

## W SIECI POWIĄZAŃ GŁÓWNYCH (MAWF '25/26 2.XIV [RRS])



Dotychczasowe nasze rozważania doprowadziły nas do studium powiązania na wiązce włóknistej jako – w gruncie rzeczy – konstruktywnej odpowiedzi na pytanie o naturalne/użyteczne różniczkowanie jej cięć. Mając za sobą – jako punkt wyjścia – logiczny Długi Marsz od wiązek wektorowych, z kanoniczną konstrukcją wiązki stycznej nad różnością gładką na czele, poprzez wiązki główne aż ku wiązkom stowarzyszonym, ale zarazem przed sobą i przede wszystkim w tym wykładzie – jako punkt dojścia – konstrukcję uzgodnionego ze strukturą modułu cliffordowskiego powiązania na wiązce spinorowej nad orientowalną różnością metryczną o znikającej drugiej klasie Stieffela–Whitneya, w której definicji centralną rolę odgrywa prolongacja wiązki *główniej* zorientowanych baz pseudo-ortonormalnych na wiązce stycznej nad tą różnością, dostrzegamy pierwszorzędne znaczenie w tak zorientowanym studium powiązania konstrukcji powiązania na wiązce głównej (rozumianej tu jako substrat podstawowy konstrukcji wiązek: Clifforda i spinorowej, a nawet – wtórnie – samej wiązki stycznej), przy czym naturalnym w tym kontekście jawi się rozpatrzenie warunków, w których powiązanie to jest zgodne z działaniem grupy strukturalnej we włóknie wiązki, a dalej – identyfikacja nośnika nie-kanonicznej informacji o powiązaniu, różnicującej jego dowolne wybory na danej wiązce głównej, a zakodowanej w lokalnej trywializacji formy powiązania. Tym właśnie zajmujemy się obecnie.

Zaczynamy od określenia najbardziej naturalnych więzów zgodności powiązania ze strukturą  $G$ -przestrzeni w różnych odsłonach tego pojęcia wprowadzonych w Wykładzie XII.

**Definicja 1.** Powiązanie Ehresmanna na wiązce głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  nazywamy **zgodnym z działaniem grupy strukturalnej**, ilekroć odwzorowania  $r_g, g \in G$  spełniają warunek

$$(1) \quad \forall_{p \in P_G} : H_{r_g(p)} P_G = T_p r_g (H_p P_G).$$

Powiązanie takie określamy również mianem **Ehresmanna powiązania głównego** na  $P_G$ .

Ażeby móc postąpić dalej w enumeracji naturalnych warunków uzgodnienia powiązania z działaniem grupy strukturalnej, a następną w kolejności jest jego definicja w terminach gładko indeksowanej (przez  $P_G$ ) rodziny operatorów rzutowych na  $TP_G$ , potrzebujemy

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego grupy strukturalnej  $G$  wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$ . Podwiązka pionowa  $VP_G$  wiązki stycznej  $TP_G$  nad

przestrzenią totalną  $P_G$  jest globalnie trywializowalna, tj. istnieje kanoniczny izomorfizm wiązek wektorowych (nad  $\mathbb{R}$ )

$$(\mathcal{V}P_G, P_G, \mathbb{K}^{\times \dim G}, \pi_{\mathcal{V}P_G} \upharpoonright_{\mathcal{V}P_G}) \cong (P_G \times \mathfrak{g}, P_G, \mathbb{K}^{\times \dim G}, \text{pr}_1).$$

Dowód: Rozważmy odwzorowanie (jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe i gładkie)

$$\widetilde{\text{Vert.}} : P_G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{(\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}, \text{id}_{\mathfrak{g}})} \mathcal{V}P_G \times \mathfrak{g} \equiv T_{(\cdot, e)}(P_G \times G) \xrightarrow{T_{(\cdot, e)}r} \mathcal{V}P_G \subset \mathcal{V}P_G$$

$$(3) \quad : (p, X) \mapsto (\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}(p), X) \mapsto T_{(p, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}(p), X) \equiv \widetilde{\text{Vert.}}_p(X),$$

w którego definicji wykorzystujemy zerowe cięcie  $\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}$  wiązki wektorowej  $\mathcal{V}P_G$  nad  $P_G$ . Przeciwdziedzina powyższego odwzorowania jest poprawnie określona, oto bowiem z uwagi na charakter działania definiującego  $r$  mamy

$$\begin{aligned} T_p \pi_{P_G}(\widetilde{\text{Vert.}}_p(X)) &\equiv T_p \pi_{P_G} \circ T_{(p, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}(p), X) = T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ r) \cdot (\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}(p), X) \\ &= T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ \text{pr}_1) \cdot (\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}(p), X) = T_{(p, e)}(\pi_{P_G} \circ \mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}(p)) \\ &= \mathbf{0}_{T_B} \circ \pi_{P_G}(p), \end{aligned}$$

czyli – w istocie – nad dowolnym punktem  $p \in P_G$  zachodzi inkluzja

$$\text{Im } \widetilde{\text{Vert.}}_p \subset \mathcal{V}_p P_G,$$

a przy tym odwzorowanie  $\widetilde{\text{Vert.}}$  pokrywa identyczność na wspólnej bazie obu wiązek,

$$\pi_{P_G}(\widetilde{\text{Vert.}}_p(X)) = p \equiv \text{pr}_1(p, X),$$

mamy przeto do czynienia z morfizmem wiązek wektorowych nad  $P_G$ , a ponieważ obrazem pola (stałego)  $(\cdot, X)$  jest pole fundamentalne na  $P_G$  stowarzyszone z  $X \ni \mathfrak{g}$ ,

$$(4) \quad T_{(\cdot, e)}r \cdot (\mathbf{0}_{\mathcal{V}P_G}(\cdot), X) = \mathcal{K}_X$$

(por. Def. 12.1), więc też wobec swobodnego charakteru działania  $G$  na  $P_G$ , otrzymujemy równoważność

$$\widetilde{\text{Vert.}}_p(X) = \mathbf{0}_{T_p P_G} \iff X = 0_{\mathfrak{g}},$$

czyli  $\widetilde{\text{Vert.}}$  jest monomorfizmem. Na podstawie porównania rzędów obu wiązek,

$$\text{rk}(P_G \times \mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim G \equiv \dim P_{\pi_{P_G}(p)} = \dim_{\mathbb{R}} T_p(P_{\pi_{P_G}(p)}) \equiv \text{rk } \mathcal{V}P_G,$$

wnioskujemy, że  $\widetilde{\text{Vert.}}$  jest w istocie postulowanym izomorfizmem.  $\square$

Powyższe przygotowuje nas do wysłowienia naturalnej adaptacji pojęcia formy powiązania z Def. 12.3 do obecnych okoliczności, które precyzuje

**Definicja 2. Forma powiązania głównego** na wiązce głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  to morfizm wiązek wektorowych nad  $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{A}, \text{id}_{P_G}) : \mathcal{V}P_G \longrightarrow P_G \times \mathfrak{g}$$

o własnościach

$$(5) \quad \mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert.}} = \text{id}_{P_G \times \mathfrak{g}}$$

oraz<sup>1</sup>

$$(6) \quad \forall_{g \in G} : \mathcal{A} \circ T r_g = (r_g \times T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}.$$

Wyznacza ona w naturalny sposób **potencjał powiązania głównego**

$$\underline{\mathcal{A}} := \text{pr}_2 \circ \mathcal{A} \in \Omega^1(P_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}.$$

<sup>1</sup>Podkreślmy: warunek (5) stanowi ledwie adaptację warunku wyrażonego przez diagram przemienności w Def. 12.3 i jako taki definiuje (generyczną) formę powiązania, które dopiero warunek (6) uzgadnia z  $r$ .

Bez trudu przekonujemy się o strukturalnym charakterze trywilizacji  $\widetilde{\text{Vert.}}$ ,

**Stwierdzenie 2.** Trywializacja  $\widetilde{\text{Vert.}}$  z (dowodu) Stw. 1 jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym,

$$\widetilde{\text{Vert.}} : (\mathbf{P}_G \times \mathfrak{g}, r. \times \mathbf{T}_e \text{Ad}_{\text{Inv}(\cdot)}) \xrightarrow{\cong} (\mathbf{VP}_G, \mathbf{T}r. \downarrow_{\mathbf{VP}_G}).$$

*Dowód:* Stwierdzenie to stanowi szczególny przypadek ogólniejszego Stw. 12.1, niemniej jednak przeprowadzimy jego dowód w ramach przypomnienia. Dla dowolnego wektora  $v \in \mathbf{V}_p \mathbf{P}_G$ ,  $p \in \mathbf{P}_G$  będącego przeciwobrazem  $X = \text{pr}_2 \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$  i dowolnego elementu  $g \in G$  obliczamy

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_p r_g(v) &= \mathbf{T}_p r_g \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p(X) \equiv \mathbf{T}_p r_g \left( \frac{d}{dt} \downarrow_{t=0} p \triangleleft \exp^G(t \triangleright X) \right) = \frac{d}{dt} \downarrow_{t=0} r_g(p \triangleleft \exp^G(t \triangleright X)) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \downarrow_{t=0} r_g(p) \triangleleft \text{Ad}_{g^{-1}}(\exp^G(t \triangleright X)), \end{aligned}$$

ale też w świetle Stw. Niezb.cart.11 (o naturalności odwzorowania eksponencjalnego) zachodzi tożsamość

$$\text{Ad}_{g^{-1}}(\exp^G(t \triangleright X)) = \exp^G(t \triangleright \mathbf{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(X)),$$

możemy zatem powyższą równość przepisać w postaci

$$\mathbf{T}_p r_g(v) = \frac{d}{dt} \downarrow_{t=0} r_g(p) \triangleleft \exp(t \triangleright \mathbf{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(X)) \equiv \widetilde{\text{Vert.}} \circ (r_g \times \mathbf{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v),$$

skąd postulowany wniosek, że

$$(7) \quad \mathbf{T}_p r_g \downarrow_{\mathbf{V}_p \mathbf{P}_G} = \widetilde{\text{Vert.}} \circ (r_g \times \mathbf{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}.$$

□

Możemy już teraz sformułować i udowodnić

**Twierdzenie 1.** W dowolnej wiązce głównej powiązanie główne Ehresmanna wyznacza formę powiązania głównego na te same wiązce, i *vice versa*.

*Dowód:* Dowód stanowi adaptację dowodu Tw. 12-2, w której skupiamy się na swoistościach powiązania głównego. Zauważmy najpierw, że forma powiązania głównego definiuje – w świetle Tw. 12.1 – podwiązkę wektorową

$$(8) \quad \mathbf{HP}_G := \text{Ker}(\mathcal{A}, \text{id}_{\mathbf{P}_G}) \subset \mathbf{TP}_G.$$

Przy tym dla dowolnego  $v \in \text{Ker}(\mathbf{T}\pi_{\mathbf{P}_G} \downarrow_{\mathbf{H}_p \mathbf{P}_G}) \equiv \text{Ker}(\mathcal{A} \downarrow_{\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G}) \cap \text{Ker}(\mathbf{T}\pi_{\mathbf{P}_G} \downarrow_{\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G})$  stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} v &= \widetilde{\text{Vert.}} \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) \equiv \widetilde{\text{Vert.}} \circ \text{id}_{\mathbf{P}_G \times \mathfrak{g}} \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) = \widetilde{\text{Vert.}} \circ (\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert.}}) \circ \widetilde{\text{Vert.}}_p^{-1}(v) \\ &= \widetilde{\text{Vert.}} \circ \mathcal{A}(v) = 0_{\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G}, \end{aligned}$$

co przesądza o iniektywności  $\mathbf{T}\pi_{\mathbf{P}_G} \downarrow_{\mathbf{H}_p \mathbf{P}_G}$  i (tym samym) dowodzi istnienia izomorfizmu

$$\text{Im}(\mathbf{T}\pi_{\mathbf{P}_G} \downarrow_{\mathbf{H}_p \mathbf{P}_G}) \cong \mathbf{H}_p \mathbf{P}_G.$$

Zarazem dla  $\mathcal{A} \downarrow_{\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G, \mathfrak{g})$  jest spełniona równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(\mathcal{A} \downarrow_{\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G}) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_p \mathbf{P}_G - \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(\mathcal{A} \downarrow_{\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}_p \mathbf{P}_G + \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_{\pi_{\mathbf{P}_G}(p)} B - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{T}_{\pi_{\mathbf{P}_G}(p)} B, \end{aligned}$$

co oznacza, że  $\mathbf{T}\pi_{\mathbf{P}_G} \downarrow_{\mathbf{H}_p \mathbf{P}_G}$  jest w istocie izomorfizmem. Na koniec przekonamy się o G-niezmienniczości tak określonej podwiązki poziomej. Niech zatem  $\xi \in \mathbf{H}_p \mathbf{P}_G \equiv \text{Ker}(\mathcal{A} \downarrow_{\mathbf{T}_p \mathbf{P}_G})$ , a wtedy

$$\mathcal{A} \circ \mathbf{T}_p r_g(\xi) = (r_g \times \mathbf{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \mathcal{A}(\xi) = (r_g(p), \mathbf{T}_e \text{Ad}_{g^{-1}}(0_{\mathfrak{g}})) = (r_g(p), 0_{\mathfrak{g}}),$$

więc prawdziwą jest inkluzja

$$\mathbf{T}_p r_g(\mathbf{H}_p \mathbf{P}_G) \subset \mathbf{H}_{r_g(p)} \mathbf{P}_G,$$

ale też w takim razie – wobec odwracalności  $T_p r_g$  –

$$T_{r_g(p)} r_{g^{-1}} (H_{r_g(p)} P_G) \subset H_{r_g^{-1} \circ r_g(p)} P_G = H_p P_G ,$$

czyli

$$H_{r_g(p)} P_G \equiv T_p r_g \circ T_{r_g(p)} r_{g^{-1}} (H_{r_g(p)} P_G) \subset T_p r_g (H_p P_G) ,$$

co koniec końców daje nam pożądaną równość

$$T_p r_g (H_p P_G) = H_{r_g(p)} P_G .$$

□

Odpowiedzi na fundamentalne pytanie o istnienie powiązania uzgodnionego, będącej zarazem pierwszym krokiem w kierunku wzmiankowanej wcześniej identyfikacji nośnika jego swoistości, dostarcza

**Twierdzenie 2.** Na dowolnej wiązce głównej istnieje forma powiązania głównego.

*Dowód:* Zaczniemy od rekonstrukcji kanonicznego modelu formy powiązania w obrazie lokalnej trywializacji (co ma sens wobec „wertikalnego” charakteru warunków ją definiujących). Niechaj zatem  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  będzie wiązką główną o lokalnych trywializacjach  $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$ . Wykorzystując relacje

$$T_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G) \equiv T_x \mathcal{O}_i \oplus T_g G \equiv T_x \mathcal{O}_i \oplus T_e \ell_g(\mathfrak{g}) ,$$

nad każdym z elementów pokrycia trywializującego  $\mathcal{O}_i$  definiujemy odwzorowanie

$$\mathcal{A}_i : T\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathfrak{g} : T_{(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V) \longmapsto (\tau_i^{-1}(x, g), T_g \ell_{g^{-1}}(V)) \equiv (\tau_i^{-1}(x, g), V \lrcorner \theta_L(g)) ,$$

jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe i zachowujące włókna. Sprawdzamy, że odwzorowania te mają własności wymienione w Def. 2. Po pierwsze więc, korzystając z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times G & \xrightarrow{r_\cdot} & \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times G \times G & \xrightarrow{\text{id}_B \times \wp \equiv \text{id}_B \times m} & \mathcal{O}_i \times G \end{array}$$

oraz Równ. (Niezb.cart.2), obliczamy – dla dowolnego wektora  $X \in \mathfrak{g}$  –

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i \circ \widetilde{\text{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x,g)}(X) &\equiv \mathcal{A}_i \circ T_{(\tau_i^{-1}(x,g), e)} r_\cdot (\mathbf{0}_{TP_G} \circ \tau_i^{-1}(x, g), X) \\ &= \mathcal{A}_i \circ T_{(x,g)} \tau_i^{-1} \circ T_{(\tau_i^{-1}(x,g), e)} (\tau_i \circ r_\cdot) (\mathbf{0}_{TP_G} \circ \tau_i^{-1}(x, g), X) \\ &= \mathcal{A}_i \circ T_{(x,g)} \tau_i^{-1} \circ T_{(x,g,e)} (\text{id}_B \times m) \circ T_{(\tau_i^{-1}(x,g), e)} (\tau_i \times \text{id}_G) (\mathbf{0}_{TP_G} \circ \tau_i^{-1}(x, g), X) \\ &= \mathcal{A}_i \circ T_{(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (T_x \text{id}_B \oplus T_{(g,e)} m) (T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i \circ \mathbf{0}_{TP_G} \circ \tau_i^{-1}(x, g), T_e \text{id}_G(X)) \\ &= \mathcal{A}_i \circ T_{(x,g)} \tau_i^{-1} \circ (\text{id}_{T_x B} \oplus T_{(g,e)} m) (0_{T_x B}, 0_{T_g G}, \text{id}_{T_e G}(X)) \\ &\equiv (\tau_i^{-1}(x, g), T_g \ell_{g^{-1}} \circ T_{(g,e)} m(0_{T_g G}, X)) = (\tau_i^{-1}(x, g), T_g \ell_{g^{-1}} \circ T_e \ell_g(X)) \\ &= (\tau_i^{-1}(x, g), X) \equiv \text{id}_{P_G \times \mathfrak{g}}(\tau_i^{-1}(x, g), X) . \end{aligned}$$

Po drugie w dotychczasowych oznaczeniach i dla dowolnego elementu  $h \in G$ , a w odwołaniu do diagramu przemienne

$$\begin{array}{ccc} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{r_h} & \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i^{-1} \uparrow & & \uparrow \tau_i^{-1} \\ \mathcal{O}_i \times G & \xrightarrow{\text{id}_B \times \wp_h} & \mathcal{O}_i \times G \end{array}$$

sprawdzamy warunek G-ekwiwariantności  $\mathcal{A}_i$ ,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_i \circ T_{\tau_i^{-1}(x,g)} r_h \circ T_{(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V) = \mathcal{A}_i \circ T_{(x,gh)} \tau_i^{-1} \circ T_{(x,g)} (\text{id}_B \times \wp_h)(v, V) \\ &= \mathcal{A}_i \circ T_{(x,gh)} \tau_i^{-1} \circ (T_x \text{id}_B \oplus T_g \wp_h)(v, V) = \mathcal{A}_i \circ T_{(x,gh)} \tau_i^{-1} (\text{id}_{T_x B}(v), T_g \wp_h(V)) \\ &\equiv (\tau_i^{-1}(x, gh), T_{gh} \ell_{(gh)^{-1}} \circ T_g \wp_h(V)) = (r_h \circ \tau_i^{-1}(x, g), T_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ T_g \ell_{g^{-1}}(V)) \\ &\equiv (r_h \times T_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \mathcal{A}_i \circ T_{(x,g)} \tau_i^{-1}(v, V). \end{aligned}$$

W świetle powyższych wyników  $\mathcal{A}_i$  tworzą rodzinę lokalnych form powiązania głównego. Wykorzystując dowolny rozkład jedności  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  (klasy  $C^\infty$ ) stowarzyszony z pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  (którego istnienie możemy założyć bez straty ogólności rozważań), tworzymy z nich formę określoną (i gładką) globalnie

$$\mathcal{A}(\cdot) := \sum_{i \in I} \lambda_i \circ \pi_{P_G} \circ \pi_{TP_G}(\cdot) \triangleright \mathcal{A}_i(\cdot),$$

o pożądanym własnościach. □

Wysłowiwszy powiązane wzajemnie definicje uzgodnienia struktur na wiązce głównej i zbadawszy zagadnienie istnienia (formy) powiązania głównego, możemy uzupełnić dotychczasową dyskusję o stosowną adaptację Def. 12.5. morfizmów wiązek z powiązaniem.

**Definicja 3.** Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz 2 i niechaj  $(P_G^\alpha, B_\alpha, G, \pi_{P_G^\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą wiązkami głównymi z powiązaniem głównym Ehresmanna. Mianem **morfizmu wiązek głównych z powiązaniem głównym Ehresmanna** (lub **zachowującego powiązanie główne Ehresmanna**) określamy morfizm wiązek głównych (opisany, jak poprzednio, przez diagram przemienne (3.2)), który dodatkowo spełnia warunek (FCM1) z Def. 12.4. Wreszcie też w obecności form powiązania głównego na obu wiązkach mówimy o **morfizmie wiązek głównych z formą powiązania głównego** (lub **zachowującym formę powiązania głównego**), jeśli morfizm  $(\Phi, f, \text{id}_G)$  jest opisany, jak poprzednio, przez diagram przemienne (3.1), a nadto spełniony jest warunek (PFCM2') morfizm  $\Phi$  zachowuje formę powiązania głównego w rozumieniu równości

$$\mathcal{A}_2 \circ T\Phi = (\Phi \times \text{id}_g) \circ \mathcal{A}_1.$$

W szczególności ilekroć  $\Phi$  jest automorfizmem wertykalnym  $P_G$  mówimy o **transformacji cechowania formy powiązania**

$$\mathcal{A}^\Phi = (\Phi \times \text{id}_g) \circ \mathcal{A} \circ T\Phi^{-1},$$

patrz: Def. 12.5.

**Uwaga 1.** Warunek (PFCM2') stanowi bezpośrednią transkrypcję generycznego warunku (FCM2) z Def. 12.4., uwzględniającą istnienie globalnej trywializacji  $\widetilde{\text{Vert.}}$  ze Stw. 1. Przekonujemy się o tym, wzięwszy pod uwagę G-ekwiwariantny charakter  $\Phi$ ,

$$\Phi \circ r^1 = r^2 \circ (\Phi \times \text{id}_G),$$

który implikuje równość

$$T_p \Phi \circ T_{(p,e)} r^1(\mathbf{0}_{T_p P_G^1}, X) = T_{(\Phi(p),e)} r^2(T_p \Phi(\mathbf{0}_{T_p P_G^1}), T_e \text{id}_G(X)) = T_{(\Phi(p),e)} r^2(\mathbf{0}_{T_{\Phi(p)} P_G^2}, X),$$

czyli

$$\mathsf{T}\Phi \circ \widetilde{\mathsf{Vert}}^1 = \widetilde{\mathsf{Vert}}^2_{\Phi(\cdot)},$$

a to na podstawie oczywistej relacji

$$(9) \quad \mathsf{A}^\alpha = \widetilde{\mathsf{Vert}}^\alpha \circ \underline{\mathsf{A}}^\alpha.$$

W następnej kolejności przechodzimy do nader istotnego z fizycznego punktu widzenia (w tym – konstrukcji strukturalnego powiązania na wiązce spinorowej) opisu lokalnego powiązania uzgodnionego.

**Stwierdzenie 3.** Przyjmijmy zapis Def. 2. W obrazie trywializacji lokalnej  $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$  forma powiązania głównego przyjmuje postać

$$\tau_i^{-1*} \underline{\mathsf{A}}(x, g) \equiv \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} = \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x) + \theta_L(g)$$

dla pewnej 1-formy na  $\mathcal{O}_i$  o wartościach w  $\mathfrak{g}$ ,

$$\mathsf{A}_i(x) \in \mathsf{T}_x^* B \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g},$$

którą traktujemy – podobnie jak  $\theta_L(g) \in \mathsf{T}_g^* G \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  – jako szczególny wektor z przestrzeni  $\mathsf{T}_{(x, g)}^*(\mathcal{O}_i \times G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \equiv (\mathsf{T}_x^* B \oplus \mathsf{T}_g^* G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  w (dowolnym) punkcie  $(x, g) \in \mathcal{O}_i \times G$ .

Dowód: Uwzględniając powyższy rozkład przestrzeni  $\mathsf{T}_{(x, g)}^*(\mathcal{O}_i \times G)$ , możemy zawsze zapisać

$$(10) \quad \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} = a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x),$$

gdzie  $a_i(x; g) \in \mathsf{T}_x^* B \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  oraz  $\vartheta_i(g; x) \in \mathsf{T}_g^* G \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$  są 1-formami o własnościach

$$\forall (v, V) \in \mathsf{T}_x B \oplus \mathsf{T}_g G : V \lrcorner a_i(x; g) = 0_{\mathfrak{g}} = v \lrcorner \vartheta_i(g; x).$$

Rozłożywszy 1-formę  $\vartheta_i(g; x)$  w bazie utworzonej przez formy lewo niezmiennicze,

$$\vartheta_i(g; x) =: \vartheta_{iA}^B(x, g) \triangleright \theta_L^A(g) \otimes_{\mathbb{R}} t_B,$$

obliczamy najpierw obie strony Równ. (10) na wektorze pionowym  $(0_{\mathsf{T}_x B}, L_A(g))$ , dostając – w odwołaniu do definicji (3) i Równ. (4), jak również Równ. (5) –

$$\begin{aligned} \vartheta_{iA}^B(x, g) \triangleright t_B &= L_A(g) \lrcorner \vartheta_i(g; x) = (0_{\mathsf{T}_x B}, L_A(g)) \lrcorner (a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x)) \\ &= \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} (0_{\mathsf{T}_x B}, L_A(g)) = \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} (0_{\mathsf{T}_x B}, \frac{d}{dt} \big|_{t=0} g \cdot \exp^G(t \triangleright t_A)) \\ &= \underline{\mathsf{A}} \left( \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \tau_i^{-1} (x, g \cdot \exp^G(t \triangleright t_A)) \right) = \underline{\mathsf{A}} \left( \frac{d}{dt} \big|_{t=0} r_{\exp^G(t \triangleright t_A)} (\tau_i^{-1}(x, g)) \right) = \underline{\mathsf{A}} (\mathcal{K}_{t_A}^{(r)} (\tau_i^{-1}(x, g))) \\ &= \underline{\mathsf{A}} \circ \widetilde{\mathsf{Vert}}_{\tau_i^{-1}(x, g)} (t_A) = \mathsf{pr}_2 (\tau_i^{-1}(x, g), t_A) = t_A. \end{aligned}$$

Wnioskujemy na tej podstawie, że

$$\vartheta_i(g; x) \equiv \theta_L(g).$$

W następnej kolejności w miejsce wektora pionowego wstawiamy  $(v, 0_{\mathsf{T}_g G})$  i wykorzystujemy tożsamość

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} (v, 0_{\mathsf{T}_g G}) &= \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_{(x, e)} (\mathsf{id}_B \times \wp_g) (v, 0_{\mathsf{T}_e G}) = \mathsf{T}_{(x, e)} (\tau_i^{-1} \circ (\mathsf{id}_B \times \wp_g)) (v, 0_{\mathsf{T}_e G}) \\ &= \mathsf{T}_{(x, e)} (r_g \circ \tau_i^{-1}) (v, 0_{\mathsf{T}_e G}) = \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x, e)} r_g \circ \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} (v, 0_{\mathsf{T}_e G}) \equiv \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x, e)} r_g \circ \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} \circ \mathsf{T}_x (\cdot, e) (v) \\ &= \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x, e)} r_g \circ \mathsf{T}_x (\tau_i^{-1} \circ (\cdot, e)) (v) \equiv \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x, e)} r_g \circ \mathsf{T}_x \sigma_{\tau_i} (v), \end{aligned}$$

w której zapisie  $\sigma_{\tau_i}$  jest cięciem stowarzyszonym z trywializacją lokalną  $\tau_i$  wedle schematu z dowodu Stw. 3.4. Tożsamość ta pozwala (dzięki Równ. (6)) przepisać składową  $a_i$  w postaci

$$\begin{aligned} v \lrcorner a_i(x; g) &= (v, 0_{\mathsf{T}_g G}) \lrcorner (a_i(x; g) + \vartheta_i(g; x)) = \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_{(x, g)} \tau_i^{-1} (v, 0_{\mathsf{T}_g G}) \\ &= \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_{\tau_i^{-1}(x, e)} r_g \circ \mathsf{T}_x \sigma_{\tau_i} (v) = \mathsf{pr}_2 \circ (r_g \times \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{g^{-1}}) \circ \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_x \sigma_{\tau_i} (v) = \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{g^{-1}} \circ \underline{\mathsf{A}} \circ \mathsf{T}_x \sigma_{\tau_i} (v) \end{aligned}$$

$$\equiv \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{g^{-1}} \circ (v \sqcup \mathsf{A}_i(x)),$$

gdzie

$$\mathsf{A}_i \equiv \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_{\sigma_{\tau_i}} \equiv \sigma_{\tau_i}^* \underline{\mathcal{A}},$$

więc też – wobec dowolności  $v$  –

$$a_i(x; g) = \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x).$$

Ostatecznie zatem odtwarzamy postulowaną prezentację lokalną formy powiązania głównego.  $\square$

Powyższe prowadzi nas wprost do

**Definicja 4.** Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj  $\tau_i : \pi_{\mathsf{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  będą trywializacjami lokalnymi wiązki głównej  $(\mathsf{P}_G, B, G, \pi_{\mathsf{P}_G})$ . Zdefiniujemy **płaskie cięcia unitalne**

$$s_{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e).$$

**Potencjał lokalny powiązania głównego**  $\mathcal{A}$  na wiązce głównej  $\mathsf{P}_G$  nad  $\mathcal{O}_i$  (stowarzyszony z cięciami  $s_{(i)}$ ) to odwzorowanie (klasy  $C^\infty$ )

$$\mathsf{A}_i := s_{(i)}^* \underline{\mathcal{A}} \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

przyjmujące w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_i$  postać<sup>2</sup>

$$(11) \quad \mathsf{A}_i(x) := \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{x s_{(i)}}.$$

**Uwaga 2.** Na gruncie powyższego stwierdzenia, odczytanego w połączeniu z Def. 12.6. i Równ. (9) wyprowadzamy dla cięcia

$$\sigma(x) = \tau_i^{-1}(x, \sigma_i(x)) = r_{\sigma_i(x)}(\tau_i^{-1}(x, e)) \equiv r_{\sigma_i(x)}(s_{(i)}(x)),$$

w użytych wcześniej oznaczeniach i w odwołaniu do Równ. (4), związek

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_2 \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{\sigma(x)}^{-1}(\nabla^{\mathsf{A}} \sigma(x)) &= \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_x \sigma \equiv \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_x (r_{\sigma_i(\cdot)}(s_{(i)}(\cdot))) \\ &= \underline{\mathcal{A}} \circ \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)} r_{\sigma_i(x)} \circ (\mathsf{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathsf{R}}^{\mathsf{A}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_{\mathsf{A}}}^{(r)}(s_{(i)}(x))) \\ &= \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ \underline{\mathcal{A}} \circ (\mathsf{T}_x s_{(i)} + \sigma_i^* \theta_{\mathsf{R}}^{\mathsf{A}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_{\mathsf{A}}}^{(r)}(s_{(i)}(x))) \\ &= \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ (\mathsf{A}_i(x) + \sigma_i^* \theta_{\mathsf{R}}^{\mathsf{A}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2 \circ (\underline{\mathcal{A}} \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{s_{(i)}(x)}) \circ \widetilde{\mathrm{Vert}}_{s_{(i)}(x)}^{-1}(\mathcal{K}_{t_{\mathsf{A}}}^{(r)}(s_{(i)}(x)))) \\ &= \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ (\mathsf{A}_i(x) + \sigma_i^* \theta_{\mathsf{R}}^{\mathsf{A}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2(s_{(i)}(x), t_{\mathsf{A}})) \\ &\equiv \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ (\mathsf{A}_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_{\mathsf{R}}(x)) = \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{\sigma_i(x)^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x) + (\sigma_i^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_{\mathsf{L}}(x), \end{aligned}$$

przy czym w ostatnim przejściu skorzystaliśmy ze Stw. Niezb.cart.13. i użyliśmy adaptacji szczegółowego wyprowadzenia Równ. (12.3) do działań *prawych* (proste ćwiczenie!):

$$(12) \quad \mathsf{T}_x(r_{g(\cdot)}(\sigma(\cdot))) = \mathsf{T}_{\sigma(x)} r_{g(x)} \circ (\mathsf{T}_x \sigma + g^* \theta_{\mathsf{R}}^{\mathsf{A}}(x) \otimes \mathcal{K}_{t_{\mathsf{A}}}^{(r)}(\sigma(x)))$$

(gdzie  $\mathcal{K}_{t_{\mathsf{A}}}^{(r)}$  jest polem wektorowym fundamentalnym (prawostronnym – w tym wypadku na  $\mathsf{P}_G$ ) stowarzyszonym z generatorem  $t_{\mathsf{A}}$  algebry Liego  $\mathfrak{g}$  wedle prawostronnego wariantu Def. 12.1).

Specjalizacja powyższej formuły pozwala zarówno ustalić regułę zszycia potencjałów lokalnych nad (niepustymi) przecięciami  $\mathcal{O}_{ij}$  ich dziedzin określoności, jak i wyznaczyć dla nich wzory transformacyjne względem automorfizmów wiązki  $\mathsf{P}_G$ .

Pierwszą z wymienionych powyżej relacji ustala

---

<sup>2</sup>Odwzorowanie  $\mathsf{T}_x s_{(i)} : \mathsf{T}_x \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)} \pi_{\mathsf{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  traktujemy tu jako element przestrzeni  $\mathsf{T}_x^* \mathcal{O}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{s_{(i)}(x)}^* \pi_{\mathsf{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ .

**Stwierdzenie 4.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis. W dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  należącym do przecięcia dziedzin trywializacji lokalnych  $\tau_i$  i  $\tau_j$  wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$  zachodzi tożsamość

$$(13) \quad A_j(x) = T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ A_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

*Dowód:* Wystarczy zauważyć, że

$$s_{(j)}(x) \equiv \tau_j^{-1}(x, e) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)) = r_{g_{ij}(x)}(\tau_i^{-1}(x, e)) \equiv r_{g_{ij}(x)}(s_{(i)}(x)),$$

a następnie wykorzystać rachunek z Uwagi 2. □

Ten sam schemat kodowania struktury w danych lokalnych możemy następnie zrealizować w odniesieniu do stosownych morfizmów.

**Twierdzenie 3.** Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj  $(P_G^\alpha, B, G, \pi_{P_G^\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami głównymi (o wspólnej grupie strukturalnej  $G$ ) z formą powiązania głównego nad wspólną bazą  $B$ , o odnośnych trywializacjach lokalnych  $\tau_i^\alpha : \pi_{P_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$  stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , przy czym wprowadzamy dwie rodziny cięć lokalnych:

$$s_{(i)}^\alpha := \tau_i^{\alpha-1}(\cdot, e) : \mathcal{O}_i \rightarrow P_G^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\},$$

a wraz z nimi – odwzorowania przejścia  $g_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz 1-formy  $A_i^\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  grupy Liego  $G$ . Dowolny morfizm wiązek głównych zachowujący formę powiązania głównego,

$$\begin{array}{ccc} P_G^1 & \xrightarrow{\Phi} & P_G^2 \\ \pi_{P_G^1} \downarrow & & \downarrow \pi_{P_G^2} \\ B & \xlongequal{\text{id}_B} & B \end{array},$$

zadaje rodzinę  $\{h_i\}_{i \in I}$  odwzorowań (lokalnie) klasy  $C^\infty$

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G, \quad i \in I$$

spełniających warunki: (3.3) oraz

$$(14) \quad \forall x \in \mathcal{O}_i : A_i^2(x) = T_e \text{Ad}_{h_i(x)} \circ A_i^1(x) + ((\text{Inv} \circ h_i)^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

*Dowód:* Po uwzględnieniu Tw. 3.2 pozostaje zweryfikować zapostulowaną formułę transformacyjną dla potencjału powiązania. W tym celu przywołujemy warunek (PFCM2') z Def. 3 i podstawiamy go do definicji (11) tegoż potencjału, wykorzystując prostą zależność

$$\tau_i^{2-1}(x, h_i(x)) = \Phi(\tau_i^{1-1}(x, e)),$$

którą przepisujemy w obecnej notacji jako

$$\Phi \circ s_{(i)}^1(x) = r_{h_i(x)}(s_{(i)}^2(x)).$$

Otrzymujemy tym sposobem z jednej strony równość

$$\underline{A}_2 \circ T_{s_{(i)}^1(x)} \Phi \circ T_x s_{(i)}^1 = \text{pr}_2 \circ (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \mathcal{A}_1 \circ T_x s_{(i)}^1 = \underline{A}_1 \circ T_x s_{(i)}^1 \equiv A_i^1(x),$$

z drugiej zaś – w świetle wyprowadzenia Równ. (12.3) i rachunków w treści Uwagi 2 –

$$\underline{A}_2 \circ T_{s_{(i)}^1(x)} \Phi \circ T_x s_{(i)}^1 = \underline{A}_2 \circ T_x (r_{h_i(\cdot)}(s_{(i)}^2(\cdot))) = T_e \text{Ad}_{h_i(x)^{-1}} \circ A_i^2(x) + (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

Zestawiwszy powyższe wyniki, uzyskujemy – w odwołaniu do Stw. Niezb.cart.13 – oczekiwaną tożsamość,

$$\begin{aligned} A_i^2(x) &= T_e \text{Ad}_{h_i(x)} \circ A_i^1(x) - T_e \text{Ad}_{h_i(x)} \circ (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) = T_e \text{Ad}_{h_i(x)} \circ A_i^1(x) - (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x) \\ &= T_e \text{Ad}_{h_i(x)} \circ A_i^1(x) + ((\text{Inv} \circ h_i)^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x). \end{aligned}$$

I odwrotnie, mając rodzinę  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow G$ ,  $i \in I$  odwzorowań z treści dowodzonego stwierdzenia, określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i : \pi_{P_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \pi_{P_G^2}^{-1}(\mathcal{O}_i) : \tau_i^{1-1}(x, g) \mapsto \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g), \quad i \in I.$$

Łatwo przekonujemy się, że są to w istocie ograniczenia odwzorowania globalnie gładkiego  $\Phi : P_G^1 \rightarrow P_G^2$  do poszczególnych elementów pokrycia trywializującego,  $\Phi|_{\pi_{P_G^1}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$ , oto bowiem w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ s_{(i)}^1(x) &= \Phi_j \circ \tau_j^{1-1}(x, g_{ji}^1(x)) = \tau_j^{2-1}(x, h_j(x) \cdot g_{ji}^1(x)) = \tau_j^{2-1}(x, g_{ji}^2(x) \cdot h_i(x)) \\ &= \tau_i^{1-1}(x, h_i(x)) \equiv \Phi_i \circ s_{(i)}^1(x), \end{aligned}$$

a nadto odwzorowania  $\Phi_i$  są G-ekwiwariantne, co sprawdzamy dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_i$  oraz  $g, h \in G$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ r_h^1 \circ \tau_i^{1-1}(x, g) &= \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, g \cdot h) = \tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g \cdot h) = r_h^2(\tau_i^{2-1}(x, h_i(x) \cdot g)) \\ &\equiv r_h^2 \circ \Phi_i \circ \tau_i^{1-1}(x, g). \end{aligned}$$

Na zakończenie dowodu sprawdzamy warunek (PFCM2') z Def. 3. Czynimy to w obrazie trywializacji lokalnej  $\tau_i^1$ , posilkując się przy tym Stw. 3. Oto więc stwierdzamy równość

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{A}}_2 \circ T\Phi \circ T_{(x,g)} \tau_i^{1-1} &\equiv (\underline{\mathcal{A}}_2 \circ T_{(x, h_i(x) \cdot g)} \tau_i^{2-1}) \circ T_{(x,g)} (\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1}) \\ &\equiv (\tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1-1})^* (T_e \text{Ad}_{\text{Inv} \circ \text{pr}_2(\cdot)} \circ \text{pr}_1^* A_i^2 + \text{pr}_2^* \theta_L)(x, g) \\ &= T_e \text{Ad}_{(h_i(x) \cdot g)^{-1}} \circ A_i^2(x) + (\text{m} \circ (h_i \times \text{id}_G))^* \theta_L(x, g), \end{aligned}$$

którą w świetle przyjętych założeń oraz Stw. Niezb.cart.17 możemy przepisać w oczekiwanej postaci

$$\begin{aligned} &\text{pr}_2 \circ \underline{\mathcal{A}}_2 \circ T\Phi \circ T_{(x,g)} \tau_i^{1-1} \\ &= T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (A_i^1(x) - (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x)) + \theta_L(g) + T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (h_i^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\ &= T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A_i^1(x) + \theta_L(g) \equiv \underline{\mathcal{A}}_1 \circ T_{(x,g)} \tau_i^{1-1} = \text{pr}_2 \circ (\Phi \times \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \underline{\mathcal{A}}_1 \circ T_{(x,g)} \tau_i^{1-1} \end{aligned}$$

□

Tytułem uzupełnienia dyskusji zasadniczej, istotnego z punktu widzenia zastosowań teoriopolo-  
lowych rozwijanego tu formalizmu i rozszerzonej dyskusji informacji geometrycznej zapisanej w  
powiązaniu spinorowym, podamy jeszcze

**Definicja 5.** Przyjmijmy zapis Def. 4. Potencjały powiązania głównego  $A_i$  na wiązce głównej  $P_G$  zadają rodzinę lokalnie gładkich 2-form na bazie o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$

$$F_i := dA_i + A_i \wedge A_i, \quad i \in I$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ij}} : F_j(x) = T_e \text{Ad}_{g_{ij}(x)^{-1}} \circ F_i(x).$$

Są one nazywane **lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązce  $P_G$** . **Powiązanie główne płaskie** to takie, którego lokalne 2-formy krzywizny są równe zeru.

Wykład zamyka elementarna konstatacja własności transformacyjnych krzywizny.

**Stwierdzenie 5.** Przyjmijmy zapis Def. 5 i niechaj  $\{F_{\mathcal{O}}^{\alpha}\}_{i \in I}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą lokalnymi 2-formami krzywizny powiązania głównego na wiązках głównych nad ustaloną bazą  $B$ , stowarzyszonymi ze wspólnym pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , przy czym zakładamy, że między wiązkami tymi istnieje izomorfizm wiązek głównych z powiązaniem pokrywający identyczność na bazie, o danych lokalnych  $\{h_i\}_{i \in I}$  zdefiniowanych w treści Tw. 3. Wówczas zachodzą tożsamości

$$F_i^2 = T_e \text{Ad}_{h_i} \circ F_i^1.$$

Dowód: Prosty rachunek. □

#### DODATEK A. INTERPRETACJA WARUNKÓW ZSZYCIA DLA POTENCJAŁÓW LOKALNYCH

Chwila zastanowienia nad sensem geometrycznym Stw. 4 prowadzi nas do uogólnienie twierdzenia o rekonstrukcji wiązki (główniej) na podstawie jej danych lokalnych na przypadek wiązki głównej z powiązaniem uzgodnionym.

**Twierdzenie 4** (O rekonstrukcji wiązki głównej z powiązaniem). Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Każda wiązka główna  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  z formą powiązania głównego wyznacza nad swym pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$

- rodzinę  $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}$  odwzorowań lokalnie gładkich

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$$

spełniających warunek 1-kocyklu (2-3-4.1);

- rodzinę  $\{A_i\}_{i \in I}$  lokalnie gładkich 1-form o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  grupy Liego  $G$

$$A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

spełniających warunki

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}, x \in \mathcal{O}_{ij}} : A_j(x) = T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ A_i(x) + (g_{ij}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x).$$

I odwrotnie, niechaj  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie pokryciem otwartym rozmaitości gładkiej  $B$ . Dowolna stowarzyszona z  $\mathcal{O}$  para rodzin odwzorowań lokalnie gładkich

$$(\{g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}, \{A_k\}_{k \in I})$$

spełniających powyższe warunki określa – zgodnie z (konstruktywnym dowodem) Tw. 1-2.2 – wiązkę główną  $P_G = (\bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G)) / g_{..}$  o grupie strukturalnej  $G$  i o odwzorowaniach przejścia stowarzyszonych z  $\mathcal{O}_{ij}$  tożsamych z  $g_{ij}$ ,  $(i, j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}$  oraz formie powiązania głównego zadawanej formułą

$$(15) \quad \mathcal{A}(v, V) := (x, g, T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A_i(x)(v) + V \lrcorner \theta_L(g)), \quad (x, g) \in \mathcal{O}_i \times G,$$

zapisaną dla dowolnego wektora  $(v, V) \in T_x \mathcal{O}_i \oplus T_g G \equiv T_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G)$ . Ilekroć odwzorowania te są danymi lokalnymi pewnej wiązki głównej nad  $B$  o włóknach typowym  $G$ , ta ostatnia wiązka jest izomorficzna z wiązką określaną przez  $g_{ij}$  i  $A_i$ .

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z wcześniejszej analizy oraz z Tw. 1-2.2. Trzeba jeszcze tylko określić stosowne działanie grupy strukturalnej  $G$  na włóknach wiązki zrekonstruowanej według schematu przedstawionego w dowodzie Tw. 1-2.2,

$$P_G = \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) \right) / g_{..}.$$

Definiujemy odwzorowanie

$$r. : P_G \times G \longrightarrow P_G : [(x, g, i), h] \longmapsto [(x, g \cdot h, i)],$$

którego gładkość jest konsekwencją surjektywnej submersywności odwzorowania  $\pi_{\sim}$  zadanego analogicznie jak to z dowodu Tw. 1-2.2 oraz Stw. Niezb.r-g.29 – istotnie,  $r_{\cdot}$  jest (jedynym) odwzorowaniem domykającym diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & P_G \\ & \nearrow \pi_{\sim} \circ \tilde{R}_{\cdot} & \uparrow r_{\cdot} \\ \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) \times G & \xrightarrow{\pi_{\sim} \times \text{id}_G} & P_G \times G \end{array} \quad , ,$$

w którym

$$\tilde{R}_{\cdot} : \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) \times G \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times G) : ((x, g, i), h) \longmapsto (x, g \cdot h, i)$$

jest jawnie gładkie i cechę tę ma także (tautologicznie)  $\pi_{\sim}$ .

Na obecnym etapie pozostaje jedynie upewnić się, że zrekonstruowana z danych lokalnych forma powiązania jest obiektem globalnie gładkim (klasy  $C^{\infty}$ ) o własnościach opisanych w Def. 2. Zasadniczo wniosek taki daje się prosto wyprowadzić ze Stw. 3, niemniej jednak my mozolnie sprawdzimy wszystkie własności. Mamy zatem do porównania, w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ , wynik ewaluacji na dowolnym wektorze  $(v, V) \in T_x \mathcal{O}_i \oplus T_g G$  1-formy  $\mathcal{A}$  wyrażonej w terminach potencjału lokalnego  $A_i$  z wynikiem ewaluacji na obrazie tegoż wektora względem odwzorowania stycznego do transformacji przejścia

$$\begin{aligned} G_{ij} \equiv (\text{id}_{\mathcal{O}_{ij}} \times m) \circ (\text{pr}_1, g_{ij} \times \text{id}_G) & : \mathcal{O}_{ij} \times G \longrightarrow \mathcal{O}_{ij} \times G^{\times 2} \longrightarrow \mathcal{O}_{ij} \times G \\ & : (x, g) \longmapsto (x, g_{ji}(x), g) \longmapsto (x, g_{ji}(x) \cdot g) \end{aligned}$$

1-formy  $\mathcal{A}$  wyrażonej w terminach potencjału lokalnego  $A_j$ . Przy tym zamiast pchać  $(v, V)$  wzdłuż odwzorowania przejścia, moglibyśmy równoważnie cofnąć wzdłuż tegoż odwzorowania 1-formę  $A_j$ , a następnie obliczyć ją na  $(v, V)$ . Wystarczy zatem porównać wynik cofnięcia 1-formy  $\mathcal{A}$  zapisanej przy użyciu potencjału  $A_j$  z tą samą 1-formą wyrażoną w terminach potencjału  $A_i$ , co czyniąc w odwołaniu do Stw. 4 oraz do Stw. Niezb.cart.17 oraz Niezb.cart.13, otrzymujemy pożądaný wynik:

$$\begin{aligned} & T_e \text{Ad}_{(g_{ji}(x) \cdot g)^{-1}} \circ A_j(x) + ((m \circ (g_{ji} \times \text{id}_G))^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x, g) \\ = & T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}} \circ (T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ A_i(x) + (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x)) + \theta_L(g) + T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\ = & T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A_i(x) + \theta_L(g) + T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) + T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}} \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) \\ = & T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A_i(x) + \theta_L(g) + T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) - T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}} \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R(x) \\ = & T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A_i(x) + \theta_L(g) + T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(x) - T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)^{-1}} \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ (g_{ji}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \theta_L(x) \\ = & T_e \text{Ad}_{g^{-1}} \circ A_i(x) + \theta_L(g). \end{aligned}$$

Drugą z oczekiwanych własności, Równ. (5), sprawdzamy w bezpośrednim odwołaniu do Równ. (4), zauważając na wstępie, że postać (włókna) wiązki odtworzonej z danych lokalnych w konstruktywnym dowodzie Tw. 1-2.2 prowadzi do utożsamienia  $\mathcal{K}_X(x, g) \equiv (0_{T_x B}, L_X(g))$  w dziedzinie  $\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ni (x, g)$  trywializacji lokalnej wiązki zrekonstruowanej  $P_G$ . W obrazie tejże trywializacji otrzymujemy więc – dla dowolnego wektora  $X \in \mathfrak{g}$  – równość

$$\mathcal{A} \circ \widetilde{\text{Vert}}_{(x, g)}(X) \equiv \mathcal{A}(0_{T_x B}, L_X(g)) = (x, g, L_X \lrcorner \theta_L(g)) \equiv (x, g, X).$$

Na koniec wreszcie upewniamy się o G-ekwiwariantności zapostulowanej formy powiązania głównego. W równości

$$\mathcal{A} \circ T_{(x, g)}(\text{id}_B \times \wp_h)(v, V) = \mathcal{A} \circ (\text{id}_{T_x B} \oplus T_g \wp_h)(v, V)$$

$$= \left( x, g \cdot h, \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{(g \cdot h)^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x)(v) + \mathsf{T}_g \wp_h(V) \lrcorner \theta_L(g \cdot h) \right),$$

uwzględniamy więc raz jeszcze Stw. Niezb.cart.13, które pozwala przepisać

$$\mathsf{T}_g \wp_h(V) \lrcorner \theta_L(g \cdot h) = V \lrcorner (\wp_h^* \otimes \mathsf{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L(g) = \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{h^{-1}} \circ \theta_L(g)(V),$$

a zatem także

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \mathsf{T}_{(x,g)}(\mathsf{id}_B \times \wp_h)(v, V) &= ((\mathsf{id}_B \times \wp_h) \times \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{h^{-1}})(x, g, \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathsf{A}_i(x)(v) + V \lrcorner \theta_L(g)) \\ &\equiv ((\mathsf{id}_B \times \wp_h) \times \mathsf{T}_e \mathsf{Ad}_{h^{-1}}) \circ \mathcal{A}(v, V). \end{aligned}$$

□