografii [Die55]. Dowód przedstawiony w niniejszym skrypcie pochodzi zasadniczo od E. Artina [Art61].

Dowód: Zauważmy na wstępie, że dowolne odbicie elementarne P_v przyjmuje względem rozkładu Q-ortogonalnego

$$V = \langle v\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$$

postać

$$\mathsf{P}_v = \left(-\mathrm{id}_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}}\right)\textcircled{\perp}_Q \mathrm{id}_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} ,$$

zatem spełnia warunek

$$\det \mathsf{P}_v = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}} .$$

Przy założeniu słuszności pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia obserwacja ta implikuje natychmiast drugą jej część.

Dowód części pierwszej przeprowadzimy metodą indukcji silnej względem N, zauważając natychmiast oczywistość tezy w przypadku $N = 1$ – istotnie, jeśli $V = \langle v\rangle_{\mathbb{K}}$, to mamy koniecznie $\chi(v) = \lambda \triangleright v$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{K}^\times$, a przy tym $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} \neq Q(v) = Q \circ \chi(v) = \lambda^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v)$ implikuje $\lambda \in \{-\mathbf{1}_{\mathbb{K}}, \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\}$, więc albo $\chi = \mathrm{id}_V \in \mathrm{SO}(V,Q)$, albo $\chi = \mathsf{P}_v \in \mathrm{O}(V,Q)\setminus\mathrm{SO}(V,Q)$. Poczyniwszy założenie indukcyjne o słuszności dowodzonej tezy dla $N \in \overline{1, N_0 - 1}$, $N_0 > 1$, rozbijemy następnie dowód jej słuszności dla $N = N_0$ na składowe odpowiadające wykluczającym się nawzajem ewentualnościom:

(i) $\exists_{v\in V^\times} \,:\, \chi(v) = v$;
(ii) $\forall_{v\in V^\times} \,:\, \chi(v) - v \neq 0_V \quad \wedge \quad \exists_{w\in V^\times} \,:\, \chi(w) - w \in V^\times$;
(iii) $\forall_{v\in V^\times} \,:\, \chi(v) - v \in Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\}) \setminus \{0_V\}$.

W przypadku (i) przywołujemy tezę twierdzenia o istnieniu dopełnienia ortogonalnego dowolnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni niezwyrodniałej w przestrzeni kwadratowej (na co pozwala nieizotropowość v) i dokonujemy rozkładu

$$V = \langle v\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} , \tag{6}$$

odnotowując przy tym rozkład rozważanego endomorfizmu

$$\chi = \mathrm{id}_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \chi\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} .$$

Wobec równości

$$\dim_{\mathbb{K}} \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = N_0 - 1$$

założenie indukcyjne pozwala nam rozłożyć $\chi\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}}$ na co najwyżej $N_0 - 1$ odbić elementarnych $\mathsf{P}_x^{(N_0-1)}$ w hiperpłaszczyznach $Q\restriction_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}} \equiv Q_{\perp v}$-ortogonalnych do wyróżnionych wektorów nieizotropowych $x \in \langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q}$. Odbicie $\mathsf{P}_x^{(N_0-1)}$ przyjmuje względem odnośnego rozkładu

$$\langle v\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_Q} = \langle x\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_{Q_{\perp v}} \langle x\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}} ,$$

postać blokowo-diagonalną

$$\mathsf{P}_x^{(N_0-1)} = \left(-\mathrm{id}_{\langle x\rangle_{\mathbb{K}}}\right) \oplus \mathrm{id}_{\langle x\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}}} ,$$

a jego trywialne rozszerzenie do całej przestrzeni V zapisuje się względem rozkładu (6) jako

$$\mathrm{id}_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \mathsf{P}_x^{(N_0-1)} \equiv \mathrm{id}_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \left(-\mathrm{id}_{\langle x\rangle_{\mathbb{K}}}\right) \oplus \mathrm{id}_{\langle x\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}}} ,$$

czyli sprowadza się do odbicia elementarnego w hiperpłaszczyźnie

$$\langle x\rangle^{\perp_Q} = \langle v\rangle_{\mathbb{K}} \textcircled{\perp}_Q \langle x\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp_{Q_{\perp v}}} ,$$

tj. spełnia tożsamość

$$\mathrm{id}_{\langle v\rangle_{\mathbb{K}}} \oplus \mathsf{P}_x^{(N_0-1)} \equiv \mathsf{P}_x .$$

To rozumowanie przekonuje, że w przypadku (i) izometria χ rozkłada się na co najwyżej $N_0 - 1 < N_0$ odbić elementarnych.

W przypadku (ii) nieizotropowość $\chi(w)-w$ pozwala rozpatrzyć odbicie elementarne $\mathsf{P}_{\chi(w)-w}$, które spełnia tożsamość

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{\chi(w)-w}(w) &= w-\tfrac{2\Phi_Q(w,\chi(w)-w)}{Q(\chi(w)-w)}\triangleright\big(\chi(w)-w\big)\\ &= w-\tfrac{2(\Phi_Q(w,\chi(w))-Q(w))}{2Q(w)-2\Phi_Q(w,\chi(w))}\triangleright\big(\chi(w)-w\big)=\chi(w)\,.\end{aligned}$$

Na jej podstawie stwierdzamy, że izometria $\chi_w\coloneqq\mathsf{P}_{\chi(w)-w}\circ\chi$ zachowuje nieizotropowy wektor w, co w świetle poprzedniej części naszego dowodu oznacza, że χ_w jest superpozycją co najwyżej N_0-1 odbić elementarnych. Co za tym idzie, wyjściowa izometria χ jest superpozycją co najwyżej $N_0-1+1=N_0$ odbić elementarnych, zgodnie z tezą indukcyjną.

W przypadku (iii) przekonujemy się, że $N_0=2k,\ k\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ oraz że $\chi\in\mathrm{SO}(V,Q)$, co pozwala przeprowadzić następujące proste rozumowanie. Nieizotropowość wektora $v\in V^\times$ (wybranego dowolnie, a wybór taki istnieje z racji niezwyrodnienia V i założenia dotyczącego charakterystyki $\mathbb{K}$ – gdyby było $Q(v)=0$ dla dowolnego $v\in V$, to mielibyśmy $\Phi_Q\equiv 0$ (formuła polaryzacyjna), więc sprzeczność) oznacza, że przynajmniej jeden z wektorów $\chi(v)\pm v$ jest nieizotropowy, gdyż

$$\begin{aligned}&Q\big(\chi(v)+v\big)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}=Q\big(\chi(v)-v\big)\\ \iff\qquad &Q(v)+\Phi_Q(v,\chi(v))=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}=Q(v)-\Phi_Q(v,\chi(v))\quad\implies\quad Q(v)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,.\end{aligned}$$

W rozważanym przypadku (iii) oznacza to niechybnie $\chi(v)+_V v\in V^\times$ przy jednoczesnym $\chi(v)\neq v$, ponieważ zaś

$$\mathsf{P}_{\chi(v)+_V v}(v)=v-\tfrac{2\Phi_Q(v,\chi(v)+_V v)}{Q(\chi(v)+_V v)}\triangleright\big(\chi(v)+_V v\big)=-\chi(v)\,,$$

przeto $\widetilde{\chi}_v\coloneqq\mathsf{P}_v\circ\mathsf{P}_{\chi(v)+_V v}\circ\chi$ zachowuje wektor nieizotropowy v. Rozumując jak poprzednio, stwierdzamy, że $\widetilde{\chi}_v$ jest superpozycją co najwyżej N_0-1 odbić elementarnych, przy czym jeśli przyjąć, że – jak pokażemy lada chwila – N_0 jest liczbą parzystą, a χ jest obrotem, to mamy do czynienia z sytuacją, w której *obrót* $\widetilde{\chi}_v$ rozkłada się na co najwyżej $N_0-1\in 2\mathbb{N}+1$ odbić (elementarnych), czyli koniecznie w rozkładzie tym jest co najwyżej $N_0-2\in 2\mathbb{N}$ czynników, to zaś – koniec końców – prowadzi do wniosku, że χ jest superpozycją co najwyżej $N_0-2+2=N_0$ odbić elementarnych, w zgodzie z tezą indukcyjną. Pozostaje przeto dowieść, że endomorfizm ten przy spełnionych warunkach z punktu (iii) jest w istocie obrotem w parzystowymiarowej (niezwyrodniałej) przestrzeni kwadratowej. Jasno widać, że $N_0\neq 1$, oto bowiem w przypadku $N_0=1$ jest – jak pokazaliśmy wcześniej – $\chi(v)=-v$ (wszak $\chi(v)\neq v$), więc też $\chi(v)-v=-2_{\mathbb{K}}\triangleright v\in V^\times$, przeciwnie do założenia (iii). Gdyby natomiast było $N_0=2$, to wówczas mielibyśmy $\chi(v)\notin\langle v\rangle_{\mathbb{K}}$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby albo $\chi(v)=v$, niezgodnie z założeniem (iii), albo $\chi(v)=-v$ ($\{-1_{\mathbb{K}},1_{\mathbb{K}}\}$ to jedyne dopuszczalne wartości własne izometrii χ), a wtedy $\chi(v)-v=-2_{\mathbb{K}}\triangleright v\in V^\times$, również w sprzeczności z założeniem (iii). Skoro jednak $\chi(v)\notin\langle v\rangle_{\mathbb{K}}$, to $\{v,\chi(v)\}$ jest bazą V, w której wprost na mocy założenia (iii) znika gramian

$$\begin{aligned}\det{}_{(2)}\begin{pmatrix}\Phi_Q(v,v) & \Phi_Q(v,\chi(v))\\ \Phi_Q(v,\chi(v)) & \Phi_Q\big(\chi(v),\chi(v)\big)\end{pmatrix}&=\det{}_{(2)}\begin{pmatrix}Q(v) & \Phi_Q(v,\chi(v))\\ \Phi_Q(v,\chi(v)) & Q(v)\end{pmatrix}\\ =Q(v)^2-\Phi_Q\big(v,\chi(v)\big)^2&=2_{\mathbb{K}}^{-1}\cdot_{\mathbb{K}}Q\big(\chi(v)-v\big)\cdot_{\mathbb{K}}2_{\mathbb{K}}^{-1}\cdot_{\mathbb{K}}Q\big(\chi(v)+_V v\big)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,,\end{aligned}$$

co oznacza, że V jest zwyrodniała, wbrew założeniu. Ostatecznie więc $N_0\geq 3$. Rozważmy następnie izotropowy wektor $w\in V\setminus\{0_V\}$ (taki istnieje, gdyż istnieją $v\in V^\times$ (wszak Q jest niezwyrodniała), a dla takich $\chi(v)-v\in Q^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$ jest niezerowy). W świetle Stw. 10 istnieje niepuste (wszak $\dim_{\mathbb{K}}V>2$) dopełnienie Q-ortogonalne płaszczyzny hiperbolicznej zawierającej w, czyli też – wektor nieizotropowy $v\in V^\times$ o własności $\Phi_Q(v,w)=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Istotnie, $W_0\equiv W\coloneqq\langle w\rangle_{\mathbb{K}}$ uzupełnia się – wedle schematu ze Stw. 10 – do płaszczyzny hiperbolicznej H, której niezwyrodnienie jako podprzestrzeni V przesądza o istnieniu rozkładu ortogonalnego $V=H\textcircled{\perp}_Q H^{\perp_Q}$ z $H^{\perp_Q}\neq\{0_V\}$, a to z racji nierówności $\dim_{\mathbb{K}}V-\dim_{\mathbb{K}}H=N_0-2\geq 1$. Przy tym $H^{\perp_Q}$ jest koniecznie niezwyrodniała, gdyby bowiem taką nie była, to wobec ortogonalności rozkładu $V=H\textcircled{\perp}_Q H^{\perp_Q}$ sama nadprzestrzeń V byłaby zwyrodniała, niezgodnie z założeniem. Nieizotropowy wektor v

wybieramy z $H^{\perp_Q}$ właśnie, a wówczas dla dowolnego $\varepsilon \in \mathbb{K}^\times$ otrzymujemy wektor nieizotropowy $w +_V \varepsilon \triangleright v \in V$,

$$\begin{aligned} Q(w +_V \varepsilon \triangleright v) &\equiv \Phi_Q(w +_V \varepsilon \triangleright v, w +_V \varepsilon \triangleright v) = Q(w) + \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) + 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q(v,w) \\ &= \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q(v) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,, \end{aligned}$$

a zatem także – wprost na mocy (iii) – niezerowy wektor izotropowy $\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)$, przy czym warunek izotropowości tego ostatniego daje nam – w połączeniu z warunkiem izotropowości $\chi(v) - v$ – tożsamość

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_{\mathbb{K}} &= Q\big(\chi(w +_V \varepsilon \triangleright v) - (w +_V \varepsilon \triangleright v)\big) \equiv Q\big(\chi(w) - w +_V \varepsilon \triangleright \big(\chi(v) - v\big)\big) \\ &= Q\big(\chi(w) - w\big) +_{\mathbb{K}} \varepsilon^2 \cdot_{\mathbb{K}} Q\big(\chi(v) - v\big) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q\big(\chi(w) - w, \chi(v) - v\big) \\ &= Q\big(\chi(w) - w\big) +_{\mathbb{K}} 2_{\mathbb{K}} \cdot_{\mathbb{K}} \varepsilon \cdot_{\mathbb{K}} \Phi_Q\big(\chi(w) - w, \chi(v) - v\big)\,. \end{aligned}$$

Dodając do siebie obie strony powyższej równości dla $\varepsilon = -\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ i $\varepsilon = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$, otrzymujemy równość

$$Q\big(\chi(w) - w\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,,$$

słuszną dla *dowolnego* izotropowego wektora w. W konkluzji możemy zapisać, w rozpatrywanym tu przypadku (iii),

$$V_1 \coloneqq \mathrm{Image}\,(\chi - \mathrm{id}_V) \subset Q^{-1}\big(\{0_{\mathbb{K}}\}\big)$$

(zawieranie to jest implikowane wprost przez (iii) dla wektorów nieizotropowych, a dla izotropowych zostało właśnie udowodnione). Zauważmy przy tym, że

$$\forall_{x,y \in V_1} \;:\; \Phi_Q(x,y) = 2_{\mathbb{K}}^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \big(Q(x +_V y) - Q(x) - Q(y)\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} \tag{7}$$

(wszak V_1 jest podgrupą), więc V_1 jest podprzestrzenią Q-zerową,

$$V_1 \subseteq V_1^{\perp_Q}\,.$$

Wybierzmy $x \in V$ oraz $y \in V_1^{\perp_Q}$, a wtedy – w świetle powyższego –

$$\begin{aligned} \Phi_Q\big(x, \chi(y) - y\big) &= \Phi_Q\big(\chi(x), \chi(y) - y\big) - \Phi_Q\big(\chi(x) - x, \chi(y) - y\big) = \Phi_Q\big(\chi(x), \chi(y) - y\big) \\ &= \Phi_Q(x,y) - \Phi_Q\big(\chi(x), y\big) = -\Phi_Q\big(\chi(x) - x, y\big) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\,, \end{aligned}$$

czyli – wobec dowolności x i niezwyrodnienia Q –

$$\forall_{y \in V_1^{\perp_Q}} \;:\; \chi(y) - y = 0_V\,,$$

to zaś oznacza, że

$$\chi\restriction_{V_1^{\perp_Q}} = \mathrm{id}_{V_1^{\perp_Q}}\,. \tag{8}$$

Przywołując raz jeszcze warunek (iii), konkludujemy, że

$$V_1^{\perp_Q} \subset Q^{-1}(\{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\})$$

(gdyby $v \in V_1^{\perp_Q}$ miał $Q(v) \neq 0$, czyli $v \in V^\times$, to wówczas byłoby także $v - v \equiv \chi(v) - v \neq 0_V$, więc sprzeczność), a że $V_1^{\perp_Q} \subset V$ jest podgrupą, przeto jest też automatycznie podprzestrzenią Q-zerową (por. (7)), a zatem

$$V_1^{\perp_Q} \subseteq \big(V_1^{\perp_Q}\big)^{\perp_Q}\,.$$

Ostatecznie otrzymujemy ciąg inkluzji

$$V_1 \subseteq V_1^{\perp_Q} \subseteq \big(V_1^{\perp_Q}\big)^{\perp_Q} = V_1\,,$$

w którym ostatnia równość wynika wprost ze Stw. 8. Powyższe implikuje już wprost równość

$$V_1 = V_1^{\perp_Q}\,,$$

a z niej – na mocy Równ. (4) – parzystość $N_0 \equiv \dim_{\mathbb{K}} V$. Obecność w niej podprzestrzeni Q-zerowej V_1 wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \frac{N_0}{2}$, czyli maksymalnego, przesądza – w świetle Stw. 10 – o hiperboliczności

V i tym samym pozwala nam odnieść tezę Stw. 11 do izometrii χ o własności (8), tj. ograniczającej się trywialnie do maksymalnej podprzestrzeni Q-zerowej $V_1^{\perp_Q} = V_1$. Tym sposobem wnioskujemy, że χ jest w istocie obrotem, co kończy dowód. □

Literatura

[Art61] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 3, Interscience Publishers, 1961.

[Car38a] É. J. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs. I : les spineurs de l'espace à trois dimensions*, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 9, Hermann & cie., 1938.

[Car38b] ———, *Leçons sur la théorie des spineurs. II : les spineurs de l'espace à $n > 3$ dimensions, les spineurs en géométrie riemannienne*, Actualités scientifiques et industrielles: Exposés de géométrie, vol. 11, Hermann & cie., 1938.

[Die55] J.A. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 5, Springer, 1955.

[Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Graduate studies in mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, 2001.