

O TYM, ŻE ZAWSZE WARTO MIEĆ KONEKSJE
(MAWF '25/26 2.XII [RRS])



FIGURE 1. Plakatu do filmu pt. „Ojciec chrzestny” z 1972 r. z Marlonem Brando w roli głównej.

W studiach nad strukturą stycznosciową wiązek włóknistych oraz w obiektach tych zastosowaniach – począwszy od badań ich topologii (topologia różniczkowa, zagadnienia wariacyjne *etc.*), a skończywszy na modelowaniu fizycznym z ich wykorzystaniem („dynamika” cięć opisywana przez zasadę wariacyjną dla wyróżnionego funkcjonału działania określonego na zbiorze cięć, procedura cechowania symetrii globalnych modelu fizycznego, opis tła grawitacyjnego wzgl. elektromagnetycznego dynamiki punktu materialnego oraz tła tego fluktuacji *etc.*) – nierzadko pojawia się potrzeba nadania strukturalnego sensu geometrycznego operacji różniczkowania cięć wiązki, tj. wskazania takiej definicji ich pochodnej, która określi obiekt globalnie gładki o prostych własnościach transformacyjnych względem automorfizmów wiązki oraz, w obecności dodatkowej struktury na włóknie (jak struktura liniowa lub struktura torsora grupy Liego, czy też struktura modułu względem wiązki algebr *etc.*), w jakimś naturalnym sensie uzgodniony z ową strukturą. Jako że w obrazie lokalnej trywializacji $\tau : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times F$ (nad elementem $\mathcal{O}$ topologii $\mathcal{T}(B)$ bazy B wiązki (E, B, F, π_E)) dowolne cięcie $\phi \in \Gamma(E)$ możemy jednoznacznie wyreprezentować jako odwzorowanie (lokalnie) gładkie $f : \mathcal{O} \longrightarrow F$, a to w odwołaniu do tożsamości

$$\tau \circ \phi|_{\mathcal{O}} =: (\text{id}_{\mathcal{O}}, f) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \times F,$$

przeto oczywistym punktem wyjścia do rozważań nad definicją takowej pochodnej jest funktorialny obraz stycznościowy odwzorowania f , tj.

$$\mathbb{T}f : \mathbb{T}B|_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{T}F.$$

I rzeczywiście, ta najprostsza definicja różniczkowania¹ zachowuje się w sposób pożądaný tak długo, jak długo lokalny model $\mathcal{O} \times F$ wiązki poddajemy przekształceniom *niezależnym* od punktu w bazie, tj. jak długo przekształcamy wyłącznie włókno typowe F *globalnie* nad $\mathcal{O}$, a nadto (w przypadku wiązki nietrywialnej) – jak długo nie zadajemy pytania o rozszerzalność tej definicji na pełną dziedzinę $B \supsetneq \mathcal{O}$ określoności globalnego cięcia ϕ . Istotnie, w przypadku przekształceń (gładkich)

$$\eta \equiv \text{id}_{\mathcal{O}} \times h : \mathcal{O} \times F \xrightarrow{\mathcal{O}} (x, m) \longmapsto (x, h(m))$$

reguła łańcuchowa dla

$${}^h f \equiv \text{pr}_2 \circ \eta \circ (\tau \circ \phi) : \mathcal{O} \longrightarrow F : x \longmapsto h(f(x))$$

daje nam

$$\mathbb{T}_x {}^h f = \mathbb{T}_{f(x)} h \circ \mathbb{T}_x f,$$

co jest właśnie przykładem owej „prostej własności transformacyjnej” pochodnej cięcia. Źródłem problemów, przejawiających się w odejściu od powyższego prostego schematu transformacji stycznościowej, są wszelkie przekształcenia włókna F nad bazą zależne od punktu w tej ostatniej, tj. generyczne odwzorowania

$$\begin{aligned} \chi \equiv (\text{id}_{\mathcal{O}} \times \text{ev}) \circ (\text{pr}_1, H \circ \text{pr}_1, \text{pr}_2) & : \mathcal{O} \times F \longrightarrow \mathcal{O} \times \text{Aut}(F) \times F \longrightarrow \mathcal{O} \times F \\ & : (x, m) \longmapsto (x, H(x), m) \longmapsto (x, H(x)(m)) \end{aligned}$$

zadawane przez odwzorowania $H : \mathcal{O} \longrightarrow \text{Aut}(F) \subset \text{Diff}(F)$ o wartościach w grupie automorfizmów włókna typowego (czyli dyfeomorfizmów zachowujących ew. dodatkową strukturę na F , jak np. strukturę liniową lub strukturę G -przestrzeni). W ich przypadku mamy do czynienia z odwzorowaniem

$${}^H f \equiv \text{pr}_2 \circ \chi \circ (\tau \circ \phi) : \mathcal{O} \longrightarrow F : x \longmapsto H(x)(f(x)),$$

którego nie cechuje wcześniejsza „prostota”:

$$\mathbb{T}_x {}^H f \neq \mathbb{T}_{f(x)}(H(x)) \circ \mathbb{T}_x f,$$

a to z racji nietrywialnej zależności dyfeomorfizmu $H(x)$ od punktu w bazie wiązki. Ta elementarna obserwacja przesądza o niemożności naturalnego zszycia zwykłych pochodnych odwzorowań lokalnych we włókno typowe indukowanych przez cięcia globalne wiązki na przecięciach dziedzin ich określoności (więc też – rekonstrukcji z nich obiektu globalnego, którego potrzebujemy w modelowaniu fizycznym biorącym za punkt wyjścia rachunek tensorowy na (lub wyższą geometrię nad) przestrzenią wewnętrznych stopni swobody F , jak np. przy cechowaniu symetrii sztywnych (G, λ) teorii o polach $\phi \in C^\infty(B, F) \equiv \Gamma(B \times F)$, kiedy to zastępujemy wyjściową wiązkę konfiguracyjną teorii pola $B \times F$ wiązką stowarzyszoną $P_G \times_\lambda F$), gdzie napotykamy (w kontekście Tw. 1-2.2) nieodzowne przekształcenia $(\mathcal{O}, H) \equiv (\mathcal{O}_{ij}, g_{ij})$ implementujące utożsamienia modeli (trywializacji) lokalnych, tudzież – o nienaturalnym prawie transformacyjnym dla tychże pochodnych względem lokalnych prezentacji morfizmów wiązek (jak te rozpatrywane w Tw. 1-2.3, 1-2.5 i 3.2 oraz (implicite) w Tw. 5-6.1), gdzie scenariusz powyższy realizuje się wprost nad dziedzinami $\mathcal{O}_i$ lokalnych trywializacji E , a w roli odwzorowań H występują lokalne prezentacje tychże morfizmów, $H \equiv h_i$. Chwila zastanowienia pozwala zrozumieć, że – na poziomie konceptualnym – nasz kłopot wynika z nieuchronnego pojawienia się w stycznej do cięcia wiązki (więc w obrazie stycznościowym względem takiego cięcia dowolnego wektora stycznego do bazy) składowej spoza stycznej do włókien (która to styczna transformuje się w sposób naturalny i pożądaný), przy jednoczesnym

¹Ażeby dostrzec w morfizmie wiązek wektorowych $\mathbb{T}f$ definicję różniczkowania, należy prekomponować go z dowolnym polem wektorowym na $\mathcal{O}$.

braku kanonicznego mechanizmu rzutowania na tęże styczną. Rzutowanie takie wymaga identyfikacji dopełnienia prostego stycznej, i to takiego, którego własności transformacyjne – przy przejściu między prezentacjami lokalnymi oraz względem (wertykalnych) automorfizmów wiązki w każdej z tych prezentacji z osobna – zapewniałyby zachowywanie pożądaných właściwości transformacyjnych rzutu nie tylko w obrazie lokalnej trywializacji (co można osiągnąć bez trudu), lecz także w obrazie globalnym, w którym wszak lokalne prezentacje rzeczonych automorfizmów wiązki są „splatané” przez odwzorowania przejścia wiązki według schematu z Tw.1-2.3.

Ażeby móc postąpić dalej w dyskusji i wyznaczyć należyty rozkład prosty stycznej nad przestrzenią totalną wiązki, musimy najpierw sformalizować wyłaniające się z rozważań dotychczasowych pojęcie „dystrybucji stycznej do włókien wiązki” w wiązce stycznej do przestrzeni totalnej tejże, a następnie poszukać dystrybucji tej globalnego dopełnienia o oczekiwanych własnościach. Punktem wyjścia jest

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 1-2.4 i niechaj $(\Phi, f) : (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})$ będzie morfizmem wiązek wektorowych $\mathbb{V}_A$, $A \in \{1, 2\}$ stałego rzędu $\text{rk}(\Phi, f) \equiv r \in \mathbb{N}$. Wówczas **jądło morfizmu** (Φ, f)

$$\text{Ker}(\Phi, f) := \bigsqcup_{x \in B_1} \text{Ker}(\Phi|_{\mathbb{V}_{1x}})$$

nieśie kanoniczną strukturę podwiązki wektorowej jego dziedziny $\mathbb{V}_1$, przy czym

$$\text{rk Ker}(\Phi, f) = n_1 - r.$$

Dowód: Jest oczywistym, że ograniczenie atlasu $\mathbb{V}_1$ do podprzestrzeni topologicznej $\text{Ker}(\Phi, f)$ indukuje na niej strukturę (pod)rozmaitości gładkiej (wszak nad każdym punktem bazy mamy do czynienia z podprzestrzenią liniową włókna), przy czym nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ zachodzi – na mocy algebraicznego bilansu wymiarów –

$$(\pi_{\mathbb{V}_1}|_{\text{Ker}(\Phi, f)})^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{K}^{n_1-r}.$$

Pozostaje jedynie skonstruować gładkie trywializacje lokalne tak otrzymanej wiązki (wzajem izomorficznych) przestrzeni wektorowych. Zważywszy lokalny charakter zagadnienia, ograniczymy się do (dostatecznie małych) otoczeń otwartych: $\mathcal{O}_1$ (ustalonego dowolnie) punktu $x_1 \in B_1$ oraz $\mathcal{O}_2 \supset f(\mathcal{O}_1)$ punktu $f(x_1)$, na których określone są dyfeomorfizmy (klasy C^∞)

$$\tau_{\mathcal{O}_A} : \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_A \times \mathbb{K}^{n_A}, \quad A \in \{1, 2\}.$$

W obrazie tychże morfizm (Φ, f) przybiera postać

$$\Phi_{21} \equiv \tau_{\mathcal{O}_2} \circ \Phi \circ \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1} : \mathcal{O}_1 \times \mathbb{K}^{n_1} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \times \mathbb{K}^{n_2} : (x, v) \longmapsto (f(x), L_\Phi(x)(v))$$

dla pewnego gładkiego odwzorowania

$$L_\Phi : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathbb{K}(n_2) : x \longmapsto L_\Phi(x)$$

o rzędzie

$$\text{rk } L_\Phi(x) = r.$$

Dokonajmy rozkładu

$$\mathbb{K}^{n_1} = \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1, \quad \mathbb{K}^{n_2} = \text{Image } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2,$$

określonego dla pewnych przestrzeni dopełniających $\Delta_A \subset \mathbb{K}^{n_A}$ o wymiarach

$$\dim_{\mathbb{K}} \Delta_1 = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Image } L_\Phi(x_1) = n_2 - \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\Delta_1 \cong \text{Image } L_\Phi(x_1) \circ x$$

możemy następnie skonstruować indeksowaną przez $\mathcal{O}_1 \ni x$ rodzinę odwzorowań $\mathbb{K}$ -liniowych

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Phi(x) &: \mathbb{K}^{n_1} \oplus \Delta_2 \equiv \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \longrightarrow \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \text{Image } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 \\ &\equiv \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{n_2} \end{aligned}$$

$$: (k, \delta_1, \delta_2) \mapsto (k, 0_{\text{Image } L_\Phi(x_1)}, \delta_2) +_\oplus (0, L_\Phi(x))(k, \delta_1),$$

o jawnie odwracalnym elemencie

$$\tilde{\Lambda}_\Phi(x_1) = \text{id}_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)} \oplus L_\Phi(x_1) \upharpoonright_{\Delta_1} \oplus \text{id}_{\Delta_2}.$$

Jako że odwzorowania odwracalne tworzą podzbiór otwarty w $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2})$ (a mianowicie: dopełnienie przeciwoobrazu zbioru domkniętego $\{0_{\mathbb{K}}\}$ względem odwzorowania $\det_{(n_1 + \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2)}$ będącego superpozycją odwzorowań ciągłych, więc też ciągłego), przeto $\tilde{\Lambda}_\Phi(x_1)$ należy do tego podzbioru wraz z pewnym swoim otoczeniem otwartym $\mathcal{U}$, którego przeciwoobraz względem (ciągłego) odwzorowania $\tilde{\Lambda}_\Phi$ jest otoczeniem otwartym $\mathcal{V}_1 \equiv \tilde{\Lambda}_\Phi^{-1}(\mathcal{U}) \ni x_1$ o własności $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{O}_1$. Oto więc obok gładkiego odwzorowania

$$\Lambda_\Phi \equiv \tilde{\Lambda}_\Phi \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}),$$

mamy też gładkie odwzorowanie

$$V_\Phi \equiv \text{Inv} \circ \Lambda_\Phi : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2),$$

(punktowo) odwrotne do Λ_Φ w każdym $x \in \mathcal{V}_1$. Rozważmy dowolny wektor

$$(k, \delta_1) \in \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \equiv \mathbb{K}^{\times n_1}.$$

Ustaliwszy $x \in \mathcal{V}_1$, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} (k, \delta_1) \in \text{Ker } L_\Phi(x) &\iff \Lambda_\Phi(x)(k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = (k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) \\ &\iff (k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = V_\Phi(x)(k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}). \end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę włożenia kanoniczne:

$$j_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)} : \text{Ker } L_\Phi(x_1) \hookrightarrow \text{Ker } L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}$$

oraz

$$j_{\mathbb{K}^{\times n_1}} : \mathbb{K}^{\times n_1} \hookrightarrow \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2,$$

możemy zatem zapisać

$$j_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_\Phi(x)) \subseteq V_\Phi(x)(\text{Image } j_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)}),$$

ale też

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} j_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_\Phi(x)) &= \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } L_\Phi(x) = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \text{Image } L_\Phi(x) \\ &= n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \text{Image } L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Image } j_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)} \\ &\equiv \dim_{\mathbb{K}} V_\Phi(x)(\text{Image } j_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)}), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z odwracalności $V_\Phi(x)$. Widzimy więc, że

$$j_{\mathbb{K}^{\times n_1}}(\text{Ker } L_\Phi(x)) = V_\Phi(x)(\text{Image } j_{\text{Ker } L_\Phi(x_1)}),$$

i na tej podstawie konstatujemy, że odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1}^{-1} : \mathcal{V}_1 \times \text{Ker } L_\Phi(x_1) &\longrightarrow \text{Ker } (\Phi_{21}, f \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}) \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} \\ : (x, k) &\longmapsto (x, \text{pr}_{1,2} \circ V_\Phi(x)(k, 0_{\text{Image } L_\Phi(x_1)}, 0_{\Delta_2})) \end{aligned}$$

jest gładką odwrotnością trywializacji lokalnej (także gładkiej)

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1} : \text{Ker } (\Phi_{21}, f \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}) \upharpoonright_{\mathcal{V}_1} &\longrightarrow \mathcal{V}_1 \times \text{Ker } L_\Phi(x_1) \\ : (x, v) &\longmapsto (x, \text{pr}_1 \circ \Lambda_\Phi(x)(v, 0_{\Delta_2})). \end{aligned}$$

Tym sposobem ustanawiamy referencyjną przestrzeń wektorową $\text{Ker } L_\Phi(x_1)$ w roli włókna typowego, co jest wynikiem pożądanym. $\square$

Antycypowanej formalizacji dostarcza przeto

Corollarium 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, w tym ten ze Stw. 1, i niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą. Jądro epimorfizmu wiązek wektorowych

$$(\mathbb{T}\pi_E, \pi_E) : \mathbb{T}E \longrightarrow \mathbb{T}B$$

jest podwiązką wektorową

$$(\mathbb{V}E \equiv \text{Ker}(\mathbb{T}\pi_E, \pi_E), E, \mathbb{K}^{\times \dim F}, \pi)$$

wiązki stycznej $\mathbb{T}E$. Określamy ją mianem **(pod)wiązki pionowej** (lub **wertykalnej**) nad E . Jej włókno $\mathbb{V}_p E \equiv (\mathbb{V}E)_p$ nad $p \in E$, zwane **(pod)przestrzenią pionową** (lub **wertykalną**), rozpinają **wektory pionowe** (lub **wertykalne**), styczne do włókien wiązki E .

Dowód: Wystarczy zauważyć, że odwzorowanie styczne $\mathbb{T}\pi_E$ do submersji π_E jest – wprost z definicji – surjektywne, ma zatem stały rząd (maksymalny)

$$\text{rk}(\mathbb{T}\pi_E, \pi_E) = \dim B.$$

□

Jak wynika z dyskusji wprowadzającej, rozwiązanie wskazanego w niej problemu umożliwia lub w każdym razie przybliża jakąś globalną (tj. niezależną od wyboru lokalnych trywializacji) definicja rzutu (zwykłej pochodnej) na podwiązkę pionową, czyli – innymi słowy – rozkładu wiązki stycznej $\mathbb{T}E$ na whitneyowską sumę prostą tejsze podwiązki pionowej i jakiegoś jej dopełnienia (które *nie* jest kanonicznie wpisane w definicję wiązki E), oczywiście z zachowaniem aksjomatycznych właściwości różniczkowania, które dostarczy nam różniczkowania rozumianego jako strukturalne przyporządkowanie

$$(1) \quad \nabla : \Gamma(E) \ni \phi \longmapsto \nabla \phi \in \Gamma(\mathbb{T}^* B \otimes_{B, \mathbb{R}} \phi^* \mathbb{V}E),$$

o przeciwdziedzinie opisanej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}B & \xrightarrow{\nabla \phi} & \mathbb{V}E & \xrightarrow{J\mathbb{V}E} & \mathbb{T}E \\ \pi_{\mathbb{T}B} \downarrow & & \downarrow & \nearrow \pi_{\mathbb{T}E} & \\ B & \xrightarrow{\phi} & E & & \end{array}.$$

Poszukiwanie takiego właśnie rozwiązania będzie przedmiotem dalszych naszych roztrząsań, które – jak to nierzadko bywa w umotywowanych fizykalnie poszukiwaniach matematycznych – doprowadzą nas w obszary bliskie modelowaniu zjawisk na pierwszy rzut oka niepowiązanych z postawionym sobie przez nas celem pragmatycznym², jakim jest konstrukcja naturalnej operacji różniczkowania cięć wiązki włóknistej.

Chcąc przydać naszej dotychczasowej dyskusji pożądaney cechy konkretności i tym sposobem przybliżyć się do rozwiązania formalnego postawionego powyżej problemu (lub raczej: ustalić konkretny, choć „brzydki”, bo zależny od wyboru lokalnych trywializacji, punkt odniesienia i dojścia przyszłych dociekań „eleganckich”, więc uwolnionych od „brzydoty” opisu lokalnego), przyjrzymy się bliżej obstrukcji wobec postulowanej przez nas „prostoty” w wyrażeniu $\mathbb{T}_x Hf$. Założymy przy tym dla ułatwienia (a bez straty dla dalszych rozważań szczegółowych), że odwzorowanie $H : \mathcal{O} \longrightarrow \text{Aut}(F)$ przyjmuje wartości w pewnej skończonej wymiarowej grupie Liego $G \subseteq \text{Aut}(F)$, co da nam do ręki narzędzia i metody rachunku cartanowskiego wprowadzonego na wykładach

²Insynuacja dotyczy konstrukcji matematycznego modelu tzw. pól cechowania (fotonu, gluonów, bozonów $W^\pm$ i $Z \dots$), „zapośredniczających” wszystkie bez wyjątku oddziaływania fundamentalne w Modelu Standardowym tychże oddziaływań oraz ich naturalnych (i obserwowanych w doświadczeniu) sprzężeń z polami materii.

z Teorii Grup II (patrz: Wykłady II, III i IV pt. "Lie to me, Cartan!" wygłoszone przez Autora na Wydziale Fizyki UW w roku akademickim 2022/23, do których w dalszej części dyskusji będziemy się odwoływać jako do „Niezbędnika cartanowskiego”, przy użyciu etykiety Niezb.cart). Ich nieodzownym uzupełnieniem w obecnym kontekście jest

Definicja 1. Niechaj G będzie grupą Liego w rozumieniu Def.3.2 i niech (M, λ) będzie G-rozmaitością gładką lewostronną w rozumieniu Def.3.3. **Fundamentalne pole wektorowe dla λ** to przyporządkowanie

$$\mathcal{K}^{(\lambda)} : T_e G \longrightarrow \Gamma(TM) : X \longmapsto T_{(e, \cdot)} \lambda(-X, \mathbf{0}_{TM}(\cdot)) \equiv \mathcal{K}_X^{(\lambda)}(\cdot).$$

Bez trudu dowodzimy wysoce strukturalnego charakteru powyższego przyporządkowania:

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy oznaczenia Def.1. Fundamentalne pole wektorowe $\mathcal{K}$ jest G-ekwiwariantnym homomorfizmem algebr Liego

$$\mathcal{K}^{(\lambda)} \in \text{Hom}_G(\text{Lie } G, (\Gamma(TM), [\cdot, \cdot]_{\Gamma(TM)})),$$

przy czym $[\cdot, \cdot]_{\Gamma(TM)}$ jest tutaj komutatorem pól wektorowych, a działania G na dziedzinie i przeciwdziedzinie $\mathcal{K}^{(\lambda)}$ brane pod uwagę to, odpowiednio, stycznościowe działanie dołączone

$$T_e \text{Ad} : G \longrightarrow \text{Aut}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\text{Lie } G)$$

i kanoniczne stycznościowe podniesienie λ (pchnięcie), dane w postaci

$$\begin{aligned} T_2 \lambda & : G \longrightarrow \text{Aut}_{\text{LieAlg}_{\mathbb{R}}}(\Gamma(TM), [\cdot, \cdot]_{\Gamma(TM)}) \\ & : g \longmapsto (\Gamma(TM) \ni \mathcal{V} \longmapsto T_{\lambda_{g^{-1}}(\cdot)} \lambda_g \circ \mathcal{V}(\lambda_{g^{-1}}(\cdot)) \equiv \lambda_{g*} \mathcal{V}(\cdot) \in \Gamma(TM)). \end{aligned}$$

Dowód: Punktem wyjścia do dowodu tezy Stwierdzenia jest jawne przedstawienie wartości pola $\mathcal{K}^{(\lambda)}$ w dowolnym punkcie $m \in M$ jego dziedziny jako klasy współstyczności przechodzących przezeń ścieżek:

$$\mathcal{K}_X^{(\lambda)}(m) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda(\exp^G(-t \triangleright X), m),$$

w którym odwołujemy się do Def. Niezb.cart.5. Uwzględnivszy naturalność odwzorowania eksponencjalnego (patrz: Stw. Niezb.cart.11), która w interesującym nas przypadku implikuje tożsamość

$$\text{Ad}_g \circ \exp^G = \exp^G \circ T_e \text{Ad}_g,$$

obliczamy na tej podstawie

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_{T_e \text{Ad}_g(X)}^{(\lambda)}(\lambda_g(m)) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda(\exp^G(-t \triangleright T_e \text{Ad}_g(X)), \lambda_g(m)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda(\exp^G(T_e \text{Ad}_g(-t \triangleright X)), \lambda_g(m)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda(\text{Ad}_g(\exp^G(-t \triangleright X)), \lambda_g(m)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda(\text{Ad}_g(\exp^G(-t \triangleright X)) \cdot g, m) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda(g \cdot \exp^G(-t \triangleright X), m) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_g \circ \lambda(\exp^G(-t \triangleright X), m) = T_m \lambda_g \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda(\exp^G(-t \triangleright X), m) \right) \\ &\equiv T_m \lambda_g(\mathcal{K}_X^{(\lambda)}(m)), \end{aligned}$$

wykorzystując po drodze oczywistą tożsamość

$$(2) \quad \lambda \circ (\ell_g \times \text{id}_M) = \lambda_g \circ \lambda,$$

zapisaną dla działania lewego regularnego $\ell : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \longmapsto g \cdot h \equiv \ell_g(h)$ grupy G na sobie z dowodu Stw. Niezb.cart.1. Wynik dowodzi G-ekwiwariantności fundamentalnego pola wektorowego $\mathcal{K}^{(\lambda)}$. Jego homomorficzność jest prostą konsekwencją elementarnych własności komutatora pól wektorowych. Istotnie, mamy

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 1. Pole wektorowe $\tilde{R}_X \equiv (R_X, \mathbf{0}_{\mathbf{T}M})$ na rozmaiłości produktowej $G \times M$ indukowane kanonicznie przez pole prawo-niezmiennicze $R_X \in \mathfrak{X}_R(G)$ na G przyporządkowane wektorowi $X \in \mathfrak{g}$ według schematu ze Stw. Niezb.cart.4 jest w λ -relacji (wedle Uwagi Niezb.cart.3) z fundamentalnym polem wektorowym $-\mathcal{K}_X^{(\lambda)}$.

Dowód Lematu 1: Przywoławszy tożsamość

$$\lambda \circ (\wp_g \times \text{id}_M) = \lambda \circ (\text{id}_G \times \lambda_g),$$

zapisaną dla działania prawego regularnego $\wp : G \times G \longrightarrow G : (h, g) \longmapsto h \cdot g \equiv \wp_g(h)$ grupy G na sobie z dowodu Stw. Niezb.cart.1, obliczamy bez trudu

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(g,m)} \lambda(\tilde{R}_X(g, m)) &= \mathbf{T}_{(g,m)} \lambda \circ (\mathbf{T}_e \wp_g \times \text{id}_{\mathbf{T}_m M})(X, 0_{\mathbf{T}_m M}) = \mathbf{T}_{(e,m)} (\lambda \circ (\wp_g \times \text{id}_M))(X, 0_{\mathbf{T}_m M}) \\ &= \mathbf{T}_{(e,m)} (\lambda \circ (\text{id}_G \times \lambda_g))(X, 0_{\mathbf{T}_m M}) = \mathbf{T}_{(e, \lambda_g(m))} \lambda \circ \mathbf{T}_{(e,m)} (\text{id}_G \times \lambda_g)(X, 0_{\mathbf{T}_m M}) \\ &= \mathbf{T}_{(e, \lambda_g(m))} \lambda(\text{id}_{\mathbf{T}_e G}(X), \mathbf{T}_m \lambda_g(0_{\mathbf{T}_m M})) = \mathbf{T}_{(e, \lambda_g(m))} \lambda(X, 0_{\mathbf{T}_{\lambda_g(m)} M}) \equiv -\mathcal{K}_X^{(\lambda)}(\lambda(g, m)). \end{aligned}$$

□

W świetle Lematu 1. możemy odwołać się do Twierdzenia o Polach Wektorowych w Relacji, wysłowionej w Uwadze Niezb.cart.3 w postaci Równ. (Niezb.cart.5), w bezpośrednim rachunku

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}_X^{(\lambda)}, \mathcal{K}_Y^{(\lambda)}]_{\Gamma(M)}(m) &\equiv [-\mathcal{K}_X^{(\lambda)}, -\mathcal{K}_Y^{(\lambda)}]_{\Gamma(M)}(\lambda(e, m)) = \mathbf{T}_{(g,x)} \lambda([\tilde{R}_X, \tilde{R}_Y]_{\Gamma(\mathbf{T}(G \times M))}(e, m)) \\ &\equiv \mathbf{T}_{(g,m)} \lambda([\mathbf{T}_e R_X, \mathbf{T}_e R_Y]_{\Gamma(\mathbf{T}G)}(e, m)), \end{aligned}$$

który po uwzględnieniu Stw. Niezb.cart.12 daje nam oczekiwany wynik

$$[\mathcal{K}_X^{(\lambda)}, \mathcal{K}_Y^{(\lambda)}]_{\Gamma(M)}(m) = \mathbf{T}_{(g,m)} \lambda((-R_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}, \mathbf{0}_{\mathbf{T}M})(e, m)) = -\mathbf{T}_{(g,m)} \lambda(\widetilde{R_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}}(e, m)) = \mathcal{K}_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}^{(\lambda)}(m).$$

□

Wyposażeni w powyższe struktury i przy wypowiedzianym wcześniej założeniu $H : \mathcal{O} \longrightarrow G$ uzupełnionym o definicję działania $\lambda : G \times F \longrightarrow F$, pozwalającą zapisać $H(x)(m) \equiv \lambda_{H(x)}(m)$, liczymy wprost (w zapisie Def. Niezb.cart.4, dla dowolnego $v \in \mathbf{T}_x B$,

$$\mathbf{T}_x {}^H f(v) \equiv \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f(v) + \mathbf{T}_{(H(x), f(x))} \lambda(\mathbf{T}_x H(v), 0_{\mathbf{T}_{f(x)} F}),$$

a dalej – wobec tożsamości

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x H(v) &= h^A \triangleright L_A(H(x)) \equiv \theta_L^A(H(x))(\mathbf{T}_x H(v)) \triangleright L_A(H(x)) \\ &\equiv \theta_L^A(H(x)) \circ \mathbf{T}_x H(v) \triangleright L_A(H(x)) \equiv H^* \theta_L^A(x)(v) \triangleright L_A(H(x)), \end{aligned}$$

wynikającej z bazowości układu $\{L_A(H(x))\}_{A \in \overline{1, \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}}}$ w $\mathbf{T}_{H(x)} G$ i i raz jeszcze w odwołaniu do tożsamości (2), a z uwzględnieniem Stw. 1 oraz Stw. Niezb.cart.12 i Niezb.cart.13 –

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x {}^H f &= \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f + H^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_{(H(x), f(x))} \lambda(L_A(H(x)), 0_{\mathbf{T}_{f(x)} F}) \\ &= \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f + H^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_{(H(x), f(x))} \lambda(\mathbf{T}_e \ell_{H(x)}(t_A), 0_{\mathbf{T}_{f(x)} F}) \\ &= \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f + H^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_{(e, f(x))} (\lambda \circ (\ell_{H(x)} \times \text{id}_F))(t_A, 0_{\mathbf{T}_{f(x)} F}) \\ &= \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f + H^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_{(e, f(x))} \lambda(t_A, 0_{\mathbf{T}_{f(x)} F}) \\ &\equiv \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f - H^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} (\mathcal{K}_{t_A}^{(\lambda)}(f(x))) \\ &= \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f - H^* \theta_L^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbf{T}_e \text{Ad}_{H(x)})_A^B (\mathcal{K}_{t_B}^{(\lambda)}({}^H f(x))) \\ &= \mathbf{T}_{f(x)} \lambda_{H(x)} \circ \mathbf{T}_x f - H^* \theta_R^A(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}^{(\lambda)}({}^H f(x)) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \equiv \quad T_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ T_x f - \mathcal{K}^{(\lambda)}(Hf(x)) \circ H^*\theta_R(x).$$

Widzimy zatem jasno, że wzmiankowana wcześniej operacja rzutowania jest całkiem konkretnie określona w obrazie trywializacji lokalnej: sprowadza się ona do zastąpienia

$$T_x f \rightsquigarrow T_x f + \alpha_{\mathcal{O}}(x, f(x))$$

przy użyciu pewnej 1-formy wektorowej

$$(4) \quad \alpha_{\mathcal{O}}(\cdot, f(\cdot)) \in T^*B \otimes_{\mathbb{R}} T_{f(\cdot)}F \subset T^*B \otimes_{\mathbb{R}} T_{(\cdot, f(\cdot))}(\mathcal{O} \times F)$$

o *afinicznych* własnościach transformacyjnych:

$$(5) \quad \chi^* \alpha_{\mathcal{O}}(x, f(x)) = T_{f(x)}\lambda_{H(x)} \circ \alpha_{\mathcal{O}}(x, f(x)) + \mathcal{K}^{(\lambda)}(Hf(x)) \circ H^*\theta_R^A(x).$$

Wyjściowy problem sprowadza się zatem do identyfikacji naturalnej struktury geometrycznej (globalnej), z której po wyborze trywializacji lokalnych odczytamy powyższe relacje, ewentualnie uzupełnione o więzy zgodności z dodatkową strukturą. W niniejszym wykładzie i wykładach późniejszych zapoznamy się z kilkoma propozycjami rozwiązań (patrz także: Załącznik), biorącymi za punkt wyjścia różne intuicje algebraiczne. Głębokie relacje pomiędzy tymi na pierwszy rzut oka dość luźno ze sobą powiązanymi propozycjami, których dowiedzimy w toku dalszych rozważań, stanowiąc będą mocny argument potwierdzający *a posteriori* słuszność i naturalność wybranej przez nas ścieżki rozumowania.

Pojęciowo najczystsze i dzięki temu najbardziej eleganckie rozwiązanie postawionego przez nas problemu dostarcza

Definicja 2. Powiązanie Ehresmanna na wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) to wybór takiej podwiązki wektorowej $HE \subset TE$ wiązki stycznej do przestrzeni totalnej E , która dopełnia wiązkę pionową VE do wiązki stycznej TE wedle formuły

$$TE = VE \oplus_{\mathbb{R}, B} HE,$$

zapisanej w duchu (i notacji) Def. 1-2.5. Podwiązka HE nosi miano **(pod)wiązki poziomej** (lub **horyzontalnej**) nad E . Jej włókno $H_p E \equiv (HE)_p$ nad $p \in E$, zwane **(pod)przestrzenią poziomą** (lub **horyzontalną**), rozpinają **wektory poziome** (lub **horyzontalne**).

Na gruncie interpretacji sumy Whitneya jako geometryzacji sumy prostej przestrzeni wektorowych, a w odwołaniu do równoważności opisu tejże konstrukcji przy użyciu zupełnej rodziny rzutów komplementarnych, wnioskujemy, że opis powiązania na wiązce włóknistej w terminach rozkładu wiązki stycznej do przestrzeni totalnej tejże wiązki na sumę (Whitneya) podwiązek: pionowej i poziomej niesie w sobie podpowiedź dotyczącą kolejnego naturalnego przeformułowania definicji powiązania. Oto więc

Definicja 3. Forma powiązania na wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) to (wertykalny) morfizm wiązek wektorowych

$$(A, \text{id}_E) : TE \longrightarrow VE$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienności

$$\begin{array}{ccc} VE & \xrightarrow{\mathcal{N}_E} & TE \\ & \searrow \text{id}_{VE} & \downarrow A \\ & & VE \end{array} ,$$

na którym $\mathcal{N}_E$ jest włożeniem kanonicznym.

Bez trudu stwierdzamy równoważność obu definicji.

Twierdzenie 2. Forma powiązania na wiązce włóknistej określa na niej w sposób kanoniczny powiązanie Ehresmanna, i *vice versa*.

Dowód: Z dowolnym morfizmem wiązek wektorowych $A : TE \longrightarrow VE$ o własności $A|_{VE} = \text{id}_{VE}$, więc o rzędzie maksymalnym, możemy – w świetle Tw. 1 – stowarzyszyć podwiązkę

$$HE := \text{Ker}(A, \text{id}_E) \subset TE.$$

Przy tym dla dowolnego $v \in H_p E \cap V_p E$, $p \in E$ otrzymujemy wynik

$$v = \text{id}_{VE}(v) = A(v) = 0_{T_p E},$$

zatem

$$HE \cap VE = \{0_{TE}(E)\}.$$

Mamy też prosty bilans wymiarów (podparty lustracją stycznej do lokalnego modelu E):

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} H_p E &\equiv \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(A, \text{id}_E)|_{T_p E} = \dim_{\mathbb{R}} \text{dom}(A, \text{id}_E)|_{T_p E} - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(A, \text{id}_E)|_{T_p E} \\ &= \dim_{\mathbb{R}} T_p E - \dim_{\mathbb{R}} V_p, \end{aligned}$$

który przesądza o istnieniu pożądanego rozkładu prostego.

I odwrotnie, istnienie rozkładu wiązki stycznej TE na podwiązki: pionową i poziomą dopuszcza w obrazie lokalnej trywializacji opis w terminach gładko indeksowanej przez bazę (dziedzinę trywializacji) rodziny operatorów rzutowych na styczną do włókna (czyli lokalny model podwiązki pionowej), a ponieważ te lokalne rodziny pochodzą od globalnie gładkiego rozkładu stycznej, przeto zstępują („sklejają się”) do globalnie gładko indeksowanej przez B rodziny operatorów rzutowych na modelu E zrekonstruowanym z trywializacji lokalnych według uniwersalnego schematu opisanego w Tw. 1-2.2. Prostej egzemplifikacji mechanizmu zstąpienia dostarcza notatka pt. „Od tensora Faradaya do wiązki Diraca – poprzez doświadczenie Aharonova–Bohma” załączona do niniejszych notatek wykładowych. $\square$

Zwieńczeniem naszych rozważań jest dopełnienie definicji kategorii wiązek włóknistych z powiązaniem poprzez specjalizację pojęcia morfizmu wiązek włóknistych w obecności powiązania, której dokonujemy poniżej.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 2 oraz 3 i niechaj $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami włóknistymi. Ilekoć na obu wiązkach określone jest powiązanie Ehresmanna, mianem **morfizmu wiązek włóknistych z powiązaniem Ehresmanna** (lub **zachowującego powiązanie Ehresmanna**) (nad dyfeomorfizmem baz) określamy morfizm wiązek włóknistych (Φ, f) spełniający warunek:

- (FCM1) para odwzorowań stycznych: $(T\Phi, Tf)$ ogranicza się do podwiązek poziomych HE_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ i zadaje tym sposobem morfizm wiązek wektorowych opisany przez diagram przemienny

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} HE_1 & \xrightarrow{T\Phi|_{HE_1}} & HE_2 \\ \downarrow T\pi_{E_1}|_{HE_1} & & \downarrow T\pi_{E_2}|_{HE_1} \\ TB_1 & \xrightarrow{Tf} & TB_2 \end{array}.$$

Wreszcie też w obecności formy powiązania na obu wiązkach mówimy o **morfizmie wiązek włóknistych z formą powiązania** (lub **zachowującym formę powiązania**) (nad dyfeomorfizmem baz), jeśli (Φ, f) spełnia warunek:

- (FCM2) odwzorowanie styczne $T\Phi$ zachowuje formę powiązania w rozumieniu równości

$$T\Phi \circ A_1 = A_2 \circ T\Phi.$$

Uwaga 1. Należy zauważyć, w odniesieniu do punktu (FCM1), że para $(T\Phi, Tf)$ zawsze jest morfizmem wiązek wektorowych z racji funktorialności T i dopiero postulat zachowywania podwiązek poziomych stanowi nietrywialny warunek dodatkowo ograniczający morfizm wiązek (Φ, f) oraz dodatkową strukturę stycznościową obecną na wiązkach będących w relacji przezeń określonej.

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 4. Warunki (FCM1) i (FCM2) są równoważne.

Dowód: Załóżmy, że jest spełniony warunek (FCM2). Skoro $HE_\alpha \equiv \text{Ker } A_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$, to wystarczy wykazać, że

$$T\Phi(\text{Ker } A_1) \subset \text{Ker } A_2,$$

to jednak wynika wprost z ciągu relacji

$$A_2(T\Phi(\text{Ker } A_1)) = T\Phi(A_1(\text{Ker } A_1)) = T\Phi(\mathbf{0}_{TE_1}(E_1)) = \mathbf{0}_{TE_2}(E_2).$$

Niechaj teraz będzie spełniony warunek (FCM1). Wobec istnienia rozkładów $TE_\alpha = VE_\alpha \oplus_{\mathbb{R}, B_\alpha} HE_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$ możemy sprawdzić pożądaną warunek (FCM2) na każdej z podwiązek dziedziny z osobna. Dla podwiązki poziomej z racji zawierania $T\Phi(HE_1) \subset HE_2 \upharpoonright_{\Phi(E_1)} \equiv \text{Ker } A_2 \upharpoonright_{\Phi(E_1)}$ dostajemy wprost

$$(A_2 \circ T\Phi)(HE_1) \subset A_2(HE_2 \upharpoonright_{\Phi(E_1)}) = \mathbf{0}_{TE_2}(\Phi(E_1)),$$

czyli

$$(A_2 \circ T\Phi)(HE_1) = \mathbf{0}_{TE_2}(\Phi(E_1)) \equiv T\Phi(\mathbf{0}_{TE_1}(E_1)) = (T\Phi \circ A_1)(HE_1).$$

W przypadku podwiązki pionowej $VE_1 \equiv \text{Ker } T\pi_{E_1}$ zauważamy

$$\begin{aligned} (T\pi_{E_2} \circ T\Phi)(VE_1) &= T(\pi_{E_2} \circ \Phi)(VE_1) = T(f \circ \pi_{E_1})(VE_1) = Tf(T\pi_{E_1}(VE_1)) = Tf(\mathbf{0}_{TB_1}(B_1)) \\ &= \mathbf{0}_{TB_2}(f(B_1)), \end{aligned}$$

czyli

$$T\Phi(VE_1) \subset VE_2 \upharpoonright_{\Phi(E_1)},$$

a ponieważ $A_\alpha \upharpoonright_{VE_\alpha} = \text{id}_{VE_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, przeto

$$(A_2 \circ T\Phi)(VE_1) = \text{id}_{VE_2}(T\Phi(VE_1)) = T\Phi(VE_1) \equiv T\Phi(\text{id}_{VE_1}(VE_1)) = (T\Phi \circ A_1)(VE_1).$$

□

Na gruncie powyższych rozważań możemy wypowiedzieć

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj $(\Phi, \text{id}_B) \in \text{Aut}(E)$ będzie wertykalnym automorfizmem wiązki E . **Transformata formy powiązania** A na E **względem** Φ to forma powiązania A^Φ na wiązce $\Phi(E) = E$ określona warunkiem

$$A^\Phi \circ T\Phi := T\Phi \circ A,$$

czyli dana wzorem

$$A^\Phi = T\Phi \circ A \circ T\Phi^{-1}.$$

Dotychczasowa dyskusja przygotowała nas do rozwiązania wyjściowego zagadnienia, czyli konstrukcji różniczkowania (1) na $\Gamma(E)$ o pożądaną własność współmienniczości względem automorfizmów (wertykalnych) wiązki E . Mamy więc

Definicja 6. Niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą i niech (A, id_E) będzie formą powiązania na E jak w Def. 3. **Pochodna kowariantna** na $\Gamma(E)$ (**stowarzyszona z** A) to odwzorowanie

$$\nabla^A : \Gamma(E) \ni \phi \longmapsto A \circ T\phi(\cdot) =: \nabla^A \phi \in \Gamma(T^*B \otimes_{B, \mathbb{R}} \phi^*VE)$$

O tym, że zaproponowane powyżej różniczkowanie jest w istocie tym, którego poszukiwaliśmy, przesądza

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def.5 i 6 i niechaj $(\Phi, \text{id}_B) \in \text{Aut}(E)$ będzie wertykalnym automorfizmem wiązki E . Dla dowolnego cięcia $\phi \in \Gamma(E)$, o **transformacie względem Φ** danej wzorem

$$\phi^\Phi := \Phi \circ \phi \in \Gamma(E),$$

zachodzi tożsamość

$$\nabla^\Phi \phi^\Phi = \nabla \Phi \circ \nabla^\Phi \phi,$$

dokumentująca $\text{Aut}_{\text{Bun}(B)/B}(E)$ -kowariantną naturę różniczkowania ∇^Φ .

Dowód: Wynika trywialnie wprost z definicji. □

Naszą dyskusję domyka definicja, której sens fizyczny odsłaniają dopiero rozważania nad swoistą dynamiką pól rzutowych A nad czasoprzestrzenią B , czyli teoria pól cechowania (z jęz. ang. *gauge-field theory*). Ta stanowi jeden z tematów cyklu wykładów pt. “Duality, descent and defects: The higher geometry and category theory of charged dynamics” Autora niniejszych notatek. Na obecnym etapie jako usprawiedliwienie jej obecności musi nam wystarczyć intrygujące studium przypadku w załączniku pt. „Od tensora Faradaya do wiązki Diraca – poprzez doświadczenie Aharonova–Bohma” oraz orzeźwiająca konfluencja elementarnych epistemologicznych Imperatywów: Prostoty/Piękna oraz Zupełności Strukturalnej w jej skromnej objętości.

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Def.2 oraz 3. **Krzywizna powiązania A** na wiązce E to ilościowa miara obstrukcji dla inwolutywności dystrybucji poziomej³ $HE \equiv \text{Ker}A$, dana wzorem

$$\mathcal{R}[A] := A \circ [\cdot, \cdot]_{\Gamma(TE)} \circ ((\text{id}_{TE} - A) \wedge (\text{id}_{TE} - A)) : \bigwedge^2 TE \longrightarrow \vee E.$$

W wykładach przyszłych podejmiemy trud uzgodnienia wprowadzonych tu konstrukcji ogólnych z dodatkową strukturą na włóknie typowym, z zachowaniem fundamentalnego wyniku z Tw. 4.

DODATEK A. POWIĄZANIE WŁÓKIEN

Wychodząc od definicji podwiązki stycznej do włókien, możemy podejść do zagadnienia różniczkowania cięć wiązki włóknistej w sposób bardziej bezpośredni. Doprowadzi nas to do różniczkowania tego definicji, która – jak wyjawia się na końcu naszego rozumowania – jest intymnie związana z eleganckim podejściem zaprezentowanym – za Ehresmannem i Cartanem – w tekście zasadniczym. Nasze rozważania zaczynamy od

Definicja 8. Niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą. Rozważmy gładką ścieżkę

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow B.$$

Przeniesienie równoległe (klasy C^∞) w E wzdłuż γ to rodzina dyfeomorfizmów (gładkich odwzorowań odwracalnych o gładkich odwrotnościach)

$$P_{t_1, t_2}^\gamma : E_{\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t_2)}, \quad t_1, t_2 \in [0, 1]$$

o własnościach

(PT1) odwzorowanie

$$P_{\cdot, \cdot}^\gamma : [0, 1]^{\times 2} \times_{\gamma \circ \text{pr}_1 \times \pi_E} E \longrightarrow E : ((t_1, t_2), x) \longmapsto P_{t_1, t_2}^\gamma(x)$$

jest klasy C^∞ ;

(PT2) $P_{t_1, t_1}^\gamma = \text{id}_{E_{\gamma(t_1)}}$;

(PT3) $\forall t_1, t_2, t_3 \in [0, 1] : P_{t_2, t_3}^\gamma \circ P_{t_1, t_2}^\gamma = P_{t_1, t_3}^\gamma$;

³W świetle klasycznego Twierdzenia Frobeniusa nieznikająca obstrukcja takowa przesądza o nieistnieniu foliacji przestrzeni totalnej E wiązki przez podrozmaitości całkowite dystrybucji poziomej.

(PT4) dla dowolnego cięcia $\sigma : \mathcal{O}_x \longrightarrow E$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu $x \in B$ jego **pochođna kowariantna** w x wzdłuż dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$, zdefiniowana wzorem

$$\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x) := \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\mathbf{P}_{0,t}^{\gamma})^{-1} \circ \sigma \circ \gamma(t),$$

nie zależy od wyboru reprezentanta klasy współstyczności ścieżek przez x określonej przez warunki

$$\gamma(0) = x \quad \wedge \quad \dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x),$$

a odwzorowanie

$$\nabla.\sigma : \mathbb{T}\mathcal{O}_x \longrightarrow \sigma^*\mathbb{V}E \subset \sigma^*\mathbb{T}E$$

jest $C^\infty(\mathcal{O}_x, \mathbb{R})$ -liniowe.

Ilekoć dany jest wybór przeniesienia równoległego dla dowolnej ścieżki γ na pewnym otoczeniu dowolnego punktu $x \in B$, mówimy, że zostało określone **powiązanie włókien** (klasy C^∞) w wiązce E .

Elementarną konsekwencję istnienia przeniesienia równoległego wskazuje

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 8. Jeśli dla dowolnej ścieżki w B istnieje przeniesienie równoległe, to wówczas dla dowolnego punktu $p \in E$ we włóknie E_x nad dowolnym punktem $x \in B$ istnieje jednoznacznie określona monomorfizm

$$(7) \quad \text{Hor}_p : \mathbb{T}_x B \rightarrow \mathbb{T}_p E$$

o własności

$$(8) \quad \text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathbf{P}_{0,t}^{\gamma}(p)$$

dla dowolnej ścieżki γ spełniającej warunek $\gamma(0) = x$, która implikuje tożsamość

$$(9) \quad \mathbb{T}_p \pi_E \circ \text{Hor}_p = \text{id}_{\mathbb{T}_{\pi_E(p)} B}.$$

Ponadto przestrzeń styczna $\mathbb{T}_p E$ ma rozkład

$$\mathbb{T}_p E = \mathbb{V}_p E \oplus \text{Image Hor}_p.$$

Odwzorowanie Hor_p określamy mianem **podniesienia poziomego** (lub **horyzontalnego**) **wektorów** z bazy do włókna.

Dowód: Zaczniemy od podkreślenia, że formuła (8) określa Hor_p jednoznacznie, a to z uwagi na dowolność wektora stycznego do ścieżki w danym punkcie bazy. Wystarczy zatem sprawdzić pożądane własności wyrażenia z prawej strony tej równości. To rzekłszy, zauważmy dalej, że rodzina dyfeomorfizmów $\mathbf{P}_{t_1, t_2}^{\gamma}$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$ dla ścieżki o nigdzie nie znikającym wektorze stycznym $\dot{\gamma}$ określa (lokalnie) gładkie pole wektorowe $\mathcal{V}$ nad $\gamma([0, 1])$ o potoku (albo, równoważnie, lokalnej grupie lokalnych dyfeomorfizmów)

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{V}} &: [0, 1] \times \pi_E^{-1}(\gamma([0, 1])) \longrightarrow \pi_E^{-1}(\gamma([0, 1])) \\ &: (t, p) \longmapsto \mathbf{P}_{\gamma^{-1} \circ \pi_E(p), t}^{\gamma}(p) \equiv \Phi_{\mathcal{V}}(t, p), \end{aligned}$$

przy czym zachodzi, rzecz jasna, tożsamość

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\gamma^{-1} \circ \pi_E(p), p) = p,$$

a samo pole $\mathcal{V}$ spełnia równanie

$$\mathcal{V}(p) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=\gamma^{-1} \circ \pi_E(p)} \Phi_{\mathcal{V}}(t, p).$$

Rozważmy następnie dowolne cięcie lokalne

$$\sigma : \mathcal{O}_x \longrightarrow E, \quad \pi_E \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_x}$$

o własności

$$\sigma \circ \gamma(0) \equiv \sigma(x) = p.$$

Jego pochodną kowariantną w x wzdłuż pola stycznego do γ ,

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)),$$

obliczamy przy pomocy następującego zabiegu (różniczkując potok względem drugiego argumentu, należy pamiętać, że przy pierwszym argumencie zamrożonym na wartości $t = 0$, różniczkujemy w istocie odwzorowanie identycznościowe na przestrzeni warunków początkowych):

$$\begin{aligned} T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma} (P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t))) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t))) \\ &= D_1\Phi_{\mathcal{Y}}(0, P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0))) + D_2\Phi_{\mathcal{Y}}(0, P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0))) (\nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x)) \\ &= \mathcal{Y}(P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0))) + T_{P_{0,0}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(0))} \text{id}_E(\nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x)) \\ &\equiv \mathcal{Y}(\sigma(x)) + \text{id}_{T_{\sigma(x)}E}(\nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x)) = \mathcal{Y}(p) + \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x), \end{aligned}$$

który pozwala nam ostatecznie zapisać

$$\mathcal{Y}(p) = T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x),$$

a zatem także

$$\text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} P_{0,t}^{\gamma}(p) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}(t, p) = \mathcal{Y}(p) = T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x),$$

czyli

$$(10) \quad \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) = T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) - \text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0)).$$

Widzimy więc, że wprost na mocy definicji pochodnej kowariantnej (oraz odwzorowania stycznego) odwzorowanie Hor_p jest $\mathbb{R}$ -liniowe, przy czym zależy od wyboru ścieżki wyłącznie poprzez $\dot{\gamma}(0)$ (oraz $\gamma(0) = x$). Jest ono także injektywne, gdyż z jednej strony

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) \in V_pE,$$

a z drugiej

$$T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) \in V_pE \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\gamma}(0) \equiv T_{\sigma(x)}\pi_E \circ T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) = 0_{T_xB},$$

przeto koniec końców

$$\begin{aligned} T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) - \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) \in V_pE &\quad \Longleftrightarrow \quad T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) \in V_pE \\ &\quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\gamma}(0) = 0_{T_xB}, \end{aligned}$$

czyli

$$\text{Image Hor}_p \cap V_pE = \{0_{T_pE}\}.$$

Powyższe implikuje ciąg relacji między przestrzeniami $\mathbb{R}$ -liniowymi (mamy tu do czynienia z wewnętrzną sumą prostą)

$$\text{Image Hor}_p \oplus V_pE = \text{Image Hor}_p + T_pE \subset T_pE,$$

a ponieważ – z racji injektywności Hor_p , która czyni z niego izomorfizm na obraz – prawdziwą jest równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(\text{Image Hor}_p \oplus V_pE) &= \dim_{\mathbb{R}} \text{Image Hor}_p + \dim_{\mathbb{R}} V_pE = \dim_{\mathbb{R}} T_xB + \dim F \\ &= \dim B + \dim F = \dim E \equiv \dim_{\mathbb{R}} T_pE, \end{aligned}$$

przeto w istocie

$$\text{Image Hor}_p \oplus V_pE = T_pE.$$

Tożsamość (9) wynika bezpośrednio z wyprowadzonego powyżej wyrażenia na $\text{Hor}_p(\dot{\gamma}(0))$. $\square$

Relację pomiędzy powyższą strukturą a konstrukcją Ehresmanna określa

Twierdzenie 5. Powiązanie Ehresmanna na wiązce włóknistej określa na niej powiązanie włókien.

Dowód: Istnienie powiązania Ehresmanna na wiązce E wymiaru $D \equiv \dim E$ nad bazą B wymiaru $d \equiv \dim B$ pozwala nam wybrać na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_p$ dowolnego punktu $p \in E$ współrzędne lokalne $\{y^\mu\}^{\mu \in \overline{1,D}}$ stowarzyszone z lokalną bazą $\{\frac{\partial}{\partial y^\mu}\}_{\mu \in \overline{1,D}}$ (przestrzeni cięć) wiązki stycznej $\mathbb{T}E$ uzgodnioną z rozkładem $\mathbb{T}E = \mathbb{V}E \oplus_{\mathbb{R},B} \mathbb{H}E$ poprzez warunek

$$\forall_{q \in \mathcal{U}_p} : \mathbb{V}_q E \equiv \text{Ker } \mathbb{T}_q \pi_E = \bigoplus_{\alpha \in \overline{d+1,D}} \left\langle \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(q) \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Niechaj $\{x^a\}^{a \in \overline{1,d}}$ będą lokalnymi współrzędnymi na pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_x \supset \pi_E(\mathcal{U}_p)$ punktu $x \equiv \pi_E(p)$ stowarzyszonymi z lokalną bazą $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}_{a \in \overline{1,d}}$ (przestrzeni cięć) wiązki stycznej $\mathbb{T}B$. Powyższa adaptacja bazy $\mathbb{T}E|_{\mathcal{U}_p}$ (i wynikająca z niej interpretacja współrzędnych $\{y^\alpha\}^{\alpha \in \overline{d+1,D}}$ jako współrzędnych we włóknach π_E) pozwala zapisać (lokalną prezentację współrzędną odzworowania stycznego do rzutu na bazę)

$$\mathbb{T}_q \pi_E \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}(q) \right) = \Pi(q)^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^a}(\pi_E(q)),$$

przy czym submersywność π_E implikuje stały (maksymalny) rząd $\text{rk } \Pi(q) = d$ macierzy funkcji (lokalnie) gładkich $\Pi(q) \equiv (\Pi(q)^\alpha{}_\mu)_{\mu \in \overline{1,D}}^{a \in \overline{1,d}}$, która przybiera postać

$$\Pi(q) = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\Pi}(q) & \mathbf{0}_{d \times D-d} \end{array} \right), \quad \underline{\Pi}(q) \equiv \left(\Pi(q)^\alpha{}_\lambda \right)_{\lambda \in \overline{1,d}}^{a \in \overline{1,d}} \in \text{GL}(d; \mathbb{R}).$$

W analogiczny sposób możemy przedstawić rzut kanoniczny

$$\mathbb{P}_{\mathbb{V}_q E}^{\mathbb{H}_q E} : \mathbb{T}_q E \longrightarrow \mathbb{V}_q E$$

na podprzestrzeni wertykalną wzdłuż przestrzeni horyzontalnej,

$$\mathbb{P}_{\mathbb{V}_q E}^{\mathbb{H}_q E} \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}(q) \right) = \Upsilon(q)^\alpha{}_\mu \frac{\partial}{\partial y^\alpha}(q),$$

w terminach macierzy funkcji (lokalnie) gładkich $\Upsilon(q) \equiv (\Upsilon(q)^\alpha{}_\mu)_{\mu \in \overline{1,D}}^{\alpha \in \overline{d+1,D}}$, która przybiera postać

$$\Upsilon(q) = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\Upsilon}(q) & \mathbf{1}_{D-d \times D-d} \end{array} \right), \quad \underline{\Upsilon}(q) \equiv \left(\Upsilon(q)^\alpha{}_\lambda \right)_{\lambda \in \overline{1,d}}^{\alpha \in \overline{d+1,D}}.$$

Niech teraz $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \pi_E(\mathcal{U}_p)$ będzie ścieżką przez $\gamma(t_*) \equiv x$, $t_* \in [0, 1]$, o reprezentacji współrzędniowej $x^a \circ \gamma \equiv \gamma^a$, $a \in \overline{1,d}$. Pokażemy, że istnieje jednoznaczne lokalne **podniesienie poziome** (lub **horyzontalne**) tejże **ścieżki** przechodzące przez punkt $p \in E_x$, tj. lokalna ścieżka $\tilde{\gamma}_p :]t_* - \varepsilon_p, t_* + \varepsilon_p[\longrightarrow \mathcal{U}_p$, $\varepsilon_p > 0$ przez $\tilde{\gamma}_p(t_*) \equiv p$ (o reprezentacji współrzędniowej $y^\mu \circ \tilde{\gamma}_p \equiv \tilde{\gamma}_p^\mu$, $\mu \in \overline{1,D}$) spełniająca warunki

$$\forall_{t \in]t_* - \varepsilon_p, t_* + \varepsilon_p[} : \left(\pi_E \circ \tilde{\gamma}_p(t) = \gamma(t) \quad \wedge \quad D\tilde{\gamma}_p(t) \in \mathbb{H}_{\tilde{\gamma}_p(t)} E \right).$$

W tym celu przepisujemy drugi z powyższych warunków (który implikuje pierwszy) w postaci współrzędniowej:

$$M(\tilde{\gamma}_p(t))^\mu{}_A \frac{d\tilde{\gamma}_p^\mu}{dt}(t) = D\gamma(t)^A, \quad A \in \overline{1,D},$$

w której

$$M(\tilde{\gamma}_p(t)) = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\Pi}(\tilde{\gamma}_p(t)) & \mathbf{0}_{d \times D-d} \\ \hline \underline{\Upsilon}(\tilde{\gamma}_p(t)) & \mathbf{1}_{D-d \times D-d} \end{array} \right) \in \mathbb{R}(D)$$

i

$$D\gamma(t)^a = \frac{d\gamma^a}{dt}(t), \quad a \in \overline{1,d}, \quad D\gamma(t)^\alpha = 0, \quad \alpha \in \overline{d+1,D}.$$

Macierz $M(\tilde{\gamma}_p(t))$ jest jawnie odwracalna, możemy przeto przepisać warunki podniesienia poziomego w formie zagadnienia początkowego

$$\frac{d(\tilde{\gamma}_p^\mu)}{dt}(t) = \left(M(\tilde{\gamma}_p(t))^{-1} \right)^\mu{}_A D\gamma(t)^A, \quad \tilde{\gamma}_p(t_*) \equiv p.$$

Zagadnienie to (nieautonomiczne) ma – w świetle Lematu Picarda–Lindelöfa (Tw. Niezb.r-g.18 z „Niezbędnika różniczkowo-geometrycznego”, oznaczanego odtąd etykietą Niezb.r-g) – lokalnie

jednoznaczne rozwiązanie, które jest postulowanym podniesieniem poziomym γ . Rozwiązanie to zależy gładko od warunku „początkowego” (pośredniego) $\tilde{\gamma}_p(t_*) \equiv p$. Możemy je gładko przedłużyć wybierając w tym celu otoczenia punktów wzdłuż tak rekonstruowanego podniesienia położonych coraz dalej od wyjściowego $p \in E_{\gamma(t_*)}$ będące dziedzinami lokalnych map – w każdym z nich podniesienie jest, jak powyżej, określone jednoznacznie. Przy tym zwartość krzywej $\gamma([0, 1])$ (jako ciągłego obrazu zbioru zwartego $[0, 1]$) gwarantuje, że procedurę przedłużania podniesionej poziomo krzywej można zrealizować w skończonej liczbie kroków. Przebiegając E_x jako dziedzinę warunków początkowych dla podniesienia γ , uzyskujemy tym sposobem gładką rodzinę dyfeomorfizmów (wobec jedyności rozwiązań powyższych zagadnień początkowych podniesienia $\tilde{\gamma}_p$ do różnych punktów p nie przecinają się)

$$(11) \quad P_{0,t}^\gamma : E_x \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t)} : p \mapsto \tilde{\gamma}_p(t), \quad t \in [0, 1],$$

określających w naturalny sposób (lokalne – nad $\pi_E^{-1}(\gamma([0, 1]))$) gładkie pole wektorowe $\mathcal{V} \in \Gamma(\mathbf{H}E|_{\pi_E^{-1}(\gamma([0, 1]))})$ – jest to pole wektorów stycznych do podniesień poziomych. Innymi słowy, opisana tu procedura podniesienia poziomego daje nam gładką rodzinę izomorfizmów

$$\text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)} : T_{\gamma(t)}M \xrightarrow{\cong} H_{\tilde{\gamma}_p(t)}E, \quad p \in E_x, \quad t \in [0, 1],$$

zyskując przy tym interpretację parametryzowanej gładko przez warunek początkowy $p \in E_x$ rodziny krzywych całkowych podniesienia $\mathcal{V}$ pola prędkości $\dot{\gamma}$ rozwiązujących zagadnienia początkowe

$$(12) \quad \dot{\tilde{\gamma}}_p(t) = \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t)), \quad \tilde{\gamma}_p(0) = p.$$

Z tego punktu widzenia zasada superpozycji (PT3) z Def. 8, jak również warunek początkowy (PT2), wynikają bezpośrednio z konstrukcji potoku zagadnienia początkowego z Tw. Niezb.r-g.21 (patrz: także Tw. Niezb.r-g.22).

Pozostaje na koniec rozpatrzyć pochodną kowariantną definiowaną przez tak określone powiązanie włókien w E . Rozumując jak w dowodzie Stw. 2, wyznaczamy

$$(13) \quad \begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x) &\equiv \frac{d}{dt}\big|_{t=0} P_{0,t}^{\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)) = -\text{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0)) + T_{\sigma(x)}P_{0,0}^{\gamma^{-1}}\left(\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \sigma \circ \gamma(t)\right) \\ &= -\text{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0)) + T_x\sigma(\dot{\gamma}(0)) \end{aligned}$$

(znak „ σ ” w wyrażeniu $-\text{Hor}_{\sigma(x)}(\dot{\gamma}(0))$ odzwierciedla odwrócenie kierunku upływu „czasu” względem tego w potoku pola $\text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}(\dot{\gamma}(t))$) konstatujemy więc, że pochodna zależy od użytej w jej definicji ścieżki γ tylko poprzez $\dot{\gamma}(0)$ (oraz $\gamma(0) = x$), od samego zaś pola $\dot{\gamma}$ – w sposób jawnie $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -liniowy, zgodnie z aksjomatem (PT4) w Def. 8. $\square$

Mamy też naturalny odpowiednik Def. 4:

Definicja 9. Przyjmijmy zapis Def. 8 i niechaj $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami włóknistymi z powiązaniem włókien. **Morfizm wiązek włóknistych z powiązaniem włókien (nad dyfeomorfizmem baz)** pomiędzy E_1 i E_2 to morfizm wiązek włóknistych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \pi_{E_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

o składowej bazowej⁴ $f \in \text{Diff}^\infty(B_1, B_2)$ spełniający poniższy warunek:

⁴Powód zawężenia wyboru składowej bazowej morfizmu jest oczywisty – zawężenie takie zapewnia istnienie naturalnego transportu pól wektorowych między bazami, a zatem także pomiędzy podwiązkami poziomymi. Możliwe jest uogólnienie podanej definicji, którego jednak nie będziemy tu rozważać.

(FCM0) dla dowolnych: ścieżki $\gamma : [0, 1] \longrightarrow B_1$ i $t \in [0, 1]$ zachodzi tożsamość

$$\Phi \circ P_{0,t}^{(1)\gamma} = P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma} \circ \Phi,$$

przy czym wówczas dla dowolnych: cięcia (lokalnego) $\sigma : \mathcal{O}_x \longrightarrow E_1$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu $x \in B_1$ oraz pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$ spełniony jest **warunek kowariancji**

$$T_{\sigma(x)}\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)) = \nabla_{Tf(\mathcal{V})}^{(2)}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)).$$

Uwaga 2. Warunek kowariancji z punktu (FCM0) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (przeprowadzonym z wykorzystaniem dowolnej ścieżki γ w B_1 przez $x = \gamma(0)$ o wektorze stycznym $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x)$),

$$\begin{aligned} T_{\sigma(x)}\Phi(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)) &\equiv T_{\sigma(x)}\Phi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{(1)\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t))\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi \circ P_{0,t}^{(1)\gamma^{-1}}(\sigma \circ \gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma^{-1}}((\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ (f \circ \gamma)(t)) \\ &= \nabla_{Tf(\mathcal{V})}(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1})(f(x)), \end{aligned}$$

przy czym identyfikacja pola wektorowego, wzdłuż którego różniczkowane jest cięcie $\Phi \circ \sigma$ na końcu ciągu równości, wynika wprost z tożsamości

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = T_{\gamma(t)}f(\dot{\gamma}(t)).$$

To właśnie zweryfikowany powyżej warunek tłumaczy nazwę nadaną obiektowi $\nabla_{\mathcal{V}}\sigma$.

Twierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Def. 4. Warunek (FCM1) implikuje warunek (FCM0).

Dowód: Przemienność diagramu (6) z warunku (FCM1), który w ograniczeniu do punktu $p \in E_{1x}$, $x \in B_1$ przybiera postać

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} H_p E_1 & \xrightarrow{T_p \Phi|_{H_p E_1}} & H_{\Phi(p)} E_2 \\ \uparrow \text{Hor}_p^{(1)} & & \uparrow \text{Hor}_{\Phi(p)}^{(2)} \\ T_x B_1 & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} B_2 \end{array},$$

pozwala obliczyć, dla dowolnych ścieżek $\tilde{\gamma}_p$, $p \in E_{1x}$ będących podniesieniami ścieżki γ w B_1 przez $x \equiv \gamma(0)$, tj. będących rozwiązaniem zagadnienia początkowego (12) i definiujących tym samym powiązanie włókien wedle formuły (11), co następuje:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi \circ \tilde{\gamma}_p)(t) &= T_{\tilde{\gamma}_p(t)}\Phi\left(\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_p(t)\right) = T_{\tilde{\gamma}_p(t)}\Phi \circ \text{Hor}_{\tilde{\gamma}_p(t)}^{(1)}(\dot{\gamma}(t)) \\ &= \text{Hor}_{\Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t)}^{(2)} \circ T_{\gamma(t)}f(\dot{\gamma}(t)) = \text{Hor}_{\Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t)}^{(2)}\left(\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\right). \end{aligned}$$

Z drugiej strony wprost na mocy definicji podniesienia poziomego ścieżki $(f \circ \gamma)$ w B_2 przez $f(x) \equiv f \circ \gamma(0)$ do $\Phi(p)$ zachodzi równość

$$\text{Hor}_{\Phi(\tilde{\gamma}_p(t))}^{(2)}\left(\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\right) = \frac{d}{dt}(\widetilde{f \circ \gamma})_{\Phi(\tilde{\gamma}_p(0))}(t) \equiv \frac{d}{dt}(\widetilde{f \circ \gamma})_{\Phi(p)}(t),$$

ewidentnie więc – wobec tożsamości punktów początkowych, $(\widetilde{f \circ \gamma})_{\Phi(p)}(0) = \Phi(p) = \Phi \circ \tilde{\gamma}_p(0)$, oraz wektorów stycznych, a na gruncie twierdzenia o jedyności krzywej całkowej pola wektorowego przechodzącej przez dany punkt jego dziedziny – zachodzi równość

$$(\widetilde{f \circ \gamma})_{\Phi(p)} = \Phi \circ \tilde{\gamma}_p,$$

która w dowolnym punkcie $p \in E_1$ implikuje pożądaną relację

$$(\Phi \circ P_{0,t}^{(1)\gamma})(p) \equiv \Phi \circ \tilde{\gamma}_p(t) = (\widetilde{f \circ \gamma})_{\Phi(p)}(t) \equiv P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma}(\Phi(p)) = (P_{0,t}^{(2)f \circ \gamma} \circ \Phi)(p).$$

