

THE HOLY GRAIL
(MAWF '25/26 2.X & 2.XI [RRS])



Po długich i mozolnych przygotowaniach jesteśmy wreszcie w stanie przedstawić obiekty będące poszukiwanymi naturalnymi geometryzacjami struktur algebraicznych: algebry Clifforda i modułu spinorowego odnośnej grupy Spin. Zaczynamy od

Definicja 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $((V, B, \mathbb{R}^{p+q}, \pi_V), g)$ będzie rzeczywistą zorientowaną wiązką riemannowską o metryce $g \in \Gamma(V^* \otimes_{\mathbb{R}, B} V^*)$ o sygnaturze (p, q) i orientacji $(F_{SO}V, B, SO(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{SO}V})$ w rozumieniu Def. II.7-8-9.6. **Rzeczywista wiązka Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej (V, g)** to wiązka

$$(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(V, g) \equiv F_{SO}V \times_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}} \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}), B, \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}), \pi_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(V, g)})$$

stowarzyszona z wiązką zorientowanych reperów ortogonalnych $F_{SO}V$ wiązki V poprzez funkcjonalne cliffordowskie podniesienie $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}$ definiującego działania

$$\rho_{\text{def}} : SO(p, q; \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Aut}_{\square \text{Vect}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^{p,q})$$

jej grupy strukturalnej $SO(p, q; \mathbb{R})$ z modelowej przestrzeni kwadratowej $\mathbb{R}^{p,q}$ dla (V, g) do jej algebry Clifforda $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$.

Zespolona wiązka Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej (V, g) to kompleksyfikacja

$$(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(V, g) \equiv \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(V, g)^{\mathbb{C}}, B, \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})^{\mathbb{C}} \cong \text{Cliff}(\mathbb{C}^{p+q}, \delta_E^{(p+q)}), \pi_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(V, g)^{\mathbb{C}}})$$

rzeczywistej wiązki Clifforda tejże wiązki wektorowej w rozumieniu Def. 1-2.9 i Tw. I.11-12.6

Uwaga 1. Naturalnym przedstawicielem izoklas¹ (więc też modelem) wiązki Clifforda nad ciałem bazowym $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest wiązka ilorazowa

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(V, g) \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \right) / \sim_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g, \cdot, \otimes \text{id}_{\mathbb{K}}}, \quad \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$$

¹Wszak odwzorowania przejścia w $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(V, g)$ stowarzyszone z pokryciem $\mathcal{O}$ to właśnie g_{ij} (działające poprzez $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}$) – patrz: Def. 5-6.1, a przecież mamy ostatnią część tezy Tw. 1-2.2.

z oczywistą topologią i strukturą gładką, skonstruowana nad pokryciem $\mathcal{O} \equiv \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B trywializującym dla $\mathbb{V}$ przy użyciu zredukowanych odwzorowań przejścia $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ wiązki $\mathbb{V}$ (i $\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}$).

Mamy oczekiwane

Twierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Wiązka Clifforda $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest wiązką algebr Clifforda, tj. obok naturalnej struktury $\mathbb{K}$ -liniowej na $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$ istnieje iloczyn w.p.w.

$$m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)} : \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \times_B \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g),$$

cięcie globalne

$$e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)} : B \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$$

oraz monomorfizm wiązek wektorowych (w konwencji $\mathbb{V}^{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{V}$)

$$j_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} : \mathbb{V}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$$

o własnościach – wypisanych dla dowolnych $x \in B$ oraz $\Gamma \in \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)_x$ i $V_1, V_2 \in \mathbb{V}_x^{\mathbb{K}}$ –

$$\begin{cases} m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)}(\Gamma, e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)}(x)) = \Gamma = m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)}(e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)}(x), \Gamma) \\ \{j_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(V_1), j_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(V_2)\} = 2g^{\mathbb{K}}(x)(V_1 \otimes V_2) \triangleright e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)}(x) \end{cases},$$

gdzie $\{\cdot, \cdot\}$ jest antykomutatorem zdefiniowanym dla mnożenia $m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)}$, a nadto $g^{\mathbb{R}} \equiv g$, wreszcie $g^{\mathbb{C}}$ jest naturalną kompleksyfikacją struktury metrycznej na $\mathbb{V}$ geometryzującą konstrukcję z Def. I.13-14.3. Powyższe w kanoniczny sposób indukuje strukturę algebry Clifforda na $\Gamma(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g))$.

Dowód: Zaczniemy od wskazania struktury $\mathbb{R}$ -liniowej na rzeczywistej wiązce Clifforda (por. Def. 1-2.4). Mamy więc operację binarną

$$\mathbb{A} : \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \times_B \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$$

$$: \left([(p_1, \gamma_1)], [(p_2, \gamma_2)] \right) \longmapsto \left[(p_1, \gamma_1 + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2)(\gamma_2)) \right] \equiv [(p_1, \gamma_1)] + [(p_2, \gamma_2)]$$

o elemencie neutralnym (cięcie zerowe)

$$\mathbf{0}_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)} : B \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) : x \longmapsto [(p, 0)],$$

w którego zapisie p jest *dowolnym* punktem z włókna $(\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ nad punktem x w bazie, oraz działanie ciała bazowego $\mathbb{R} \ni \lambda$

$$\text{L}_{\lambda} : \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) : [(p, \gamma)] \longmapsto [(p, \lambda \triangleright \gamma)].$$

Niezależność wyniku dodawania we włóknie $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$ od wyboru reprezentantów dodawanych klas sprawdzamy w bezpośrednim rachunku, w którym dobieramy

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{p}_{\alpha} &= p_{\alpha} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_{\alpha}, \tilde{p}_{\alpha}), & \tilde{\gamma}_{\alpha} &= \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_{\alpha}, p_{\alpha})(\gamma_{\alpha}), & \alpha &\in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

a który – w odwołaniu do funktorialności Cliff i automorficznej (więc w szczególności liniowej) natury wyniku jego obliczenia na dowolnym elemencie grupy strukturalnej $\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}$, jak również Stw. 3.2 – daje nam wynik

$$\begin{aligned} & [(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1)] + [(\tilde{p}_2, \tilde{\gamma}_2)] \equiv [(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1 + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)(\tilde{\gamma}_2))] \\ & \equiv [(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \\ & \quad + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2))] \\ & = [(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \\ & \quad + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2)))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \\
 &\quad \left. \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2) \right) \right] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1))(\gamma_1) \right. \\
 &\quad + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2))(\gamma_2) \left. \right) \right] \\
 &= \left[(p_1, \gamma_1 + \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2)(\gamma_2)) \right],
 \end{aligned}$$

tożsamy z poprzednim. Stwierdzona niezależność pozwala nam „uproszczyć” formułę definiującą $\mathbb{A}$ poprzez wyzyskanie swobody wyboru reprezentantów dodawanych orbit. Oto więc drugi argument $\mathbb{A}$ możemy przedstawić w postaci

$$[(p_2, \gamma_2)] = [(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2), \gamma_2)] = [(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2)(\gamma_2))] \equiv [(p_1, \tilde{\gamma}_2)],$$

a wtedy

$$[(p_1, \gamma_1)] + [(p_2, \gamma_2)] \equiv [(p_1, \gamma_1)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_2)] = [(p_1, \gamma_1 + \tilde{\gamma}_2)].$$

Zabieg ten dowodzi naturalności zaproponowanej operacji binarnej i pokazuje, że „złożona” postać sumy elementów włókna wypisana wcześniej jest ledwie artefaktem nieuniknionej redundancji stosowanego przez nas opisu dziedziny odwzorowania (w terminach reprezentantów orbit). Bez trudu dowodzimy teraz łączności dodawania,

$$\begin{aligned}
 &([(p_1, \gamma_1)] + [(p_2, \gamma_2)]) + [(p_3, \gamma_3)] = ([(p_1, \gamma_1)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_2)]) + [(p_1, \tilde{\gamma}_3)] \\
 &= [(p_1, \gamma_1 + \tilde{\gamma}_2)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, (\gamma_1 + \tilde{\gamma}_2) + \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, \gamma_1 + (\tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3))] \\
 &\equiv [(p_1, \gamma_1)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, \gamma_1)] + ([(p_1, \tilde{\gamma}_2)] + [(p_1, \tilde{\gamma}_3)]) \\
 &\equiv [(p_1, \gamma_1)] + ([(p_1, \gamma_2)] + [(p_1, \gamma_3)]).
 \end{aligned}$$

W przypadku $\mathbb{L}_\lambda$ niezależność wyniku działania skalarów we włóknie $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})$ od wyboru reprezentanta klasy elementu z włókna jest prostą konsekwencją liniowości $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\chi)$ dla dowolnego $\chi \in \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$.

Następnie definiujemy iloczyn, o którym mowa w tezie stwierdzenia. Jest on dany wzorem

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{m}_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})} &: \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) \times_B \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) \\
 &: ([(p_1, \gamma_1)], [(p_2, \gamma_2)]) \longmapsto [(p_1, \gamma_1 \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2)(\gamma_2))] \\
 &\quad \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_2, \gamma_2)].
 \end{aligned}$$

Jest on dobrze określony, gdyż dla dowolnej innej pary reprezentantów wymnażanych orbit jak w Równ. (1) otrzymujemy wynik mnożenia

$$\begin{aligned}
 &[(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1)] \cdot [(\tilde{p}_2, \tilde{\gamma}_2)] = [(\tilde{p}_1, \tilde{\gamma}_1 \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)(\tilde{\gamma}_2))] \\
 &\equiv [(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2))] \\
 &= [(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1)(\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2)))]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1)(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \\
 &\quad \left. \circ \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2)(\gamma_2) \right) \right] \\
 &= \left[(p_1, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_1, p_1))(\gamma_1) \right. \\
 &\quad \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, \tilde{p}_1), p_2 \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_2, \tilde{p}_2)) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}_2, p_2))(\gamma_2) \left. \right) \right] \\
 &= \left[(p_1, \gamma_1 \cdot \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p_1, p_2)(\gamma_2)) \right],
 \end{aligned}$$

tożsamy z tym uzyskanym poprzednio. Ażeby upewnić się o łącznym charakterze powyższego działania, powtórzmy rozumowanie zastosowane w odniesieniu do $\mathbb{A}$, otrzymując najprostszą do pomyślenia postać iloczynu

$$[(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_2, \gamma_2)] \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_2)] = [(p_1, \gamma_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)].$$

Możemy więc zapisać, wykorzystując po drodze łączność mnożenia w $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$,

$$\begin{aligned}
 &([(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_2, \gamma_2)]) \cdot [(p_3, \gamma_3)] \equiv ([[(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_2)]] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_3)]) = [(p_1, \gamma_1 \cdot \tilde{\gamma}_2)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_3)] \\
 &= [(p_1, (\gamma_1 \cdot \tilde{\gamma}_2) \cdot \tilde{\gamma}_3)] = [(p_1, \gamma_1 \cdot (\tilde{\gamma}_2 \cdot \tilde{\gamma}_3))] \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_2 \cdot \tilde{\gamma}_3)] \\
 &\equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot ([[(p_1, \tilde{\gamma}_2)] \cdot [(p_1, \tilde{\gamma}_3)]] \equiv [(p_1, \gamma_1)] \cdot ([[(p_2, \gamma_2)] \cdot [(p_3, \gamma_3)]]).
 \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy $\mathbb{R}$ -liniowości iloczynu względem wprowadzonej wcześniej struktury $\mathbb{R}$ -liniowej (w.p.w.).

W następnej kolejności wskazujemy cięcie „jedynkowe”:

$$e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})} : B \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) : x \longmapsto [(p, e^{\text{C}})],$$

w którego zapisie p jest *dowolnym* punktem z włókna $(\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ nad punktem x w bazie. O sensowności tej definicji przekonuje krótki rachunek bezpośredni dla dowolnego $\tilde{p} \in (\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$:

$$[(\tilde{p}, e^{\text{C}})] = [(p \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p}), e^{\text{C}})] \equiv [(p, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p})(e^{\text{C}}))] = [(p, e^{\text{C}})],$$

w którym wykorzystaliśmy automorficzną naturę $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p})$ (implikującą w szczególności zachowywanie jedynki w unitalnej algebrze $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$). Bez trudu sprawdzamy pożądaną własność (neutralność względem $m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}$) powyższego cięcia (dla dowolnych $p \in (\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ i $\gamma \in \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})$):

$$[(p, \gamma)] \cdot e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}(x) \equiv [(p, \gamma)] \cdot [(p, e^{\text{C}})] = [(p, \gamma \cdot e^{\text{C}})] = [(p, \gamma)],$$

$$e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}(x) \cdot [(p, \gamma)] \equiv [(p, e^{\text{C}})] \cdot [(p, \gamma)] = [(p, e^{\text{C}} \cdot \gamma)] = [(p, \gamma)].$$

Definicja włożenia $\mathcal{J}_{\mathbb{V}}$ wymaga przywołania kanonicznego izomorfizmu

$$\widehat{e}\mathbb{V} : \text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V} \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{R}^{\times p+q} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}$$

z Rozdz. 9-10-11.1. Wykorzystując tenże, możemy zadać odwzorowanie

$$\mathcal{J}_{\mathbb{V}} \equiv [\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}] \circ \widehat{e}\mathbb{V}^{-1} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}),$$

w którego definicji

$$[\mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}] : \text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V} \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{R}^{\times p+q} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) : [(p, v)] \longmapsto [(p, \mathcal{J}_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^{\text{C}}(v))]$$

jest jawnie injektywnym morfizmem wiązek wektorowych używającym kanonicznego odwzorowania Clifforda z Def. I.7-8.2 (injektywność gwarantuje Stw. I.7-8.5). O sensowności powyższej definicji przekonujemy się w bezpośrednim rachunku z użyciem dowolnej pary

$$\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, \tilde{p}), \quad \tilde{v} = \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\tilde{p}, p)(v)$$

definiującej tę samą orbitę $[(\tilde{p}, \tilde{v})] = [(p, v)]$. Obliczamy

$$\begin{aligned} [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(\tilde{p}, \tilde{v})]) &\equiv [(\tilde{p}, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\tilde{v}))] \equiv [(p \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}} \mathbb{V}}(p, \tilde{p}), j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}} \mathbb{V}}(\tilde{p}, p)(v))] \\ &= [(p \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}} \mathbb{V}}(p, \tilde{p}), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}} \mathbb{V}}(\tilde{p}, p) \circ j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v))] \equiv [(p, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v))]. \end{aligned}$$

Na koniec dowodzimy słuszności fundamentalnych relacji antykomutacyjnych w zrekonstruowanej powyżej wiązce algebr nad B . W rachunku wykorzystujemy dotychczasowe ustalenia. Obliczamy

$$\begin{aligned} &j_{\mathbb{V}}(\widehat{\text{ev}}([(p_1, v_1)])) \cdot j_{\mathbb{V}}(\widehat{\text{ev}}([(p_2, v_2)])) + j_{\mathbb{V}}(\widehat{\text{ev}}([(p_2, v_2)])) \cdot j_{\mathbb{V}}(\widehat{\text{ev}}([(p_1, v_1)])) \\ &= [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \cdot [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) + [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) \cdot [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \\ &= [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \cdot [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, \tilde{v}_2)]) + [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, \tilde{v}_2)]) \cdot [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \\ &\equiv [(p_1, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v_1))] \cdot [(p_1, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\tilde{v}_2))] + [(p_1, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\tilde{v}_2))] \cdot [(p_1, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v_1))] \\ &\equiv [(p_1, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v_1) \cdot j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\tilde{v}_2))] + [(p_1, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\tilde{v}_2) \cdot j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v_1))] \\ &\equiv [(p_1, j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v_1) \cdot j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\tilde{v}_2) + j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\tilde{v}_2) \cdot j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(v_1))] = [(p_1, 2\delta_E^{(p,q)}(v_1 \otimes \tilde{v}_2) \triangleright e^C)]. \end{aligned}$$

Na obecnym etapie doprecyzujemy definicję włożenia $j_{\mathbb{V}}$. Niech więc $\text{F}_{\text{SO}} \mathbb{V}$ będzie podwiązką $\text{F}_{\text{GL}} \mathbb{V}$ uzyskaną poprzez wybór orientacji na zbiorze lokalnych baz w $\mathbb{V}$ stanowiących orbitę, względem naturalnego działania $\text{O}(p, q; \mathbb{R})$, ustalonej bazy (lokalnej) pseudoortonormalnej względem $g(x)$ w każdym punkcie swego nośnika (czyli wiązką zredukowaną w rozumieniu Def. 7-8-9.1). W świetle Tw. 1-2.4 wybór takiej bazy jest równoznaczny z lokalną trywializacją $\mathbb{V}$. Wybór taki jako definicja zbioru lokalnych trywializacji (modelu) $\text{F}_{\text{SO}} \mathbb{V}$ ma sens, gdyż odwzorowania przejścia tej ostatniej biorą wartości w $\text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ i jako takie przeprowadzają lokalne bazy pseudoortonormalne pochodzące z jednej trywializacji lokalnej w takie same bazy pochodzące z drugiej trywializacji lokalnej. Mamy zatem

$$\text{F}_{\text{SO}} \mathbb{V} = \bigsqcup_{x \in B} \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times p+q}, \mathbb{V}_x)^{\text{SO}(p,q;\mathbb{R})} \ni (\beta_x, x) \equiv p_1,$$

gdzie dla dowolnej bazy $\beta_x : \mathbb{R}^{\times p+q} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ spełniona jest tożsamość

$$g(x) \circ (\beta_x \otimes \beta_x) \equiv \delta_E^{(p,q)}.$$

Dla tak skonstruowanej wiązki zorientowanych baz ortogonalnych wiązki $\mathbb{V}$ możemy powrócić do dowodu fundamentalnych relacji antykomutacyjnych. Obliczamy

$$\begin{aligned} &[j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \cdot [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) + [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_2, v_2)]) \cdot [j_{\mathbb{R}^{\times p+q}}]([(p_1, v_1)]) \\ &= [(p_1, 2\delta_E^{(p,q)}(v_1 \otimes \tilde{v}_2) \triangleright e^C)] \equiv [(p_1, 2g(x) \circ (\beta_x \otimes \beta_x)(v_1 \otimes \tilde{v}_2) \triangleright e^C)] \\ &= [(p_1, 2g(x)(\beta_x(v_1) \otimes \beta_x(\tilde{v}_2)) \triangleright e^C)] \equiv [(p_1, 2g(x) \circ (\widehat{\text{ev}} \otimes \widehat{\text{ev}})([(p_1, v_1)] \otimes [(p_1, \tilde{v}_2)]) \triangleright e^C)] \\ &= [(p_1, 2g(x) \circ (\widehat{\text{ev}} \otimes \widehat{\text{ev}})([(p_1, v_1)] \otimes [(p_2, v_2)]) \triangleright e^C)] \\ &\equiv \mathbb{L}_{2g(x) \circ (\widehat{\text{ev}} \otimes \widehat{\text{ev}})([(p_1, v_1)] \otimes [(p_2, v_2)])}([(p_1, e^C)]) \equiv \mathbb{L}_{2g(x) \circ (\widehat{\text{ev}}([[(p_1, v_1)])] \otimes \widehat{\text{ev}}([[(p_2, v_2)])])}(e^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)}(x)), \end{aligned}$$

co kończy dowód dla przypadku rzeczywistego. W przypadku zespolonym dowód przebiega w pełni analogicznie, przeto jego samodzielną rekonstrukcję pozostawiamy zainteresowanemu Czytelnikowi. $\square$

Zanim zagłębimy się w studium anatomii wiązek Clifforda, a następnie otworzymy dyskusję wiązek

spinorowych, zatrzymamy się jeszcze na chwilę celem ustalenia przydatnego związku między napotkanymi tu po dłuższej przerwie cliffordowskimi (funktorialnymi) podniesieniami zachowujących orientację izometrii przestrzeni kwadratowej a izometrii tych emulacjami rozpatrywanymi na Wykładach XIII i XIV w Semestrze I. Mamy otóż

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $\chi \in \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ i niech $v_i \in \mathbb{R}^{\times p+q}$, $i \in \overline{1, 2n}$, $n \in \mathbb{N}^\times$ będą wektorami nieizotropowymi zadającymi rozkład

$$\chi = P_{v_1} \circ P_{v_2} \circ \cdots \circ P_{v_{2n}},$$

o którym mowa w Tw. I.13-14.2. (Cartana–Dieudonnégo). Wówczas zachodzi tożsamość

$$(\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}})(\chi) = \text{Ad}_{v_1.v_2..v_{2n}},$$

gdzie Ad jest homomorfizmem group z Def. I.13-14.1.

Dowód: Z racji automorficzności zarówno $(\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}})(\chi)$, jak i $\text{Ad}_{v_1.v_2..v_{2n}}$, wystarczy sprawdzić tożsamość na układzie generującym $\text{Cl}_{p,q}^\mathbb{R}$. Jej prawdziwość na e^C jest oczywista. Pozostają generatory z $J_{\mathbb{R}^{\times p+q}}^C(\mathbb{R}^{\times p+q}) \ni v$, dla których dostajemy

$$\begin{aligned} (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}})(\chi)(v) \equiv \chi(v) &= (P_{v_1} \circ P_{v_2} \circ \cdots \circ P_{v_{2n}})(v) = (\widetilde{\text{Ad}}_{v_1} \circ \widetilde{\text{Ad}}_{v_2} \circ \cdots \circ \widetilde{\text{Ad}}_{v_{2n}})(v) \\ &= (-1)^{2n} (\text{Ad}_{v_1} \circ \text{Ad}_{v_2} \circ \cdots \circ \text{Ad}_{v_{2n}})(v) = (\text{Ad}_{v_1} \circ \text{Ad}_{v_2} \circ \cdots \circ \text{Ad}_{v_{2n}})(v) \\ &= \text{Ad}_{v_1.v_2...v_{2n}}(v), \end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu uwzględniliśmy homomorficzny charakter reprezentacji dołączonej. $\square$

Swoistą odwrotnością powyższego jest

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Dla dowolnego $u \in \text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$ spełniona jest tożsamość

$$\text{Ad}_u = (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \widetilde{\text{Ad}})(u),$$

gdzie $\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, Q) \longrightarrow \text{GL}(V; \mathbb{K})$ jest homomorfizmem group zdefiniowanym w Stw. I.13-14.3.

Dowód: Wobec $u \in \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \subset \text{Pin}(p, q; \mathbb{R})$ istnieją wektory nieizotropowe v_i , $i \in \overline{1, 2n}$, $n \in \mathbb{N}^\times$, dla których spełniona jest równość $v_1.v_2...v_{2n} = u$. W świetle Stw. 1 jest zatem

$$\text{Ad}_u = (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}})(P_{v_1} \circ P_{v_2} \circ \cdots \circ P_{v_{2n}}).$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika z tożsamości

$$\widetilde{\text{Ad}}_u(v) = (\widetilde{\text{Ad}}_{v_1} \circ \widetilde{\text{Ad}}_{v_2} \circ \cdots \circ \widetilde{\text{Ad}}_{v_{2n}})(v) \equiv (P_{v_1} \circ P_{v_2} \circ \cdots \circ P_{v_{2n}})(v),$$

słusznej dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^{\times p+q}$. $\square$

Pierwszym krokiem na drodze ku geometryzacji spinorowej reprezentacji $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_\mathbb{K}$ jest identyfikacja w przestrzeni totalnej $\mathcal{Cl}_\mathbb{K}(\mathbb{V}, g)$ dwóch gładko zanurzonych podrozmaitości będących geometryzacjami podprzestrzeni $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_\mathbb{K}^n$, $n \in \{0, 1\}$ o ustalonej parzystości. O ich istnieniu orzeka

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Istnieje kanoniczny rozkład wiązki Clifforda

$$\mathcal{Cl}_\mathbb{K}(\mathbb{V}, g) \cong \mathcal{Cl}_\mathbb{K}(\mathbb{V}, g)^0 \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{Cl}_\mathbb{K}(\mathbb{V}, g)^1$$

na sumę Whitneya podwiązek własnych $\mathcal{Cl}_\mathbb{K}(\mathbb{V}, g)^n$, $n \in \{0, 1\}$ inwolutywnego automorfizmu wiązki Clifforda

$$J_{\mathbb{V}^\times} : \mathcal{Cl}_\mathbb{K}(\mathbb{V}, g) \xrightarrow{\cong} \mathcal{Cl}_\mathbb{K}(\mathbb{V}, g)$$

stanowiącego podniesienie automorfizmu

$$P_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} : \mathbb{V}^{\mathbb{K}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}^{\mathbb{K}}$$

o ograniczeniach

$$P_{\mathbb{V}_x^{\mathbb{K}}} : \mathbb{V}_x^{\mathbb{K}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x^{\mathbb{K}} : v \mapsto -v.$$

Dowód: Tym razem w dowodzie odwołamy się do modelu lokalnego² $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})$ z Uwagi 1. Jest oczywiste, że w obrazie lokalnym podniesienie P_V , o którym mowa w treści dowodzonego stwierdzenia, przybiera postać

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}} : \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \ni (x, \gamma) \mapsto (x, J_{\mathbb{R}^{p+q}}(\gamma)),$$

gdzie $J_{\mathbb{K}^{p+q}} \in \text{Aut}_{\mathbf{uAssAlg}_{\mathbb{K}}}(\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}})$ jest inwolucją główną z Def. 4 z Wykładów VIII, IX i X z semestru I, wobec czego lokalnie mamy rozkład wiązki trywialnej na sumę prostą podwiązek własnych

$$(2) \quad \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} = (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^0) \oplus_{\mathbb{R}, \mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^1).$$

Pozostaje upewnić się, że rozkład ten jest zachowywany przez utożsamienia dokonywane nad przecięciami $\mathcal{O}_{ij} \ni x$ pokrycia trywializującego. Te jednak są postaci (patrz: Tw. 2-3-4.2)

$$(3) \quad (x, \gamma, i) \sim (x, (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\gamma), j),$$

gdzie $g_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ są odwzorowaniami przejścia $F_{\text{SO}}\mathbb{V}$, przeto utożsamienie punktów we włóknie nad przecięciem dziedzin trywializacji zachowuje parzystość transformowanego elementu algebry Clifforda na mocy Stw. 1 (sprzężenie Ad_{v_i} nie zmienia parzystości sprzęganego elementu algebry Clifforda—nawiasem mówiąc, fakt ten jest niezależny od tego, czy poprzez sprzężenie działa parzysta, czy nieparzysta liczba wektorów nieizotropowych, zatem na tym etapie konkretna postać $\text{SO}(p, q; \mathbb{R}) \subset \text{O}(p, q; \mathbb{R})$ przeciwdziedziny g_{ji} *nie* jest istotna). W interesującym nas kontekście fakt ten przesądza o globalnym charakterze rozkładu (2). $\square$

Mamy również istotne

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, w szczególności ten z Tw. 1 oraz Def. I.11-12.1 i I.11-12.2. Wiązka $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})$ ma cięcie globalne – zwane **cięciem objętości** –

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}} : B \rightarrow \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) : x \mapsto [(\sigma(x), \omega_{\mathbb{K}})],$$

w którego zapisie σ jest *dowolnym* cięciem $F_{\text{SO}}\mathbb{V}$ na dowolnym otoczeniu punktu x w bazie. Ilekroć $p + q \in 2\mathbb{N}$, jest

$$\forall_{x \in B} \forall_{\Gamma \in \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})_x^1} : \{\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x), \Gamma\} = \mathbf{0}_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}(x),$$

w pozostałych zaś przypadkach, $p + q \in 2\mathbb{N} + 1$ jest

$$\forall_{x \in B} \forall_{\Gamma \in \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})_x^1} : [\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x), \Gamma] = \mathbf{0}_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}(x).$$

Ponadto gdy $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ i $q - p \equiv 3 \pmod{4}$, zachodzi tożsamość

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\cdot) \cdot \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\cdot) = e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}(\cdot)$$

i rzeczywista wiązka Clifforda jest sumą Whitneya

$$(4) \quad \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) \cong \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^-$$

podwiązek własnych cięcia objętości (samodualnych (+) wzgl. antysamodualnych (-)), o własnościach

$$\forall_{x \in B} \forall_{\Gamma^{\pm} \in \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})_x^{\pm}} : \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(x) \cdot \Gamma^{\pm} = \pm \Gamma^{\pm},$$

odwzorowywanych w siebie wzajemnie przez inwolutywny automorfizm $J_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}$,

$$J_{\mathbb{V}^{\mathbb{R}}}(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^{\pm}) = \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^{\mp}.$$

²Zmiana schematu dowodzenia jest podyktowana li tylko wolą pozostawienia Czytelnika z bogatszym arsenałem metod rachunkowych, które mogą okazać się przydatne w przyszłości. Przeprowadzenie dowodu bez odwoływania się do modelu nie powinno nastręczyć Czytelnikowi żadnych trudności.

Ilekcioć zaś $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ i $p + q \equiv 1 \pmod{2}$, zachodzi tożsamość

$$\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(\cdot) \cdot \omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(\cdot) = e^{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}(\cdot)$$

i zespolona wiązka Clifforda jest sumą Whitneya

$$\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) \cong \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^-$$

podwiązek własnych cięcia objętości (samodualnych (+) wzgl. antysamodualnych (-)), o własnościach

$$\forall_{x \in B} \quad \forall_{\Gamma^{\pm} \in \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})_{\pm}^{\pm}} : \omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(x) \cdot \Gamma^{\pm} = \pm \Gamma^{\pm},$$

odwzorowywanych w siebie wzajemnie przez inwolutywny automorfizm $J_{\mathbb{V}\mathbb{C}}$,

$$J_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^{\pm}) = \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})^{\mp}.$$

Dowód: Sensowność definicji cięcia objętości wynika wprost z definicji $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})$, która pozwala zapisać, dla dowolnego innego cięcia $\tilde{\sigma}$ na otoczeniu x ,

$$\begin{aligned} [(\tilde{\sigma}(x), \omega_{\mathbb{K}})] &= [(\sigma(x) \triangleleft \phi_{\text{FsoV}}(\sigma(x), \tilde{\sigma}(x)), \omega_{\mathbb{K}})] \\ &= [(\sigma(x), (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FsoV}}(\sigma(x), \tilde{\sigma}(x)) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\omega_{\mathbb{K}}))], \end{aligned}$$

a nadto z elementarnej własności transformacyjnej elementu objętości:

Lemat 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $\chi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(p + q)$ i niech $\chi^* \omega_{\mathbb{K}}$ będzie elementem $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ otrzymanym z $\omega_{\mathbb{K}}$ przez zastąpienie elementu e_i , $i \in \overline{1, p+q}$ bazy (pseudo)ortonormalnej $\mathbb{R}^{p,q}$ w jego definicji (patrz: Def. I.11-12.1 i I.11-12.2) elementem $\chi(e_i)$. Wówczas zachodzi tożsamość

$$\chi^* \omega_{\mathbb{K}} = \det \chi \triangleright \omega_{\mathbb{K}}.$$

Dowód Lematu 1.: Proste ćwiczenie wykorzystujące relacje antykomutacyjne między elementami bazy e_i . $\square$

Wobec powyższego

$$[(\tilde{\sigma}(x), \omega_{\mathbb{K}})] = [(\sigma(x), \det \phi_{\text{FsoV}}(\sigma(x), \tilde{\sigma}(x)) \triangleright \omega_{\mathbb{K}})] = [(\sigma(x), \omega_{\mathbb{K}})].$$

Przechodząc do drugiej części tezy stwierdzenia, zauważamy, że w modelu $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g}) \cong \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ istnienie postulowanych podwiązek własnych nad elementami pokrycia trywializującego jest konsekwencją Stw. I.11-12.2 i I.11-12.5 – oto mamy

$$\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}} \cong (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^+) \oplus_{\mathbb{K}, \mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^-).$$

Nad przecięciami $\mathcal{O}_{ij} \ni x$ dokonujemy utożsamień (3), jeśli zatem

$$\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(x) \cdot \Gamma^{\pm} = \pm \Gamma^{\pm},$$

to także – na mocy Stw. 1, w połączeniu z Tw. I.9-10.1,

$$(5) \quad \forall_{\gamma \in \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^0 \supset \text{SO}(p,q;\mathbb{R})} : [\omega_{\mathbb{K}}, \gamma] = 0,$$

oraz definicją $m_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbf{g})}$ z konstruktywnego dowodu Tw. 1 –

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(x) \cdot (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\Gamma^{\pm}) &= (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}(x) \cdot \Gamma^{\pm}) \\ &= \pm (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ g_{ji}(x) \otimes \text{id}_{\mathbb{K}})(\Gamma^{\pm}), \end{aligned}$$

a w takim razie powyższy rozkład na podwiązki własne w dziedzinach lokalnych trywializacji jest zachowywany przez utożsamienia, skąd wniosek globalny (4). (Należy podkreślić, że w *ty*m przypadku – w odróżnieniu od tego z dowodu Stw. 4 – parzystość reprezentacji elementu przeciwdziedziny g_{ji} w terminach odbić *jest* istotna.) Wszystkie pozostałe składowe tezy są powtórzeniem treści Stw. I.11-12.2 i I.11-12.5, uprawomocnionym przez dotychczasowe rozumowanie. $\square$

Mamy w ręku wszystkie narzędzia niezbędne do wskazania z dawna wyczekiwanej geometryzacji modułu spinorowego. Zaczniemy od konstrukcji pomocniczej:

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Niechaj $((\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times p+q}, \pi_{\mathbb{V}}), g)$ będzie rzeczywistą zorientowaną wiązką riemannowską o metryce $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$ o sygnaturze (p, q) i orientacji $(F_{SO} \mathbb{V}, B, SO(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{SO} \mathbb{V}})$ w rozumieniu Def. 7-8-9.6. **Struktura spinowa na riemannowskiej wiązce wektorowej** $(\mathbb{V}, g)$ to wybór prolongacji

$$(6) \quad (\Xi, \text{id}_B, \xi) : (F_{\text{Spin}} \mathbb{V}, B, \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{Spin}} \mathbb{V}}) \longrightarrow (F_{SO} \mathbb{V}, B, SO(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{SO} \mathbb{V}})$$

wiązki zorientowanych baz ortogonalnych $\mathbb{V}$ wzdłuż nakrycia uniwersalnego

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathcal{J}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \xrightarrow{\xi \equiv \widetilde{\text{Ad}} \cdot \upharpoonright_{\mathbb{R}^{\times p+q} \subset \text{Cliff}(\mathbb{R}^p, q)}} SO(p, q; \mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

z Tw. I.13-14.1. W tym kontekście wiązkę główną $(F_{\text{Spin}} \mathbb{V}, B, \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{Spin}} \mathbb{V}})$ określa się mianem **wiązki baz** (lub **reperów**) **spinowych riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, g)$.

I wreszcie

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności – Def. 2. **Wiązka rzeczywistych modułów Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, g)$ to wiązka

$$(\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{\text{Spin}} \mathbb{V} \times_{\rho \upharpoonright_{\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})}} W, B, W, \pi_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)})$$

stowarzyszona z wiązką baz spinowych $F_{\text{Spin}} \mathbb{V}$ wiązki $\mathbb{V}$ poprzez ograniczenie reprezentacji

$$\rho \equiv \rho^{\mathbb{R}} : \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^* \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W), \quad \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^* \in \{\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q}), \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^0\}$$

(nietrywialnego) rzeczywistego modułu Clifforda (W, ρ) pełnej algebry Clifforda $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})$ lub³ jej podalgebry parzystej $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$ do jej grupy strukturalnej $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$. Ilekroć $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^* = \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$, a moduł $(W, \rho) \equiv (S, \sigma)$ jest nieprzywiedlny, mówimy o **rzeczywistej wiązce spinorowej riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, g)$, którą oznaczamy symbolem

$$(\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{\text{Spin}} \mathbb{V} \times_{\sigma \upharpoonright_{\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})}} S, B, S \equiv S^{\mathbb{R}}, \pi_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)}).$$

Wiązka zespolonych modułów Clifforda riemannowskiej wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, g)$ to wiązka

$$(\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{\text{Spin}} \mathbb{V} \times_{\rho \upharpoonright_{\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}} W^{\mathbb{C}}, B, W^{\mathbb{C}}, \pi_{\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)})$$

stowarzyszona z wiązką baz spinowych $F_{\text{Spin}} \mathbb{V}$ wiązki $\mathbb{V}$ poprzez ograniczenie reprezentacji

$$\rho^{\mathbb{C}} \equiv \rho \otimes \text{id}_{\mathbb{C}} : \text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q})^* \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(W^{\mathbb{C}}), \quad \text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q})^* \in \{\text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q}), \text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q})^0\}$$

(nietrywialnego) skompleksyfikowanego modułu Clifforda $(W^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}})$ skompleksyfikowanej pełnej algebry Clifforda $\text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q})$ lub jej podalgebry parzystej $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$ do jej grupy strukturalnej $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) (\subset \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q}) \otimes 1 \subset \text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q}))$. Ilekroć $\text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q})^* = \text{Cliff}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$, a moduł $(W^{\mathbb{C}}, \rho^{\mathbb{C}}) \equiv (S^{\mathbb{C}}, \sigma^{\mathbb{C}})$ jest nieprzywiedlny, mówimy o **zespolonej wiązce spinorowej riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, g)$, którą oznaczamy symbolem

$$(\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g) \equiv F_{\text{Spin}} \mathbb{V} \times_{\sigma \upharpoonright_{\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})} \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}} S^{\mathbb{C}}, B, S^{\mathbb{C}}, \pi_{\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)}).$$

W szczególności gdy $\mathbb{V} \equiv TM$ jest wiązką styczną (zorientowanej) rozmaitości różniczkowalnej (riemannowskiej), mówimy o **rzeczywistej** wzgl. **zespolonej wiązce spinorowej nad rozmaitością** M , którą oznaczamy symbolem

$$(\mathcal{I}_{\mathbb{K}}(M, g) \equiv F_{\text{Spin}} TM \times_{\sigma \upharpoonright_{\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})} \otimes \text{id}_{\mathbb{K}}} S^{\mathbb{K}}, B, S^{\mathbb{K}}, \pi_{\mathcal{I}_{\mathbb{K}}(M, g)}), \quad \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

³W większości przypadków – w szczególności zaś w kontekście klasyfikacyjnym – będziemy rozważać przypadek drugi, tj. $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^* = \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$. Dopiero definicja operatora Diraca będzie wymagać od nas zrealizowania pełnej algebry Clifforda na W .

Uwaga 2. Naturalnym przedstawicielem izoklasy (więc też modelem) wiązki modułów Clifforda nad ciałem bazowym $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zorientowanej riemannowskiej wiązki wektorowej jest wiązka ilorazowa (zapisana w konwencji $(W^{\mathbb{R}}, \rho^{\mathbb{R}}) \equiv (W, \rho)$)

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times W^{\mathbb{K}} \right) / \sim_{\rho^{\mathbb{K}} \circ \widehat{g}_{\cdot, \cdot}},$$

z oczywistą topologią i strukturą gładką, skonstruowana nad pokryciem $\mathcal{O} \equiv \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B trywializującym dla $\mathbb{V}$ przy użyciu zredukowanych odwzorowań przejścia $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ wiązki baz spinowych $\mathbb{V}$.

Uwaga 3. Podany przez nas schemat geometryzacji spinorowego modułu Clifforda jest bodaj najbardziej rozpowszechnionym, lecz bynajmniej nie jedynym rozpatrywanym przez matematyków i fizyków. W alternatywnym podejściu zaproponowanym przez Tetrodego, Schrödingera, Infelda, van der Waerdena i Focka rozważa się (dowolne) wiązki wektorowe o włóknach niosących strukturę spinorowego modułu Clifforda względem włókien (odnośnych, nad tym samym punktem bazy) wiązki. Relacje pomiędzy oboma podejściami w kontekście teorii wiązek włóknistych dyskutuje Andrzej Trautman w swej pracy pt. “Connections and the Dirac operator on spinor bundles” [Tra08]. Warto przy tej okazji przypomnieć, że Profesor Trautman był jednym z pionierów zastosowań teorii wiązek włóknistych w opisie zjawisk fizycznych (patrz np.: jego wczesna praca [Tra70]). Autor niniejszego wykładu poczytuje sobie za przywilej możliwość uczenia się elementów teorii spinorów (oraz teorii grup i teorii wiązek włóknistych) wprost od Arcymistrza „Spinorowej Szachownicy” [BT88] i przekazywania pozyskanej tą drogą wiedzy dalej – wprost z podarowanej mu przez Arcymistrza autorskiej kopii monografii.

Przedstawiwszy zwartą definicję obiektu pożądanego, możemy obecnie przejść do studium jego (nie mniej pożądanego) właściwości. Pierwsze z twierdzeń wieńczących nasze wielotygodniowe wysiłki uprawomocnia myślenie o wiązkach spinorowych jako geometryzacjach modułów spinorowych.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 i 3 oraz Stw. 3. Wiazka spinorowa $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest wiązką nieprzywiedlnych (parzystych) modułów Clifforda, tj. obok naturalnej struktury $\mathbb{K}$ -liniowej na $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$ istnieje działanie w.p.w.

$$\Sigma : \mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)^0 \times_B \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)$$

lokalnie modelowane na działaniu podalgebry parzystej $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}^0$ algebry Clifforda $\text{Cliff}(\mathbb{R}^{p,q})_{\mathbb{K}}$ na jej module $S^{\mathbb{K}}$ indukowanym przez reprezentację spinorową $\rho^{\mathbb{K}}$. Powyższe w kanoniczny sposób indukuje strukturę spinorowego $\Gamma(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g)^0)$ -modułu na $\Gamma(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, g))$.

Dowód: Dowód przeprowadzamy dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$, pozostawiając jego powtórzenie dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ upartemu Czytelnikowi.

Istnienie struktury $\mathbb{R}$ -liniowej na $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$ weryfikujemy analogicznie jak w przypadku $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$, tę zatem część dowodu także pomijamy.

Pierwszoplanową rolę w konstrukcji działania w.p.w. Σ odgrywa morfizm prolongacji (6), który pozwala powiązać ze sobą działania grup strukturalnych obu wiązek baz: $\text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ na $\text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})^0$ i nakrywającej $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$ na $S^{\mathbb{R}}$. Przy pomocy tego morfizmu definiujemy

$$\Sigma : \mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)^0 \times_B \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$$

$$: \left([(p, \gamma)], [(\widehat{p}, v)] \right) \longmapsto \left[(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FSO}} \mathbb{V}(\Xi(\widehat{p}), p)(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v) \right] \equiv [(p, \gamma)] \triangleright [(\widehat{p}, v)],$$

gdzie gwoli odciążenia zapisu użyliśmy oznaczenia

$$\gamma \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v \equiv \sigma^{\mathbb{R}}(\gamma)(v),$$

które ma tutaj zastosowanie, gdyż reprezentujemy obraz elementu γ podalgebry parzystej względem zachowującego parzystość automorfizmu $\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{FSO}} \mathbb{V}(\Xi(\widehat{p}), p)$, patrz: Stw. 1. Powyższa definicja nie jest pozbawiona sensu w sposób oczywisty, oto bowiem – wobec pokrywania id_B przez morfizm wiązek Ξ –

$$\pi_{\text{FSO}} \mathbb{V} \circ \Xi(\widehat{p}) = \pi_{\text{FSpin}} \mathbb{V}(\widehat{p}) \equiv \pi_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)}([(\widehat{p}, v)]) = \pi_{\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)}([(p, \gamma)]) \equiv \pi_{\text{FSO}} \mathbb{V}(p),$$

zatem element grupy strukturalnej $\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p) \in \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$ jest dobrze określony. Na obecnym etapie pozostaje jeszcze upewnić się, że wartość przyjmowana przez Σ na wypisanej parze orbit nie zależy od wyboru ich reprezentantów. W tym celu wybieramy pary:

$$p' = p \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p, p'), \quad \gamma' = \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p', p)(\gamma)$$

oraz

$$\widehat{p}' = \widehat{p} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}'), \quad v' = \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v$$

i obliczamy – wykorzystując po drodze funktorialność Cliff i automorficzną (więc w szczególności liniową) naturę wyniku jego obliczenia na dowolnym elemencie grupy strukturalnej $\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}$, jak również Stw. 3.2 –, co następuje:

$$\begin{aligned} & [(p', \gamma')] \triangleright [(\widehat{p}', v')] \equiv [(\widehat{p}', \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), p')(\gamma') \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v')] \\ & \equiv [(\widehat{p} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}'), (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), \Xi(\widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p')) \\ & \quad \circ (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p', p))(\gamma) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v))] \\ & = [(\widehat{p} \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}'), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), \Xi(\widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p') \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(p', p))(\gamma) \\ & \quad \cdot \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}')^{-1} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v))] \\ & = [(\widehat{p}, \text{Ad}_{\phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}')}(\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}'), \Xi(\widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p))(\gamma)) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)]. \end{aligned}$$

Przywoławszy Stw. 2 w odniesieniu do $\phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}') \in \text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$, jak również definiującą relację między Ξ i ξ , upraszczamy powyższe:

$$\begin{aligned} & [(p', \gamma')] \triangleright [(\widehat{p}', v')] \\ & \equiv [(\widehat{p}, (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}')) \circ (\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v))] \\ & \equiv [(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}') \cdot \xi \circ \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p}) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v))] \\ & = [(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}(\xi(\phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}, \widehat{p}') \cdot \phi_{\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V}}(\widehat{p}', \widehat{p})) \cdot \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p))(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v))] \\ & = [(\widehat{p}, \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)(\gamma) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)], \end{aligned}$$

co ostatecznie daje nam wyjściowe wyrażenie. Mając swobodę wyboru reprezentantów, możemy – jak poprzednio – dokonać wyboru roztropnego,

$$p = \Xi(\widehat{p}),$$

który pozwala zdemistyfikować pozorną nieoczywistość formuły definicyjnej na Σ . Przepisawszy stosownie pierwszy z argumentów,

$$[(p, \gamma)] = [(\Xi(\widehat{p}) \triangleleft \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p), \gamma)] = [(\Xi(\widehat{p}), \text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}} \circ \phi_{\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V}}(\Xi(\widehat{p}), p)(\gamma))] \equiv [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma})],$$

otrzymujemy antycypowany wynik

$$(7) \quad [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma})] \triangleright [(\widehat{p}, v)] = [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)],$$

który przekonuje nas o tym, że mamy do czynienia z geometryzacją modułu spinorowego.

W następnej kolejności sprawdzamy, że Σ jest działaniem, przywołując w tym celu postać iloczynu w.p.w. w wiązce algebr Clifforda $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathfrak{g})$ z dowodu Tw. 1 (w ograniczeniu do podwiązki podalgebr parzystych). Dostajemy więc – dla dowolnych $p_1, p_2 \in (\text{F}_{\text{SO}}\mathbb{V})_x$ i $\widehat{p} \in (\text{F}_{\text{Spin}}\mathbb{V})_x$ nad wspólnym $x \in B$ oraz $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Cliff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{p,q})^0$ i $v \in S^{\mathbb{R}}$, które możemy zawsze przepisać w wygodnej postaci, zarówno w formule na działanie, jak i w formule na mnożenie, co czynimy poniżej –

$$\begin{aligned} & [(p_2, \gamma_2)] \triangleright [(p_1, \gamma_1)] \triangleright [(\widehat{p}, v)] = [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_1)] \triangleright [(\widehat{p}, v)] \\ & = [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma}_1 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)] = [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma}_2 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} (\widetilde{\gamma}_1 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v))] = [(\widehat{p}, \widetilde{\gamma}_2 \cdot \widetilde{\gamma}_1 \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} v)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\equiv [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_1 \cdot \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright [(\widehat{p}, v)] \equiv [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_1)] \cdot [(\Xi(\widehat{p}), \widetilde{\gamma}_2)] \triangleright [(\widehat{p}, v)] \\
 &= [(p_2, \gamma_2)] \cdot [(p_1, \gamma_1)] \triangleright [(\widehat{p}, v)],
 \end{aligned}$$

to zaś jest wynikiem pożądanym.

Na koniec upewniamy się, że rozpatrywane przez nas działanie jest modelowane lokalnie na $\sigma^{\mathbb{R}}$. Rzecz jasna, jest to jedyna możliwa interpretacja formuły demistyfikacyjnej (7), my jednak wykonamy niezależny rachunek z użyciem stosownych izomorfizmów modelujących włókna (patrz: Def. 5-6.1), trzymając się rozumienia pojęcia „modelowania lokalnego” zaproponowanego w dowodzie Stw. 5-6.4. Wybieramy zatem (dowolnie) punkt $x \in B$, a nad nim (także dowolnie) – referencyjny punkt $\widehat{p}_* \in (F_{\text{Spin}} \mathbb{V})_x$. W tym momencie możemy już wykorzystać swobodę wyboru referencyjnego punktu $p_* \in (F_{\text{SO}} \mathbb{V})_x$, kładąc $p_* \equiv \Xi(\widehat{p}_*)$. Na koniec dokonujemy wygodnych korekt wyborów reprezentantów rozpatrywanych orbit (j/w), aby ostatecznie dostać

$$\begin{aligned}
 &[\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([(p, \gamma)] \triangleright [(\widehat{p}, v)]) = [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([(\Xi(\widehat{p}_*), \widetilde{\gamma})] \triangleright [(\widehat{p}_*, \widetilde{v})]) \equiv [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([\widehat{p}_*, \widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} \widetilde{v}]) \\
 &\equiv \widetilde{\gamma} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} \widetilde{v} \equiv [\Xi(\widehat{p}_*)]_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}}([(\Xi(\widehat{p}_*), \widetilde{\gamma})] \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([\widehat{p}_*, \widetilde{v})]) \\
 &= [\Xi(\widehat{p}_*)]_{\text{Cliff} \circ \rho_{\text{def}}}([(p, \gamma)] \triangleright_{\sigma^{\mathbb{R}}} [\widehat{p}_*]_{\sigma^{\mathbb{R}}}([\widehat{p}, v)]),
 \end{aligned}$$

co jest wynikiem satysfakcjonującym, który domyka dowód. $\square$

I wreszcie w podsumowaniu czysto geometrycznej części wykładu w II semestrze wypowiadamy

Twierdzenie 3 (Klasyfikacyjne dla wiązek spinorowych). Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Wiązka modułów Clifforda riemannowskiej zorientowanej wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, g)$ jest rozkładalna na sumę Whitneya podwiązek nieprzywiedlnych, tj. takich, których włókna są nieprzywiedlnymi modułami Clifforda. Przy tym o ile baza B wiązki jest spójna, liczba i typ $(\mathbb{R}, \mathbb{C}$ wzgl. $\mathbb{H})$ nierównoważnych podwiązek nieprzywiedlnych jest określana przez Twierdzenia Klasyfikacyjne I.17-18.1. i I.17-18.2. W szczególności dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ i $q - p \equiv 0 \pmod{4}$ cięcie objętości $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{R}} \in \Gamma(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g))$ określa rozkład rzeczywistej wiązki spinorowej $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)$, nazywanej w tych okolicznościach **rzeczywistą wiązką Diraca riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, g)$, na sumę Whitneya

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g) \cong \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)^-$$

podwiązek własnych $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, g)^{\pm}$ cięcia $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{R}}$ (stowarzyszonych z wartościami własnymi ± 1 , odpowiednio), zwanych **rzeczywistymi chiralnymi podwiązkami Weyla**. Analogicznie dla $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ i $p + q \equiv 0 \pmod{2}$ cięcie objętości $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}} \in \Gamma(\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g))$ określa rozkład zespolonej wiązki spinorowej $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)$, nazywanej w tych okolicznościach **zespoloną wiązką Diraca riemannowskiej wiązki wektorowej** $(\mathbb{V}, g)$, na sumę Whitneya

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g) \cong \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)^+ \oplus_{\mathbb{C}, B} \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)^-$$

podwiązek własnych $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}, g)^{\pm}$ cięcia $\omega_{\mathbb{V}\mathbb{C}}$ (stowarzyszonych z wartościami własnymi ± 1 , odpowiednio), zwanych **zespolonymi chiralnymi podwiązkami Weyla**.

Dowód: Wszystkie konstatacje wypowiedziane w treści twierdzenia są prostymi konsekwencjami dotychczasowych ustaleń, z których wyłania się spójny obraz wiązki Clifforda jako geometryzacji struktury algebry Clifforda (w istocie wiązki algebr Clifforda) zgodnej z własnościami tej ostatniej oraz wiązki modułów Clifforda jako geometryzacji struktury modułu Clifforda (w istocie wiązki modułów Clifforda) zgodnej z własnościami tego ostatniego, przy czym własności te są szczególnie wyrażone widoczne w obrazie lokalnym w modelach zaproponowanych w Uwagach 1 i 2, odpowiednio, a zarazem w oczywisty sposób zachowywane przez utożsamienia dokonywane nad przecięciami dziedziny lokalnych trywializacji wobec zawierania $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \subset \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p, q})^0 \equiv \text{Cliff}(\mathbb{R}^{p, q})^0 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \subset \text{Cliff}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^{p, q})^0$. Jako ilustrację tej reguły prześledzimy mechanizm

utożsamiania ze sobą nad $\mathcal{O}_{ij}$ podwiązek własnych cięcia objętości z obrazu lokalnych trywializacji

$$\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K}} \cong (\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K},+}) \oplus_{\mathbb{K}, \mathcal{O}_i} (\mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K},-}).$$

Niechaj zatem

$$(x, v^{\pm}) \in \mathcal{O}_i \times S^{\mathbb{K},\pm},$$

czyli

$$(x, \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) \equiv \omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x) \triangleright (x, v^{\pm}) = \pm(x, v^{\pm}).$$

Ilekroć $x \in \mathcal{O}_{ij}$, dokonujemy utożsamienia

$$(x, v^{\pm}, i) \sim (x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}, j).$$

Uwzględnivszy (5) (i parzystość odwzorowań przejścia), stwierdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\omega_{\mathbb{V}^{\mathbb{K}}}(x) \triangleright (x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) = (x, \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} (\widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm})) = (x, \omega^{\mathbb{K}} \cdot \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm})$$

$$= (x, \widehat{g}_{ji}(x) \cdot \omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}) = (x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} (\omega^{\mathbb{K}} \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm})) = \pm(x, \widehat{g}_{ji}(x) \triangleright_{\sigma^{\mathbb{K}}} v^{\pm}),$$

że składowe o różnej chiralności nie mieszają się ze sobą pod wpływem utożsamienia, co przesądza o globalnej naturze rozkładu wiązki Diraca na chiralne podwiązki Weyla. $\square$

Powyższy wynik zamyka czysto geometryczną część studium wiązek spinorowych. Różniczkowanie czas zacząć!



LITERATURA

- [BT88] P. Budinich and A.M. Trautman, *The Spinorial Chessboard*, Trieste Notes in Physics, Springer, 1988.
- [Tra70] A.M. Trautman, “Fibre bundles associated with space-time”, Rep. Math. Phys. **1** (1970), 29–62.
- [Tra08] ———, “Connections and the Dirac operator on spinor bundles”, J. Geom. Phys. **58** (2008), 238–252.