

BUSHIDŌ

(MAWF '25/26 2.XV [RRS])



SPIS TREŚCI

1. Via Vulgata	1
2. Pejzaż lokalny z polem cechowania w roli genius loci	5
3. Via Culminis, czyli Bushidō	7
Dodatek A. Innymi słowy	9
Literatura	14

Zgodnie z logiką dotychczasowego studium teorii wiązek włóknistych, jak w również w obliczu jego nadrzędnego celu, którym pozostaje wyprowadzenie sensownej definicji pochodnej kowariantnej na przestrzeni cięć wiązki spinorowej, stajemy obecnie przed zadaniem skonstruowania powiązania na wiązce stowarzyszonej z wiązką główną wyposażoną w formę powiązania głównego, którego rozwiązanie powinno odzwierciedlać w jakiś naturalny sposób obecność cartanowskiego mechanizmu stowarzyszania.

1. VIA VULGATA

W obecnych okolicznościach warto powrócić do pierwotnego zagadnienia, jakie doprowadziło nas do rozważań nad powiązaniem w ogólności. Oto abstrakcyjnym naszym celem, umotywowanym naturalną potrzebą fizykalną, było zdefiniowanie takiego różniczkowania cięć (lokalnych) wiązki włóknistej E (o włóknie typowym F) wzdłuż pól wektorowych na bazie B tejże wiązki, które przyjmowałyby wartości w podwiązce pionowej $\forall E \subset TE$ i tym samym, poprzez stosowny dyfeomorfizm strukturalny $\forall E|_{E_x} \cong TF$ nad dowolnym punktem $x \in B$, pozwalałoby przetransportować funktorialnie (za pośrednictwem funktora stycznego T) dowolną istotną (np. fizykalnie) strukturę z przestrzeni cięć $\Gamma(E)$ (na której jest ona indukowaną z włókna typowego F) na

przestrzeni ich określonych przez to różniczkowanie pochodnych kierunkowych. W kontekście konstrukcji wiązki stowarzyszonej $P_G \times_\lambda M$, o włóknie typowym M , tą strukturą jest struktura rozmaitości z działaniem $\lambda : G \times M \longrightarrow M$ grupy G , przy czym ta ostatnia występuje tu w roli grupy strukturalnej wiązki głównej P_G i zarazem w roli włókna typowego wiązki grup $\text{Ad}P_G$, o grupie cięć globalnych $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ realizującej się na $\Gamma(P_G \times_\lambda M)$ w sposób lokalnie modelowany na λ . Nasze poszukiwania różniczkowania na $\Gamma(P_G \times_\lambda M)$ ekwiwariantnego względem działania grupy $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ komplikuje nieoczywisty charakter realizacji tejże grupy na $V(P_G \times_\lambda M)$. Miałoby przemyśleć nad abstrakcyjną konstrukcją wygodnego modelu wiązki $V(P_G \times_\lambda M)$ (rozumianego jako wybór reprezentanta jej klasy izomorfizmu) na podobieństwo $P_G \times \mathfrak{g} \cong VP_G$ ze Stw. 14.1, który byłby przestrzenią naturalnego takiego działania, wykorzystamy raczej dotychczasowe rezultaty w celu skonstruowania różniczkowania przyjmującego wartości *wprost* w rozmaitości TM , co ma tę oczywistą zaletę, że pozwoli nam zapostulować naturalną postać gładkiego działania:

$$(1) \quad T_2\lambda : G \times TM \longrightarrow TM : (g, v) \longmapsto T_{\pi_{TM}(v)}\lambda_g(v)$$

grupy strukturalnej G na otrzymanym tą drogą obiekcie – splecenie tegoż działania z λ ma w zamyśle realizować, w obrazie trywializacji lokalnej, poszukiwana przez nas pochodna kowariantna na $\Gamma(P_G \times_\lambda M)$. Łatwość, z jaką zidentyfikowaliśmy działanie na przestrzeni modelowej przeciwdziedziny tejże pochodnej, ma swoją cenę: jest nią nieoczywisty charakter nieodzownego przejścia – o naturze różniczkowej – od cięć wiązki stowarzyszonej $P_G \times_\lambda M$ do odwzorowań liniowych pomiędzy wiązkami stycznymi TB i TM . Instrumentalnymi w jego zrozumieniu okazują się obserwacje dotyczące schematów prezentacji cięć poczynione w kontekście dyskusji strukturalnej wiązek stowarzyszonych, a konkretnie Stw. 5-6.8, które pozwala nam wypisać dwie istotne dla naszych rozważań bijekcje:

$$\Phi_\lambda : \Gamma(P_G \times_\lambda M) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_G(P_G, M),$$

$$\Phi_{T_2\lambda} : \Gamma(P_G \times_{T_2\lambda} TM) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_G(P_G, TM).$$

Te w połączeniu z konstrukcją powiązania (głównego) na wiązce głównej z Def. 14.1 i 14.2, w szczególności zaś – z konstrukcją podniesienia poziomego

$$\text{Hor.} : TB \rightarrow TP_G, \quad \text{Hor.}(TB) = H.P_G$$

ze Stw. 12.2, pozwala nam przeformułować zagadnienie różniczkowania cięcia $\phi \in \Gamma(P_G \times_\lambda M)$ wiązki stowarzyszonej wzdłuż pola wektorowego $\mathcal{X} \in \Gamma(TB)$ nad jej bazą w terminach różniczkowania odnośnego odwzorowania G -ekwiwariantnego $\Phi_\lambda[\phi] \in \text{Hom}_G(P_G, M)$ wzdłuż pola wektorowego $\text{Hor.}(\mathcal{X}) \in \Gamma(TP_G)$ nad przestrzenią totalną wiązki głównej P_G . Taki zabieg formalny jest o tyle wygodny, że pozwala prosto narzucić warunek $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -ekwiwariantności, oto bowiem jeśli oznaczymy poszukiwaną pochodną symbolem

$$\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi] : P_G \longrightarrow TM,$$

to możemy zażądać, iżby dla dowolnego cięcia globalnego $\gamma \in \Gamma(\text{Ad}P_G)$ była spełniona tożsamość¹

$$\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\Gamma B\lambda_\gamma(\phi)](\cdot) = \Phi_{\text{Ad}}T_2\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)}(\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_\lambda[\phi]))(\cdot),$$

a jeśli wyprowadzone na podstawie takiego żądania odwzorowanie okaże się G -ekwiwariantnym,

$$\forall_{g \in G} : \mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_\lambda[\phi]) \circ r_g = T_2\lambda_{g^{-1}} \circ \mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_\lambda[\phi]),$$

to wówczas – raz jeszcze w odwołaniu do Stw. 5-6.8 – będziemy mogli zdefiniować pochodną kowariantną

$$\nabla_{\mathcal{X}}\phi := \Phi_{T_2\lambda}^{-1}[\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi]] \in \Gamma(P_G \times_{T_2\lambda} TM),$$

która wprost na mocy swej definicji będzie miała pożądaną własność

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{X}}(\Gamma B\lambda_\gamma(\phi)) &\equiv \Phi_{T_2\lambda}^{-1}[\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\Gamma B\lambda_\gamma(\phi)]] = \Phi_{T_2\lambda}^{-1}[\Phi_{\text{Ad}}T_2\lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}(\Phi_\lambda[\phi]))] \\ &= \Gamma B\lambda_\gamma(\Phi_{T_2\lambda}^{-1}[\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi]]) \equiv \Gamma B\lambda_\gamma(\nabla_{\mathcal{X}}\phi), \end{aligned}$$

¹Używamy zapisu z dowodu Tw. 5-6.1.

wyprowadzoną na gruncie (i w zapisie) Stw. 5-6.11. Po tych wyjaśnieniach możemy przystąpić do bezpośredniej konstrukcji pochodnej $\mathcal{D}_{\text{Hor.}(\mathcal{X})}$.

Punktem wyjścia do ustalenia poprawki do zwykłej pochodnej kierunkowej, $\mathcal{D} - \mathsf{T}$, jaką wymuszają narzucone przez nas więzy ekwariantności operatora $\mathcal{D}$, jest analiza własności transformacyjnych tejże pochodnej względem transformacji cechowania $\gamma \in \Gamma(\text{Ad}P_G)$ różniczkowanego cięcia $\phi \in \Gamma(P_G \times_\lambda M)$, w odwołaniu do Stw. Stw. 5-6.11, wyprowadzenia równości (12.3) oraz Stw. 12.1,

$$\begin{aligned} & \mathsf{T}(\Phi_\lambda[\Gamma B \underline{\lambda}_\gamma(\phi)]) = \mathsf{T}(\Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\Phi_\lambda[\phi])) \\ &= \mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}(\Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot)) \circ \mathsf{T}(\Phi_\lambda[\phi]) + \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot))(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)) \circ (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_L, \end{aligned}$$

przy czym t_A , $A \in \overline{1, \dim G}$ jest tutaj bazą algebry Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G . Z drugiej strony, uwzględniając formułę (14.12) (w obrazie współrzędniowym, tj. przy wyborze współrzędnych lokalnych na P_G : $\{y^\alpha\}_{\alpha \in \overline{1, \dim P_G}}$ w otoczeniu $p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}$ oraz $\{x^\mu\}_{\mu \in \overline{1, \dim P_G}}$ w otoczeniu p) G -ekwariantność potencjału powiązania głównego $\underline{A} \equiv \underline{A}^A \otimes t_A \in \Omega^1(P_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ na P_G (wprowadzonego w Def. 14.2), liczymy wprost

$$\begin{aligned} & {}^\gamma \underline{A}(p) \equiv (r(\cdot, \text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)))^* dy^\alpha(p) \otimes \underline{A}_\alpha(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \\ &= (\mathsf{T}_{p r \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}})^\alpha_\mu \triangleright (dx^\mu(p) + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_R^A(p) \mathcal{K}_{t_A}^{(r)\mu}(p)) \otimes \underline{A}_\alpha(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \\ &\equiv \underline{A}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \circ \mathsf{T}_{p r \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_R^A(p) \otimes \underline{A}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \circ \mathsf{T}_{p r \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}}(\mathcal{K}_{t_A}^{(r)}(p)) \\ &= \underline{A}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \circ \mathsf{T}_{p r \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_R^A(p) \otimes \mathsf{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)} \circ \underline{A}(p)(\mathcal{K}_{t_A}^{(r)}(p)) \\ &= \underline{A}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \circ \mathsf{T}_{p r \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_R^A(p) \otimes \mathsf{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)}(t_A) \\ &= \underline{A}(p \triangleleft \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}) \circ \mathsf{T}_{p r \Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + \mathsf{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)} \circ (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_R(p) \\ &= \mathsf{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)} \circ \underline{A}(p) + \mathsf{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)} \circ (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_R(p) \\ &= \mathsf{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](p)} \circ \underline{A}(p) + (\text{Inv} \circ \Phi_{\text{Ad}}[\gamma])^* \theta_L(p), \end{aligned}$$

odwołując się przy ostatnim przejściu do Równ. (Niezb.cart.10). Z połączenia powyższych rachunków wywodzimy równość

$$\begin{aligned} & \mathsf{T}(\Phi_\lambda[\Gamma B \underline{\lambda}_\gamma(\phi)]) \\ &= \mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}(\Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot)) \circ \mathsf{T}(\Phi_\lambda[\phi]) + \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot))(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)) \circ ({}^\gamma \underline{A} - \mathsf{T}_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)} \circ \underline{A}), \end{aligned}$$

która w wygodnym zapisie ${}^\gamma \phi \equiv \Gamma B \underline{\lambda}_\gamma(\phi)$ tłumaczy się, po przywołaniu Stw. 12.1, na strukturalną tożsamość:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(\Phi_\lambda[{}^\gamma \phi]) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_\lambda[{}^\gamma \phi]) \circ {}^\gamma \underline{A} &= \mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}(\Phi_{\text{Ad}} \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\cdot)) \circ (\mathsf{T}(\Phi_\lambda[\phi]) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \underline{A}) \\ &\equiv \mathsf{T}_2 \lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)} \circ (\mathsf{T}(\Phi_\lambda[\phi]) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \underline{A}), \end{aligned}$$

a ponieważ dla dowolnego elementu $g \in G$ mamy też tożsamość

$$(\mathsf{T}(\Phi_\lambda[\phi]) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \underline{A}) \circ \mathsf{T}r_g = \mathsf{T}_2 \lambda_{g^{-1}} \circ (\mathsf{T}(\Phi_\lambda[\phi]) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \underline{A}),$$

wynikającą trywialnie z G -ekwariantności: $\Phi_\lambda[\phi]$, potencjału powiązania głównego i fundamentalnego pola wektorowego dla λ , przeto z powyższych dociekań ekstrahujemy

Definicja 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$, w której wybrano bazę $\{t_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$, a M – rozmaitością z gładkim działaniem $\lambda : G \times M \longrightarrow M$ grupy G , indukującym działanie (1), i niech (P_G, B, G, π_{P_G}) będzie wiązką główną nad bazą B , o

potencjale powiązania głównego $\underline{A} \equiv \underline{A}^A \otimes t_A \in \Omega^1(P_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ jak w Def. 14.2. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(P_G \times_{\lambda} M)$ określamy jego **pochoďną $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -kowariantną**

$$\nabla^{\underline{A}}\phi := T(\Phi_{\lambda}[\phi]) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \underline{A} \in \text{Hom}_G(TP_G, TM).$$

Mamy kluczowe (z fizykalnego punktu widzenia)

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $(\phi, \gamma) \in \Gamma(P_G \times_{\lambda} M) \times \Gamma(\text{Ad}P_G)$, a dalej oznaczmy γ -**transformaty**: potencjału powiązania głównego $\underline{A}$ oraz cięcia ϕ jako, odpowiednio,

$$\gamma \underline{A}(\cdot) := T_e \text{Ad}_{\Phi_{\text{Ad}[\gamma]}(\cdot)}(\underline{A} - \Phi_{\text{Ad}[\gamma]}^* \theta_L)(\cdot)$$

oraz

$$\gamma \phi := \Gamma B \lambda_{\gamma}(\phi).$$

Zachodzi tożsamość

$$\nabla^{\gamma \underline{A}} \gamma \phi = T_2 \lambda_{\Phi_{\text{Ad}[\gamma]}(\cdot)}(\nabla^{\underline{A}} \phi).$$

Dowód: Patrz: wyżej. □

Ceną za naturalność postulatów, na podstawie których wyprowadziliśmy powyższą postać różniczkowania cięć wiązki stowarzyszonej, jest strukturalna złożoność i nieoczywistość rezultatu. Godzi się też zauważyć, że wynik nie do końca realizuje nasze zamierzenie, oto bowiem powyższe odwzorowanie jest określone na wiązce stycznej nad P_G i nie daje nam wprost cięć wiązki stowarzyszonej $P_G \times_{T_2 \lambda} TM$. Podchodząc do zagadnienia od drugiej strony, możemy zamiast tego zapostulować postać takiego różniczkowania naturalną z *geometrycznego punktu widzenia*, co czynimy w

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. **Pochodna Crittendena na wiązce stowarzyszonej $P_G \times_{\lambda} M$ nad B to odwzorowanie**

$$\begin{aligned} \nabla^C &: \Gamma(P_G \times_{\lambda} M) \times \Gamma(TB) \longrightarrow \Gamma(P_G \times_{T_2 \lambda} TM) \\ &: (\phi, \mathcal{X}) \longmapsto \Phi_{T_2 \lambda}^{-1}(T(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(\cdot)))) \equiv \nabla_{\mathcal{X}}^C \phi(\cdot). \end{aligned}$$

Uwaga 1. Definicja powyższa ma sens, gdyż

$$\begin{aligned} &T(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(\cdot)))(r_g(p)) \equiv T_{r_g(p)}(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}_{r_g(p)}(\mathcal{X}(\pi_{P_G} \circ r_g(p))) \\ &= T_{r_g(p)}(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}_{r_g(p)}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(p))) = T_{r_g(p)}(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ T_p r_g \circ \text{Hor}_p(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(p))) \\ &= T_p(\Phi_{\lambda}[\phi] \circ r_g) \circ \text{Hor}_p(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(p))) = T_p(\lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}_p(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(p))) \\ &= T_{\Phi_{\lambda}[\phi](p)} \lambda_{g^{-1}} \circ T_p(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}_p(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(p))) \equiv T_2 \lambda_{g^{-1}}(T_p(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}_p(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(p)))) , \end{aligned}$$

zatem – w istocie – $T(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(\cdot)))$ należy do przeciwdziedziny bijekcji $\Phi_{T_2 \lambda}$.

Opis prostej relacji pomiędzy obiema konstrukcjami, a zarazem dowód *a posteriori* zasadności tej ostatniej jako definicji pochodnej $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -kowariantnej zawiera

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 2. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(P_G \times_{\lambda} M)$ i dowolnego pola wektorowego $\mathcal{X} \in \Gamma(TB)$ zachodzi tożsamość

$$\Phi_{T_2 \lambda}[\nabla_{\mathcal{X}}^C \phi] = \nabla_{\text{Hor}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(\cdot)))}^{\underline{A}} \phi.$$

Dowód: Równość obu wyrażeń, w których pojawia się pole wektorowe $\mathcal{X}$ na bazie wiązki głównej P_G (i stowarzyszonej z nią $P_G \times_{\lambda} M$), wynika wprost z definicji $\text{HP}_G \equiv \text{Ker}(\mathcal{A}, \text{id}_{P_G})$, oto bowiem ta ostatnia implikuje redukcję wyrażenia na pochodną $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -kowariantną:

$$\nabla_{\text{Hor}(\mathcal{X})}^{\underline{A}} \phi \equiv (T(\Phi_{\lambda}[\phi]) - \mathcal{K}(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \underline{A})(\text{Hor}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(\cdot)))) = T(\Phi_{\lambda}[\phi]) \circ \text{Hor}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(\cdot)))$$

$$\equiv \Phi_{T_2\lambda}[\nabla_{\mathcal{X}}^C\phi(\cdot)].$$

□

Cel pragmatyczny, jakim była konstrukcja naturalnego różniczkowania cięć wiązki głównej o prostych własnościach transformacyjnych względem automorfizmów (wertykalnych, tj. pokrywających identyczność na bazie wiązki) P_G , możemy uznać za zrealizowany. Zaproponowane rozwiązanie stawia nas przed dwoma nader istotnymi pytaniami:

- (1) Czy istnieje *prosta* prezentacja pochodnej $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -ekwiwariantnej wyrażająca się poprzez potencjały lokalne powiązania głównego z Def. 14.4?
- (2) Czy istnieje *prosta i bezpośrednia geometryczna* interpretacja konstrukcji pochodnej $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -ekwiwariantnej w terminach wyróżnionego powiązania Ehresmanna na wiązce stowarzyszonej?

Odpowiedzi na oba pytania, które wyprowadzimy poniżej, dadzą nam sposobność istotnego pogłębienia naszego dotychczasowego zrozumienia mechanizmu indukcji powiązania na wiązce stowarzyszonej z powiązania głównego obecnego na wyjściowej wiązce głównej, a przy tym – co być może zaskakujące, a z pewnością przydatne – przerzucą pomost wprost ku konstrukcjom napotykanym w modelowaniu oddziaływań fundamentalnych.

2. PEJZAŻ LOKALNY Z POLEM CECHOWANIA W ROLI GENIUS LOCI

Struktury globalne obecne w opisie wiązki głównej i wiązek z nią stowarzyszonych mają swoje lokalne prezentacje: wszelka (niekanoniczna, czyli swoista) informacja o formie powiązania głównego jest niesiona przez potencjały lokalne $A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ stowarzyszone z lokalnymi trywializacjami $\tau_{s(i)} : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ wiązki głównej P_G indukowanymi (w rozumieniu Stw. 3.4) przez płaskie cięcia unitalne $s(i)$ z Def. 14.4, globalne zaś cięcia wiązki z nią stowarzyszonej $P_G \times_{\lambda} M$ zyskują za pośrednictwem tychże lokalnych cięć „intuicyjną” interpretację (indeksowanych przez I rodzin) lokalnie gładkich odwzorowań

$$f_i := s_{(i)}^* \Phi_{\lambda}[\phi] : \mathcal{O}_i \longrightarrow M, \quad i \in I,$$

podlegających oczywistym prawom zszycia:

$$f_i(y) \equiv \Phi_{\lambda}[\phi] \circ s_{(i)}(y) = \Phi_{\lambda}[\phi] \circ r_{g_{ji}(y)}(s_{(j)}(y)) = \lambda_{g_{ji}(y)^{-1}}(\Phi_{\lambda}[\phi](s_{(j)}(y))) = \lambda_{g_{ij}(y)}(f_j(y))$$

nad $\mathcal{O}_{ij} \ni y$, patrz: dowód Stw. 14.4. Pojawia się naturalne pytanie, uszczegóławiające wobec (1), o istnienie prostej prezentacji lokalnej pochodnej $\nabla\phi$ w terminach odwzorowania f_i i 1-form wektorowych A_i w obrazie lokalnej trywializacji $\tau_{s(i)}$. Formalizację tego pytania umożliwia

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy, w szczególności zaś – Def. 2. **Prezentacja lokalna pochodnej kowariantnej pola** $\phi \in \Gamma(P_G \times_{\lambda} M)$ **w cechowaniu** $s(i) : \mathcal{O}_i \longrightarrow P_G$ to odwzorowanie

$$\mathcal{D}^{s(i)}\phi : \Gamma(TB \upharpoonright_{\mathcal{O}_i}) \longrightarrow C^{\infty}(\mathcal{O}_i, TM) : \mathcal{X} \longmapsto \Phi_{T_2\lambda}[\nabla_{\mathcal{X}}^C\phi] \circ s_{(i)} \equiv \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{s(i)}\phi.$$

Na pierwszy rzut oka ta całkowicie naturalna definicja nie dostarcza nam twierdzącej odpowiedzi na pytanie, którym ją wywołałismy, oto bowiem $\mathcal{D}^{s(i)}\phi$ wydaje się nie zawierać potencjałów lokalnych A_i . O tym, że to powierzchowne wrażenie jest w istocie *mylne*, przekonuje nas następujące sprytne rozumowanie: Dokonajmy inteligentnego „odwrócenia” rozumowanie przedstawionego w dowodzie Stw. 2, które przeprowadziło nas od pochodnej $\Gamma(\text{Ad}P_G)$ -kowariantnej cięcia wiązki stowarzyszonej wzdłuż (podniesienia poziomego) pola wektorowego na bazie tejże wiązki do cięcia tego pochodnej Crittendena. Rozważmy w tym celu pole wektorowe $\tilde{\mathcal{X}}_i \in \Gamma(\text{TP}_G \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)})$, na początek zupełnie dowolne, o składowej poziomej danej przez (ograniczenie do $\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$) $\text{Hor}(\mathcal{X})$, gdzie $\mathcal{X} \in \Gamma(TB)$ jest zadanym polem na bazie, i o składowej pionowej $\mathcal{V}_i \in \Gamma(\text{VP}_G \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)})$,

$$\tilde{\mathcal{X}}_i = \text{Hor}(\mathcal{X}) \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)} + \mathcal{V}_i \in \Gamma((\text{HP}_G \oplus_{P_G, \mathbb{R}} \text{VP}_G) \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)}) \equiv \Gamma(\text{TP}_G \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)}),$$

czyli – innymi słowy – zupełnie dowolne gładkie podniesienie pola wektorowego $\mathcal{X}$ z bazy wiązki głównej do jej przestrzeni totalnej. Przy tym w świetle Stw. 14.1 mamy rozkład

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^A \triangleright \mathcal{K}_{t_A}^{(r)} \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)}, \quad \mathcal{V}_i^A \in C^\infty(\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \mathbb{R})$$

obliczamy zatem – w odwołaniu do G-ekwiwariantności odwzorowania $\Phi_\lambda[\phi]$ –

$$\begin{aligned} & \Phi_{T_2\lambda}[\nabla_{\mathcal{X}}^C \phi] \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)} \equiv T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \text{Hor.}(\mathcal{X}(\pi_{P_G}(\cdot))) \upharpoonright_{\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)} = T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ (\tilde{\mathcal{X}}_i - \mathcal{V}_i)(\cdot) \\ &= T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^A(\cdot) \triangleright T(\Phi_\lambda[\phi])\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (r_{\exp^G(t \triangleright t_A)}(\cdot))\right) \\ &= T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^A(\cdot) \triangleright \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \Phi_\lambda[\phi] \circ r_{\exp^G(t \triangleright t_A)}(\cdot) \\ &= T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^A(\cdot) \triangleright \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{\exp^G(-t \triangleright t_A)} \circ \Phi_\lambda[\phi](\cdot) \\ &\equiv T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) - \mathcal{V}_i^A(\cdot) \triangleright \mathcal{K}_{t_A}^{(\lambda)}(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)) \\ &\equiv T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + \mathcal{V}_i^A(\cdot) \triangleright T_{(e, \Phi_\lambda[\phi](\cdot))} \lambda(t_A, \mathbf{0}_{T_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)} M}) \\ &\equiv T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + \mathcal{V}_i^A(\cdot) \triangleright T_{(e, \Phi_\lambda[\phi](\cdot))} \lambda(\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{K}_{t_A}^{(r)}(\cdot)), \mathbf{0}_{T_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)} M}) \\ &= T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + T_{(e, \Phi_\lambda[\phi](\cdot))} \lambda(\underline{\mathcal{A}}(\mathcal{V}_i(\cdot)), \mathbf{0}_{T_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)} M}) \\ &\equiv T(\Phi_\lambda[\phi]) \circ \tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot) + T_{(e, \Phi_\lambda[\phi](\cdot))} \lambda(\underline{\mathcal{A}}(\tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot)), \mathbf{0}_{T_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)} M}) \\ &\equiv (T(\Phi_\lambda[\phi]) + T_{(e, \Phi_\lambda[\phi])} \lambda \circ (\underline{\mathcal{A}}, 0))(\tilde{\mathcal{X}}_i(\cdot)). \end{aligned}$$

Widzimy przeto, że swoboda dopełnienia podniesienia poziomego pola wektorowego $\mathcal{X}$ z bazy wiązki otwiera przed nami możliwość uwzględnienia formy powiązania głównego. Kończącego nasze poszukiwania *coup de grâce* okazuje się dostarczać... powtórne przemyślenie wniosków z dyskusji otwierającej Wykład 12: Wszak z dowolnym polem wektorowym $\mathcal{X}$ na bazie możemy stowarzyszyć – w sposób absolutnie naturalny z punktu widzenia obecnej dyskusji – lokalnie gładkie pole na $\pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ za pośrednictwem... odwzorowania stycznego do płaskiego cięcia unitalnego $s_{(i)}$, co daje nam

$$\tilde{\mathcal{X}}_i \equiv T s_{(i)}(\mathcal{X}).$$

Jest to wybór spójny z naszymi dotychczasowymi rozważaniami, gdyż składowa pozioma pola to

$$\text{Hor.} \circ T \pi_{P_G}(\tilde{\mathcal{X}}_i) \equiv \text{Hor.} \circ T(\pi_{P_G} \circ s_{(i)})(\mathcal{X}) = \text{Hor.}(\mathcal{X}).$$

Dla tak przemyślnie skonstruowanego podniesienia pola $\mathcal{X}$ do przestrzeni totalnej wiązki wyznaczamy

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{s_{(i)}} \phi &= (T(\Phi_\lambda[\phi]) + T_{(e, \Phi_\lambda[\phi])} \lambda \circ (\underline{\mathcal{A}}, 0)) \circ T s_{(i)}(\mathcal{X}(\cdot)) \\ &= (T(\Phi_\lambda[\phi] \circ s_{(i)}) + T_{(e, \Phi_\lambda[\phi] \circ s_{(i)}(\cdot))} \lambda \circ (\underline{\mathcal{A}} \circ T.s_{(i)}, 0))(\mathcal{X}(\cdot)) \\ &\equiv (T f_i + T_{(e, f_i(\cdot))} \lambda \circ (\underline{\mathcal{A}}, 0))(\mathcal{X}(\cdot)), \end{aligned}$$

czyli ostatecznie prezentacja lokalna pochodnej kowariantnej w cechowaniu $s_{(i)}$ przybiera piękną, bo przecie bardzo prostą postać

$$(3) \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{s_{(i)}} \phi = T f_i - \mathcal{K}^{(\lambda)}(f_i) \circ A_i.$$

To w tej właśnie postaci – o ile w ogóle! – pochodna kowariantna objawia się zazwyczaj w literaturze fizycznej, przy czym w tym kontekście potencjał lokalny powiązania głównego zyskuje miano **(lokalnego) pola cechowania (w cechowaniu $s_{(i)}$)**, zastąpienie zaś zwykłej pochodnej $T f_i$ **(lokalnego) pola materii f_i** powyższym wyrażeniem $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{s_{(i)}} \phi$, w którym pojawia się **sprężenie pola cechowania z polem materii** jest zwyczajowo nazywane **sprężeniem minimalnym**

(z jęz. ang. “minimal coupling”). W świetle Stw.3.4 jest całkowicie jasne, że taka prezentacja pochodnej $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ -kowariantnej jest w ogólności możliwa *wyłącznie² lokalnie*.

3. VIA CULMINIS, CZYLI BUSHIDŌ

W ogólnej dyskusji pojęcia powiązania na wiązce włóknistej przedstawionej podczas wprowadzającego Wykładu XII przeplatają się ze sobą konstruktywnie bardzo różne punkty widzenia na istotę powiązania, a zaspokojenie wyjściowej ambicji pozyskania praktycznej definicji strukturalnego różniczkowania cięć wiązki staje się ostatecznie niejako produktem ubocznym głębszej konstrukcji geometrycznej. W ostatnich dwóch rozdziałach ten porządek epistemologiczny i logiczny został przewrócony do góry nogami, a aspekt geometryczny został zmarginalizowany w stopniu, który czyni go w istocie niewidocznym. Taki stan rzeczy broni się na gruncie świadomości natury *zastosowań* dyskutowanych struktur geometrycznych w modelowaniu fizycznym, która dyktuje strukturę naszego dyskursu, niemniej jednak w ostatniej części niniejszego wykładu spróbujemy przywrócić matematycznie uzasadniony porządek rzeczy *na przekór* powszechnym praktykom i przyjrzymy się drobiazgowo mechanizmowi indukcji powiązania Ehresmanna na wiązce stowarzyszonej z takiegoż powiązania głównego na odnośnej wiązce głównej. W toku naszych dociekań ustalimy bezpośredni związek pomiędzy otrzymaną tą drogą gładką rodziną operatorów rzutowych na $T(P_G \times_\lambda M)$ a wcześniejszą konstrukcją pochodnej $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ -kowariantnej z Def. 1, z uwzględnieniem podstawowej implikacji Tw. 14.4. W rezultacie uzyskamy istotnie nowy wgląd w naturę i sens umotywowanej pragmatycznie konstrukcji z dwóch poprzednich rozdziałów, a nadto – naturalny punkt wyjścia do jej przyszłych uogólnień.

Podstawą naszych obecnych rozważań jest definicja powiązania głównego Ehresmanna na wiązce głównej P_G (patrz: Def. 14.1). Zidentyfikowaną w jej treści r -niezmienniczą wiązkę poziomą HP_G nad P_G potraktujemy jako podwiązkę w (pierwszym składniku prostym) $\text{pr}_1^* TP_G \oplus_{P_G \times M, \mathbb{R}} \text{pr}_2^* TM \equiv T(P_G \times M)$, po czym „sprowadzimy” ją – w sposób opisany poniżej, a zapożyczony od Kobayashiego i Nomizu [KN63] – nad rozmaitość ilorazową $P_G \times_\lambda M \equiv (P_G \times M)/G$ wzdłuż surjektywnej submersji $\pi_\sim : P_G \times M \rightarrow P_G \times_\lambda M$, korzystając z jej G -niezmienniczości. Oto więc, wybrawszy (dowolnie) reprezentanta (p, m) orbity $[(p, m)] \in P_G \times_\lambda M$, a wraz z nim – odwzorowanie

$$(4) \quad [(\cdot, m)] : P_G \rightarrow P_G \times_\lambda M : p \mapsto [(p, m)],$$

o którego gładkości przekonujemy się łatwo w obrazie trywializacji lokalnej $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ wiązki głównej P_G oraz takiejże trywializacji $\tilde{\tau}_i : \pi_{P_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times M : [(p, m)] \mapsto (\pi_{P_G \times_\lambda M}, t_i)[[(p, m)]]$ z $t_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow M : [(p, m)] \mapsto \lambda_{\text{pr}_2 \circ \tau_i(p)}(m)$ wiązki stowarzyszonej (indukowanej z τ_i wedle schematu opisanego w Def. 5-6.1),

$$\psi_i^m \equiv \tilde{\tau}_i \circ [(\cdot, m)] \circ \tau_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times G \rightarrow \mathcal{O}_i \times M : (x, g) \mapsto (x, \lambda(g, m)).$$

definiujemy

$$(5) \quad H_{[(p, m)]}(P_G \times_\lambda M) = T_p[(\cdot, m)](H_p P_G).$$

Niezależność wyniku od wyboru reprezentanta (p, m) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku: Dla reprezentanta $(r_g(p), \lambda_{g^{-1}}(m)) \in [(p, m)]$ określonego przez dowolny element $g \in G$, stwierdzamy – na gruncie definiującej Równ. (14.1) – pożądaną równość

$$\begin{aligned} T_{r_g(p)}[(\cdot, \lambda_{g^{-1}}(m))](H_{r_g(p)} P_G) &= T_{r_g(p)}[(\cdot, \lambda_{g^{-1}}(m))] \circ T_p r_g(H_p P_G) \\ &= T_p[(r_g(\cdot), \lambda_{g^{-1}}(m))](H_p P_G) = T_p[(\cdot, m)](H_p P_G). \end{aligned}$$

²Nie wyklucza to nader atrakcyjnej możliwości zdefiniowania lagranżowskiej teorii pola z symetrią cechowania modelowaną na działaniu **grupy cechowania** $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ na **polach materii** $\Gamma(P_G \times_\lambda M)$ w terminach obiektów lokalnych $\mathcal{G}^{(i)}\phi$ oraz f_i (i – ostatecznie – A_i , dla których bez trudu można wypisać niezmienniki określające dynamikę), to jednak wymaga porzucenia paradygmatu, w którym pole fizyczne jest *globalnie* gładkiem odwzorowaniem czasoprzestrzeni w przestrzeń wewnętrznych stopni swobody (tutaj: M). Tym sposobem wkraczamy w fascynujący świat lagranżowskiej teorii pola z **defektami**, która znajduje szalenie istotne zastosowanie w wielu dziedzinach fizyki matematycznej, patrz: np. [RS09]. To jednak jest temat na zupełnie inny wykład...

Powyższy mechanizm indukcji można łatwo przepisać w terminach pełnego powiązania Ehresmanna na wiązce rozszerzonej $P_G \times M$ indukowanego z tego na P_G wedle opisanego schematu. Oto mamy prostą formułę

$$H(P_G \times_\lambda M) = T\pi_*(\text{pr}_1^* H P_G) \equiv T\pi_*(H(P_G \times M)),$$

której uzasadnienie przynosi tożsamość

$$T_{(p,m)}\pi_*(v, \mathbf{0}_{T_m M}) \equiv T_p[(\cdot, m)](v),$$

zapisana dla dowolnego $v \in T_p P_G$. Definicję podwiązki poziomej nad $P_G \times_\lambda M$ uzupełnia naturalna definicja wiązki pionowej:

$$V(P_G \times_\lambda M) = T\pi_*(V(P_G \times M)).$$

O jej sensowności przesądza następująca obserwacja:

$$\begin{aligned} T\pi_{P_G \times_\lambda M}(T\pi_*(V(P_G \times M))) &= T(\pi_{P_G \times_\lambda M} \circ \pi_*)(V(P_G \times M)) = T\pi_{P_G \times M}(V(P_G \times M)) \\ &\equiv \mathbf{0}_{T(P_G \times M)}(P_G \times M), \end{aligned}$$

wynikająca z wertykalnego charakteru π_* a implikująca

$$T\pi_*(V(P_G \times M)) \subset V(P_G \times_\lambda M),$$

w połączeniu z submersywnością π_* ,

$$T\pi_*(T(P_G \times M)) = T(P_G \times_\lambda M),$$

oraz odwracalnością $T\pi_* \upharpoonright_{H(P_G \times M)}$, która wynika z wertykalności π_* (patrz: (7)) – ostatnią wątpliwość usuwa elementarny rachunek wymiarów podparty konstatacją

$$T\pi_*(H(P_G \times M)) \cap T\pi_*(V(P_G \times M)) = \mathbf{0}_{T(P_G \times M)}(P_G \times M),$$

wyprowadzoną z bezpośredniego wnioskowania, słusznego dla dowolnego $v_{\text{hor}} \in H_{(p,m)}(P_G \times M)$:

$$\begin{aligned} T\pi_*(v_{\text{hor}}) &\in T\pi_*(V(P_G \times M)) \\ \implies \mathbf{0}_{T(P_G \times_\lambda M)}(\pi_{P_G}(p)) &= T\pi_{P_G \times_\lambda M}(T\pi_*(v_{\text{hor}})) = T\pi_{P_G \times M}(v_{\text{hor}}) \\ \implies v_{\text{hor}} &\in V_{(p,m)}(P_G \times M) \cap H_{(p,m)}(P_G \times M) \equiv \mathbf{0}_{T(P_G \times M)}(p, m). \end{aligned}$$

Uzyskany przez nas prosty opis indukowanego powiązania Ehresmanna na $P_G \times_\lambda M$ daje nam do ręki nader zgrabną definicję odnośnej formy powiązania $\Theta_C \in \Gamma(T^*(P_G \times_\lambda M) \otimes V(P_G \times_\lambda M))$ (w rozumieniu Tw. 12.2):

$$(6) \quad \Theta_C \circ T\pi_* := T\pi_* \circ \tilde{\Theta},$$

w której pojawia się forma indukowanego powiązania na $P_G \times M$:

$$\tilde{\Theta} = j_1 \circ \Theta \circ \text{pr}_1 + j_2 \circ \text{id}_{TM} \circ \text{pr}_2,$$

zapisanego przy użyciu formy powiązania głównego $\Theta = \widetilde{\text{Vert.}} \circ \mathcal{A} \in \Gamma(T^*P_G \otimes VP_G)$ oraz kanonicznych włożeń $j_1 : TP_G \hookrightarrow \text{pr}_1^* P_G \oplus_{B, \mathbb{R}} \text{pr}_2^* TM$ oraz $j_2 : TM \hookrightarrow \text{pr}_1^* P_G \oplus_{B, \mathbb{R}} \text{pr}_2^* TM$ w styczną $\text{pr}_1^* P_G \oplus_{B, \mathbb{R}} \text{pr}_2^* TM \equiv T(P_G \times M)$. Podkreślmy: postać $\tilde{\Theta}$ odpowiada rozważanej postaci podwiązki poziomej:

$$H(P_G \times M) \equiv \text{Ker } \tilde{\Theta} = \text{Ker } \tilde{\Theta} \upharpoonright_{\text{pr}_1^* TP_G} \equiv \text{Ker } (\Theta \circ \text{pr}_1) = \text{pr}_1^* H P_G.$$

Wracając do formuły (6), przede wszystkim stwierdzamy jednoznaczność zadawanej przez nią definicji Θ_C , a to z racji submersywności π_* . Sensowność tej definicji także jest bezsporna, co weryfikujemy na zadanych wcześniej składowych: $V(P_G \times_\lambda M) \ni v_{\text{vert}} = T\pi_*(\underline{v}_{\text{vert}})$,

$$\Theta_C(v_{\text{vert}}) \equiv (\Theta_C \circ T\pi_*)(\underline{v}_{\text{vert}}) = (T\pi_* \circ \tilde{\Theta})(\underline{v}_{\text{vert}}) = T\pi_*(\underline{v}_{\text{vert}}) \equiv \text{id}_{V(P_G \times_\lambda M)}(v_{\text{vert}}),$$

oraz $H(P_G \times_\lambda M) \ni v_{\text{hor}} = T\pi_*(\underline{v}_{\text{hor}})$,

$$\Theta_C(v_{\text{hor}}) \equiv (\Theta_C \circ T\pi_*)(\underline{v}_{\text{hor}}) = (T\pi_* \circ \tilde{\Theta})(\underline{v}_{\text{hor}}) = T\pi_*(\mathbf{0}_{T(P_G \times M)}(\pi_{T(P_G \times M)}(\underline{v}_{\text{hor}})))$$

$$= \mathbf{0}_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)} \left(\pi_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)}(\psi_{\text{hor}}) \right),$$

indukowanego powiązania Ehresmanna na $\mathbf{P}_G \times_\lambda M$. W świetle Def.12.6 od formuły (6) ledwie krok do

Definicja 4. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Pochodna kowariantna** na $\Gamma(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)$ **indukowana przez formę powiązania głównego** $\mathcal{A} \equiv \widetilde{\text{Vert.}}^{-1} \circ \Theta \in \Omega^1(\mathbf{P}_G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ na wiązce głównej $\mathbf{P}_G$ to odwzorowanie

$$\nabla^{\mathcal{A}} : \Gamma(\mathbf{P}_G \times_\lambda M) \ni \phi \longmapsto \Theta_C \circ \mathbf{T}\phi(\cdot) =: \nabla^{\mathcal{A}}\phi \in \Gamma(\mathbf{T}^*B \otimes_{B,\mathbb{R}} \phi^*\mathbf{V}(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)).$$

Logika naszego wywodu przedłuża się w naturalny sposób ku wertykalnym automorfizmom $B\lambda_\gamma$ wiązki $\mathbf{P}_G \times_\lambda M$, indukowanym za pośrednictwem takichże automorfizmów $\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]$ wiązki $\mathbf{P}_G$ z bisekcji $\gamma \in \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$ grupoidu dołączonego $\text{Ad } \mathbf{P}_G$ według schematu opisanego szczegółowo na Wykładach V i VI. Istotnie, jeśli zdefiniujemy γ -**transformatę** formy powiązania Θ_C oczywistym wzorem

$$\gamma\Theta_C \circ \mathbf{T}\pi_\sim := \mathbf{T}\pi_\sim \circ \gamma\widetilde{\Theta}, \quad \gamma\Theta := \mathbf{T}\Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \Theta \circ \mathbf{T}\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]^{-1},$$

to dostajemy pożądaną jej postać (patrz: Def.12.5)

$$\begin{aligned} \gamma\Theta_C \circ \mathbf{T}\pi_\sim &= \mathbf{T}\pi_\sim \circ (\mathbf{T}B[\tilde{r}]_\gamma \circ \tilde{\Theta} \circ \mathbf{T}B[\tilde{r}]_\gamma^{-1}) = \mathbf{T}B\lambda_\gamma \circ \mathbf{T}\pi_\sim \circ \tilde{\Theta} \circ \mathbf{T}B[\tilde{r}]_\gamma^{-1} \\ &= \mathbf{T}B\lambda_\gamma \circ \Theta_C \circ \mathbf{T}\pi_\sim \circ \mathbf{T}B[\tilde{r}]_\gamma^{-1} = \mathbf{T}B\lambda_\gamma \circ \Theta_C \circ \mathbf{T}B\lambda_\gamma^{-1} \circ \mathbf{T}\pi_\sim \\ &\implies \gamma\Theta_C = \mathbf{T}B\lambda_\gamma \circ \Theta_C \circ \mathbf{T}B\lambda_\gamma^{-1}, \end{aligned}$$

w której wyprowadzeniu użyliśmy symbolu $B[\tilde{r}] : \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \times (\mathbf{P}_G \times M) \rightarrow \mathbf{P}_G \times M$ na oznaczenie działania grupy bisekcji $\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$ indukowanego przez działanie $[\tilde{r}]$ (patrz: Tw.5-6.1), a na koniec użyliśmy submersywności $\pi_\sim$. Nagrodą za nasz chuligański trud jest z dawna oczekiwane $\varepsilon\nu\alpha\gamma\gamma\epsilon\lambda\iota\omicron\nu$:

Twierdzenie 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $\gamma \in \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$ będzie bisekcją grupoidu dołączonego $\text{Ad } \mathbf{P}_G$ indukującą wertykalny automorfizm $B\lambda_\gamma$ wiązki stowarzyszonej $\mathbf{P}_G \times_\lambda M$. Dla dowolnego cięcia $\phi \in \Gamma(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)$, o γ -**transformacie** danej wzorem

$$\gamma\phi := B\lambda_\gamma \circ \phi \in \Gamma(\mathbf{P}_G \times_\lambda M),$$

zachodzi tożsamość

$$\nabla^{\gamma\mathcal{A}}\gamma\phi = \mathbf{T}B\lambda_\gamma \circ \nabla^{\mathcal{A}}\phi,$$

dokumentująca $B\lambda_\gamma(\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G))$ -kowariantną naturę różniczkowania $\nabla^{\mathcal{A}}$.

Dowód: Zbyteczny – patrz: dowód Tw.12.4. □

I tak trzeba żyć!

DODATEK A. INNymi SŁOWY

Rozumowanie przedstawione w Rozdziale 3 jest surowe i bezwzględne – nie bierze jeńców, nie zostawia czasu na ostatniego szluga, tnie zwinnie, beznamyślnie i bezkrwotocznie – niczym *makkō-giri*. Jego użycie wymaga wglądu i ogłady, które przychodzą z doświadczeniem. Kontrast z podejściem *Via Vulgata* jest aż nadto wyrazisty i może być onieśmielający. Ażeby uchronić Czytelnika przed potencjalnym paraliżującym onieśmieleniem w przyszłych kontaktach III stopnia z materią geometryczną, zaprezentujemy przeto trawers pomiędzy oboma opisami różniczkowania kowariantnego – niskim i wysokim. Uczynimy to tym chętniej, że oto dostarczy nam on przejrzystej ilustracji mechanizmu „odcałkowania formy powiązania z definicji dystrybucji poziomej”, który z istic kawaleryjską śmiałością i formalną dezynwolturą spod szyldu „Jak Łatwo Widać” zamietliśmy pod dywan w dowodzie Tw.12.2.

W celu *bezpośredniego* wyprowadzenia z definicji (5) dystrybucji poziomej formuły na 1-formę powiązania dystrybucję tę anihilującą, przejdziemy do obrazu trywializacji lokalnych, jak na wstępie Rozdziału 3. Niechaj teraz $(v, \xi \equiv T_e \ell_g(X)) \in T_x \mathcal{O}_i \oplus T_g G \equiv T_{(x,g)}(\mathcal{O}_i \times G)$ dla pewnego wektora $X \in \mathfrak{g}$, a wtedy – w świetle Stw. 12.1 –

$$\begin{aligned} T_{(x,g)} \psi_i^m(v, \xi) &= (v, T_g \psi_i^m(x, \cdot) \circ T_e \ell_g(X)) = (v, T_g \psi_i^m(x, \cdot) \circ T_e \ell_g(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp_G(t \triangleright X))) \\ &= (v, \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \psi_i^m(x, g \cdot \exp_G(t \triangleright X))) \equiv (v, \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (x, \lambda_{g \cdot \exp_G(t \triangleright X)}(m))) \\ &= (v, T_m \lambda_g(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{\exp_G(t \triangleright X)}(m))) \equiv (v, -T_m \lambda_g(\mathcal{K}_X^{(\lambda)}(m))) \\ &= (v, -\mathcal{K}_{T_e \text{Ad}_g(X)}^{(\lambda)}(\lambda_g(m))) = (v, -\mathcal{K}_{T_g \mathfrak{p}_{g^{-1}}(\xi)}^{(\lambda)}(\lambda_g(m))). \end{aligned}$$

Celem pozyskania jawnego opisu dystrybucji poziomej indukowanej w powyższy sposób, możemy następnie nałożyć na (v, ξ) więzy horyzontalności, w czym instrumentalną rolę odgrywa prezentacja formy powiązania głównego w obrazie lokalnej trywializacji τ_i podana w Stw. 14.3. Stwierdzamy zatem, że

$$\begin{aligned} (v, \xi) \in \text{Ker}(\tau_i^{-1*} \underline{\mathcal{A}}(x, g)) &\equiv T_{\tau_i^{-1}(x,g)} \tau_i(H_{\tau_i^{-1}(x,g)} P_G) \\ \iff v \lrcorner A_i(x) &= -T_e \text{Ad}_g(\theta_L(g)(\xi)) = -T_e \text{Ad}_g(X) \equiv -T_g \mathfrak{p}_{g^{-1}}(\xi), \end{aligned}$$

i dla takiego wektora poziomego obliczamy

$$(7) \quad T_{(x,g)} \psi_i^m(v, \xi) = (v, \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_g(m)) \circ A_i(x)(v)).$$

Na tej podstawie możemy już dokonać jednoznacznego rozbicia *dowolnego* wektora stycznego $(v, w) \in T_{(x,m)}(\mathcal{O}_i \times M)$ na składowe

$$(v, w) = (v, \mathcal{K}^{(\lambda)}(m) \circ A_i(x)(v)) + (0, w - \mathcal{K}^{(\lambda)}(m) \circ A_i(x)(v))$$

poziomą i pionową. Wybierzmy lokalne współrzędne $\{\xi^a\}^{a \in \overline{1, D}}$, $D = \dim M$ na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}$ punktu m , po czym zdefiniujmy lokalnie gładką dystrybucję endomorfizmów stycznych do włókna:

$$d\xi^a(m) \otimes \partial_a(m) \equiv d\xi^a(m) \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^a}(m) \in T_m^* \mathcal{U} \otimes_{\mathbb{R}} T_m \mathcal{U}$$

i oznaczmy

$$(8) \quad \varpi_i[\mathcal{A}](x, m) := -\mathcal{K}^{(\lambda)}(m) \circ A_i(x) \in T_x^* \mathcal{O}_i \otimes_{\mathbb{R}} T_m \mathcal{U}.$$

Powyższe dwa operatory składają się na odwzorowanie

$$(9) \quad \alpha_i[\mathcal{A}](x, m) := d\xi^a(m) \otimes \partial_a(m) + \varpi_i(x, m) \in T_{(x,m)}^*(\mathcal{O}_i \times \mathcal{U}) \otimes_{\mathbb{R}} T_m \mathcal{U},$$

której definicja pozwala nam zapisać, dla dowolnego punktu $(x, m) \in \mathcal{O}_i \times \mathcal{U}$,

$$H_{(x,m)}(\mathcal{O}_i \times \mathcal{U}) = \text{Ker}(\alpha_i[\mathcal{A}](x, m)).$$

W dalszej części przekonamy się, że lokalne obiekty α_i pochodzą od globalnie gładkiego obiektu na $P_G \times_{\lambda} M$.

Godzi się podkreślić, że 1-forma $\alpha_i[\mathcal{A}]$ jest obiektem lokalnym w dwójnasób: w jej definicji pojawiają się współrzędne lokalne na włóknie, zatem jest to obiekt lokalny w kierunkach włókna, ale też definicja ta odwołuje się do lokalnej trywializacji, przeto są one lokalne także w kierunkach bazy. „Lokalność” pierwszego rodzaju jest w oczywisty sposób pozorna, oto bowiem człon $d\xi^a \otimes \partial_a$ w definicji $\alpha_i[\mathcal{A}]$ jest niezmienniczy względem transformacji współrzędniowych (jest to lokalna reprezentacja globalnego obiektu id_{T_M}), drugi zaś człon w tejże definicji wyraża się przez globalnie gładkie (fundamentalne) pole wektorowe na M . Potencjalnie nietrywialny charakter ma zatem tylko „lokalność” w kierunkach bazy. Rozważmy parę 1-form o wartościach w TM : $\alpha_i[\mathcal{A}]$ oraz $\alpha_j[\mathcal{A}]$ na $\mathcal{O}_{ij} \times M$. Drugą z nich cofamy z punktu $(x, \lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \in \tilde{\tau}_j(\pi_{P_G \times_{\lambda} M}^{-1}(\mathcal{O}_{ij}))$ (w którym mamy lokalny układ współrzędnych $\{\tilde{\xi}^a\}^{a \in \overline{1, D}}$, określony na otoczeniu $\mathcal{V}$ punktu $\lambda_{g_{ji}(x)}(m)$, więc też współrzędną bazę $\tilde{\partial}_a \equiv \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^a}$ stycznych do włókna) do punktu $(x, m) \in \tilde{\tau}_j(\pi_{P_G \times_{\lambda} M}^{-1}(\mathcal{O}_{ij}))$ (w którym mamy wcześniej wprowadzone współrzędne lokalne $\{y^a\}^{a \in \overline{1, D}}$ z

otoczenia m) utożsamianego z $(x, \lambda_{g_{ji}(x)}(m))$ przy zszywaniu trywializacji lokalnych za pośrednictwem odwzorowań przejścia g_{ij} wiązki $P_G \times_\lambda M$. Wynik cofnięcia porównujemy z wartością przyjmowaną w tym punkcie przez pierwszą z 1-form. Dokonawszy adaptacji wyprowadzenia ze str. 3 $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ -transformaty formy powiązania i uwzględniając przy tym funkcjonalną zależność od (zmiennego) m , otrzymujemy – w odwołaniu do Uwagi Niezb.cart.5 oraz Stw. Niezb.cart.13 i Stw. 12.1 –

$$\begin{aligned}
 & (\lambda \circ (g_{ji} \times \text{id}_M))^* d\tilde{\xi}^a(x, m) \otimes \tilde{\partial}_a(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ A_j(x) \\
 = & (T_m \lambda_{g_{ji}(x)})^a_b d\xi^b(m) \otimes \tilde{\partial}_a(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) + g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\lambda_{g_{ji}(x) \cdot \exp_G(t t_A)}(m)) \\
 & - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ A_i(x) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ g_{ij}^* \theta_L(x) \\
 = & (T_m \lambda_{g_{ji}(x)})^a_b d\xi^b(m) \otimes \tilde{\partial}_a(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) - g_{ji}^* \theta_L^A(x) \otimes T_m \lambda_{g_{ji}(x)}(\mathcal{K}_{t_A}^{(\lambda)}(m)) \\
 & - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ A_i(x) + \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ g_{ji}^* \theta_L(x) \\
 \equiv & d\xi^a(m) \otimes T_m \lambda_{g_{ji}(x)}(\partial_a(m)) - T_m \lambda_{g_{ji}(x)}(\mathcal{K}^{(\lambda)}(m)) \circ g_{ji}^* \theta_L(x) \\
 & - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ A_i(x) + \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ g_{ji}^* \theta_L(x) \\
 = & d\xi^a(m) \otimes T_m \lambda_{g_{ji}(x)}(\partial_a(m)) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(\lambda_{g_{ji}(x)}(m)) \circ T_e \text{Ad}_{g_{ji}(x)} \circ A_i(x) \\
 = & T_m \lambda_{g_{ji}(x)} \circ (d\xi^a(m) \otimes \partial_a(m) - \mathcal{K}^{(\lambda)}(m) \circ A_i(x)) \equiv T_m \lambda_{g_{ji}(x)} \circ \alpha_i[\mathcal{A}](x, m).
 \end{aligned}$$

Transformacja liniowa $T_m \lambda_{g_{ji}(x)}$ w przeciwdziedzinie 1-formy *wektorowej* $\alpha_i[\mathcal{A}](x, m)$ to ograniczenie do stycznej do włókna $T_m M$ podniesienia stycznego dyskutowanego wcześniej utożsamienia, realizowanego przez odwzorowanie

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ji} & : \mathcal{O}_{ij} \times M \xrightarrow{(\text{id}_B, g_{ji}) \times \text{id}_M} \mathcal{O}_{ij} \times G \times M \xrightarrow{\text{id}_B \times \lambda} \mathcal{O}_{ij} \times M \\
 & : (x, m) \mapsto (x, g_{ji}(x), m) \mapsto (x, \lambda_{g_{ji}(x)}(m))
 \end{aligned}$$

na bazie stycznej (ograniczenia) i -tej trywializacji $\mathcal{O}_{ij} \times M \subset \mathcal{O}_i \times M$. Transformacja ta jest nieodzowna dla zastąpienia rodziny $\{\alpha_i[\mathcal{A}]\}_{i \in I}$ na wiązkę zrekonstruowaną z trywializacji lokalnych poprzez opisane utożsamienia (według schematu z dowodu Tw. 1-2.2), czyli też – dla istnienia 1-formy wektorowej na $P_G \times_\lambda M$ o wartościach w $V(P_G \times_\lambda M)$ reprezentowanej lokalnie przez 1-formy $\alpha_i[\mathcal{A}]$. Ten ostatni obiekt, którego istnienie zostało dowiedzione powyżej na podstawie afinicznego prawa zszywania dla potencjału lokalnego powiązania głównego ze Stw. 14.4, będziemy oznaczać (cokolwiek pedantycznie określając jego naturę) jako

$$\varpi[\mathcal{A}] \in \Gamma(T^*(P_G \times_\lambda M) \otimes_{P_G \times_\lambda M, \mathbb{R}} \mathcal{N}(P_G \times_\lambda M)(V(P_G \times_\lambda M))).$$

Powyższa analiza jest źródłem istotnej nauki ogólnej: Jako cięcia tensorowych wiązek wektorowych $T^*(\mathcal{O}_i \times M) \otimes_{\mathcal{O}_i \times M, \mathbb{R}} \text{pr}_2^* TM$ 1-formy wektorowe $\alpha_i[\mathcal{A}]$ o wartościach w TM są w naturalny sposób transportowane wzdłuż *dyfeomorfizmów* przez sprzężone transformacje cofnięcia i odwrotnego pchnięcia w rodzaju tych napotkanych powyżej:

$$\alpha_j[\mathcal{A}] \mapsto T_2 \lambda_{g_{ji}}^{-1} \circ g_{ji}^* \alpha_j[\mathcal{A}] (\equiv \alpha_i[\mathcal{A}]).$$

Jest to przykład ogólniejszej prawidłowości, którą opisujemy w

Definicja 5. Niechaj $(V_A, B_A, \mathbb{R}^{\times r}, \pi_{V_A})$, $A \in \{1, 2\}$ będą dwiema (rzeczywistymi) wiązkami wektorowymi rzędu r , i niech $f : B_1 \rightarrow B_2$ będzie odwzorowaniem gładkim. Ilekroć z f stowarzyszony jest izomorfizm wiązek wektorowych $\widehat{f} : V_1 \xrightarrow{\cong} f^* V_2$, w którego zapisie $f^* V_2 = B_1 \times_{B_2} V_2$ jest standardowym modelem wiązki cofniętej z Przykł. (2-3-4.1.4), mówimy, że wiązki V_A są w *f -relacji* i określamy operację **cofnięcia rozwołknionego nad bazą** daną w postaci (zapisanej

dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$)

$$f^{\otimes} : \Gamma\left(\bigwedge^p T^* B_2 \otimes_{B_2, \mathbb{R}} \mathbb{V}_2\right) \longrightarrow \Gamma\left(\bigwedge^p T^* B_1 \otimes_{B_1, \mathbb{R}} \mathbb{V}_1\right) : \omega \longmapsto \widehat{f}^{-1} \circ f^* \omega.$$

W rozpatrywanym wcześniej przypadku odwzorowanie γ_{ji} indukuje automorfizm wiązki wektorowej $T_2 \lambda_{g_{ji}}(x) : TM \curvearrowright$ nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}_{ij}$, przeto oznaczawszy zadawany przezeń izomorfizm wiązek wektorowych $\text{pr}_2^* TM \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \times M} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times M} \longrightarrow \text{pr}_2^* TM \upharpoonright_{\mathcal{O}_j \times M} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij} \times M}$ tym samym symbolem $T_2 \lambda_{g_{ji}}$ (co stanowi dopuszczalne nadużycie notacyjne), otrzymujemy

$$T_2 \lambda_{g_{ji}}^{-1} \circ \gamma_{ji}^* \alpha_j[\mathcal{A}] = \gamma_{ji}^{\otimes} \alpha_j[\mathcal{A}].$$

Analogiczne rozważania można poprowadzić w odniesieniu do odwzorowania $\widetilde{\tau}_i \equiv (\pi_{P_G \times_\lambda M}, t_i)$ (patrz: str. 7) dla wiązek w $\widetilde{\tau}_i$ -relacji: $V(P_G \times_\lambda M) \upharpoonright_{\pi_{P_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i)} \text{pr}_2^* TM \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \times M}$ (przy czym izomorfizm indukowany to tutaj $\widehat{\widetilde{\tau}}_i \equiv T t_i \upharpoonright_{V(P_G \times_\lambda M) \upharpoonright_{\pi_{P_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i)}}$), a wówczas relacja między $\varpi[\mathcal{A}]$ i $\alpha_i[\mathcal{A}]$ przyjmie prostą postać

$$(10) \quad \alpha_i[\mathcal{A}] = \widetilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \varpi[\mathcal{A}].$$

Przejdziemy obecnie do zbadania własności strukturalnych 1-form $\alpha_i[\mathcal{A}]$, które są w naturalny sposób dziedziczone przez $\varpi[\mathcal{A}]$ jako jej własności *definiujące*.

Pierwsza obserwacja dotyczy zachowania 1-formy $\alpha_i[\mathcal{A}]$ pod wpływem przekształceń

$$\begin{aligned} \gamma_i : \mathcal{O}_i \times M &\xrightarrow{(\text{id}_B, h_i) \times \text{id}_M} \mathcal{O}_i \times G \times M \xrightarrow{\text{id}_B \times \lambda} \mathcal{O}_i \times M \\ &: (x, m) \longmapsto (x, h_i(x), m) \longmapsto (x, \lambda_{h_i(x)}(m)), \end{aligned}$$

modelujących w obrazie lokalnej trywializacji działanie (poniżej $p \in \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$)

$$\begin{aligned} \Gamma B \underline{\lambda} : \Gamma(\text{Ad } P_G) \times (P_G \times_\lambda M) &\longrightarrow P_G \times_\lambda M \\ : (\gamma \equiv [(s(\cdot), h_\cdot)], [(p, m)]) &\longmapsto [(r_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p, s(i)) \circ \pi_{P_G}(p))}(h_i \circ \pi_{P_G}(p))}(p), m)] \equiv \underline{\lambda}_{\gamma \circ \pi_{P_G}(p)}([(p, m)]), \end{aligned}$$

grupy $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ na $P_G \times_\lambda M$ zrekonstruowane w dowodzie Tw. 5-6.1, które bez trudu przepisujemy w terminach wprowadzonych w Def. 14.4 płaskich cięć unitalnych indukowanych przez τ_i :

$$(11) \quad \Gamma B \underline{\lambda}_{[(s(\cdot), h_\cdot)]}([s(i)(x), m]) = [(s(i)(x), \lambda_{h_i(x)}(m))].$$

Podkreślmy: γ_i odwzorowuje lokalną trywializację wiązki P_G , będącej nośnikiem formy powiązania $\mathcal{A}$, w lokalną trywializację wiązki $B[r]_\gamma(P_G) \equiv P_G$, będącą nośnikiem formy-transformaty powiązania ${}^\gamma \mathcal{A}$. Rozumując analogicznie jak przy wyprowadzaniu relacji między $\alpha_i[\mathcal{A}]$ i $\alpha_j[\mathcal{A}]$ nad $\mathcal{O}_{ij}$, otrzymujemy przeto tożsamość

$$\gamma_i^* \alpha_i[{}^\gamma \mathcal{A}](x, m) = T_m \lambda_{h_i(x)} \circ \alpha_i[\mathcal{A}](x, m)$$

lub – równoważnie –

$$(12) \quad \gamma_i^{\otimes} \alpha_i[{}^\gamma \mathcal{A}] = \alpha_i[\mathcal{A}].$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że 1-forma wektorowa $\varpi[{}^\gamma \mathcal{A}]$ jest $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ -*niezmiennicza* w sensie uogólnionym. Istotnie, formuła (11) daje nam – dla $\gamma \equiv [(s(\cdot), h_\cdot)] \in \Gamma(\text{Ad } P_G)$ jak wyżej –

$$\widetilde{\tau}_i \circ \Gamma B \underline{\lambda}_\gamma = \gamma_i \circ \widetilde{\tau}_i,$$

a nadto

$$T_2 \underline{\lambda}_{\gamma \circ \pi_{P_G}(p)}(V_{[(p, m)]}(P_G \times_\lambda M)) = V_{\Gamma B \underline{\lambda}_\gamma([(p, m)])}(P_G \times_\lambda M)$$

(działanie $\Gamma B \underline{\lambda}$ zachowuje włókna). W świetle definicji (10), tożsamość (12) implikuje³

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \Gamma B \underline{\lambda}_\gamma^{\otimes} \varpi[{}^\gamma \mathcal{A}] &= (\Gamma B \underline{\lambda}_\gamma \circ \widetilde{\tau}_i^{-1})^{\otimes} \varpi[{}^\gamma \mathcal{A}] = (\widetilde{\tau}_i^{-1} \circ \gamma_i)^{\otimes} \varpi[{}^\gamma \mathcal{A}] = \gamma_i^{\otimes} \widetilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \varpi[{}^\gamma \mathcal{A}] \equiv \gamma_i^{\otimes} \alpha_i[{}^\gamma \mathcal{A}] \\ &= \alpha_i[\mathcal{A}] \equiv \widetilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \varpi[\mathcal{A}], \end{aligned}$$

³Jest oczywiste, że $\otimes$ ma charakter *kontrawariantny*.

a zatem – wobec odwracalności $\tilde{\tau}_i$ –

$$(13) \quad \Gamma B \underline{\lambda}_\gamma^{\otimes} \varpi[\gamma \mathcal{A}] = \varpi[\mathcal{A}].$$

To pierwsza fundamentalna własność $\varpi[\mathcal{A}]$ godna odnotowania.

Druga wynika wprost z wypowiedzianej wcześniej identyfikacji składowej $\mathbb{T}_m M \longrightarrow \mathbb{T}_m M$ lokalnej prezentacji $\alpha_i[\mathcal{A}]$ obiektu $\varpi[\mathcal{A}]$ jako endomorfizmu identycznościowego. Jej następstwem jest tożsamość

$$(14) \quad \varpi[\mathcal{A}] \upharpoonright_{V(P_G \times_\lambda M)} = \text{id}_{V(P_G \times_\lambda M)},$$

która pociąga za sobą idempotentny charakter $\varpi[\mathcal{A}]$,

$$\varpi[\mathcal{A}] \circ \varpi[\mathcal{A}] = \varpi[\mathcal{A}],$$

a zatem pozwala nam myśleć o $\varpi[\mathcal{A}]$ jako o gładko indeksowanej przez $P_G \times_\lambda M$ rodzinie operatorów rzutowych (na podwiązkę pionową wzdłuż podwiązki poziomej $\text{Ker } \varpi[\mathcal{A}]$) na wiązce stowarzyszonej.

Chwila zastanowienia prowadzi nas do wniosku, że powyższe dwie własności są, w istocie, *definiujące*⁴ dla $\varpi[\mathcal{A}]$, co znajduje odzwierciedlenie w

Definicja 6. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Forma sprzężenia minimalnego** na $P_G \times_\lambda M$ to dowolna $\Gamma(\text{Ad} P_G)$ -niezmiennicza (w sensie uogólnionym, j/w) 1-forma wektorowa o wartościach w podwiązce pionowej $V(P_G \times_\lambda M)$ nad $P_G \times_\lambda M$ o identycznościowym ograniczeniu do $V(P_G \times_\lambda M)$, tj. dowolne cięcie $\varpi[\mathcal{A}] \in \Gamma(\mathbb{T}^*(P_G \times_\lambda M) \otimes_{P_G \times_\lambda M, \mathbb{R}} \mathcal{N}_{(P_G \times_\lambda M)}(V(P_G \times_\lambda M)))$ o własnościach (14) i (13).

Na zakończenie obecnej dyskusji przerzucimy niespodziewany a wygodny pomost pomiędzy oboma wypracowanymi w tym wykładzie podejściami do powiązania na wiązce stowarzyszonej: pragmatycznym (różniczkowym) z Rozdz. 1 i abstrakcyjnym (geometrycznym) z rozdziału bieżącego. W tym celu przepiszemy prezentację lokalną pochodnej kowariantnej w cechowaniu $s_{(i)}$ przy użyciu $\varpi[\mathcal{A}]$ jako

$$\mathcal{D}_X^{s_{(i)}} f_i(x) = (\mathbb{T}_x f_i + \varpi_i[\mathcal{A}](x, f_i(x)))(\mathcal{X}(x)) \equiv \mathcal{X} \lrcorner (\text{id}_B, f_i)^* \alpha_i[\mathcal{A}](x),$$

czyli po prostu (co przyjemne) jako

$$(15) \quad \mathcal{D}_X^{s_{(i)}} (\text{pr}_2 \circ \phi_i) = \mathcal{X} \lrcorner \phi_i^* \alpha_i[\mathcal{A}], \quad \phi_i \equiv \tilde{\tau}_i \circ \phi.$$

Należy podkreślić, że operator cofnięcia po prawej stronie powyższej formuły występuje w wariancie standardowym, a *nie* rozwłóknionym nad bazą – to odróżnia w sposób istotny geometryczny transport 1-formy wektorowej rozpatrywany poprzednio od kowariantnego różniczkowania cięcia. To rzekłszy, możemy następnie przepisać powyższe wyrażenie w równie zwartej postaci przy użyciu obiektu globalnego:

$$(16) \quad \mathcal{D}_X^{s_{(i)}} \underline{\phi}_i = \mathcal{X} \lrcorner \phi_i^* \tilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \varpi[\mathcal{A}] \equiv \mathcal{D}_X^{\varpi[\mathcal{A}]} \underline{\phi}_i, \quad \underline{\phi}_i \equiv t_i \circ \phi \equiv f_i.$$

Jego kowariantność jawi się teraz jako prosta konsekwencja $\Gamma(\text{Ad} P_G)$ -niezmienniczości (w sensie uogólnionym) formy sprzężenia minimalnego,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\varpi[\gamma \mathcal{A}]} \underline{\phi}_i &\equiv (\gamma_i \circ \phi_i)^* \tilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \varpi[\gamma \mathcal{A}] \equiv \mathbb{T}_2 \lambda_{h_i} \circ \phi_i^* \gamma_i^* \tilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \varpi[\gamma \mathcal{A}] = \mathbb{T}_2 \lambda_{h_i} \circ \phi_i^* (\tilde{\tau}_i^{-1} \circ \gamma_i)^{\otimes} \varpi[\gamma \mathcal{A}] \\ &= \mathbb{T}_2 \lambda_{h_i} \circ \phi_i^* (\Gamma B \underline{\lambda}_\gamma \circ \tilde{\tau}_i^{-1})^{\otimes} \varpi[\gamma \mathcal{A}] = \mathbb{T}_2 \lambda_{h_i} \circ \phi_i^* \tilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \Gamma B \underline{\lambda}_\gamma^{\otimes} \varpi[\gamma \mathcal{A}] = \mathbb{T}_2 \lambda_{h_i} \circ \phi_i^* \tilde{\tau}_i^{-1 \otimes} \varpi[\mathcal{A}] \\ &\equiv \mathbb{T}_2 \lambda_{h_i} \circ \mathcal{D}_X^{\varpi[\mathcal{A}]} \underline{\phi}_i. \end{aligned}$$

⁴Mamy przez to na myśli, że każda *taka* 1-forma wektorowa o wartościach w $V(P_G \times_\lambda M)$ na $P_G \times_\lambda M$ ma prezentację lokalne postaci (9). W rzeczy samej, jej identycznościowe ograniczenie do podwiązki pionowej przesądza o obecności pierwszego członu w takowej prezentacji, struktura zaś członu drugiego jest określona przez zachowanie tegoż kanonicznego członu pierwszego pod wpływem lokalnych (tj. zależnych od punktu w bazie B) automorfizmów włókna o działaniu modelowanym na λ , które w miejscu potencjałów lokalnych A_i stawiają obiekty $\Gamma(\text{Ad} P_G)$ -afinicznie tensorowe, czyli potencjały lokalne pewnego powiązania głównego (patrz: Tw. 21-22.3).

Na koniec zauważmy, że wyrażenie (16) daje się przepisać w zwartej formie

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\varpi[\mathcal{A}]}(t_i \circ \phi) = (\mathbb{T}t_i \circ \phi^* \varpi[\mathcal{A}])(\mathcal{X}),$$

z której destylujemy

Definicja 7. Przyjmijmy notację Def. 6. **Pochodna kowariantna** pola $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)$ **względem formy sprzężenia minimalnego** $\varpi[\mathcal{A}] \in \Gamma(\mathbb{T}^*(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M) \otimes_{\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M, \mathbb{R}} \mathbb{V}(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M))$ to cięcie (globalne)

$$\phi^* \varpi[\mathcal{A}] \in \Gamma(\mathbb{T}^* B \otimes_{B, \mathbb{R}} \phi^* \mathbb{V}(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)).$$

Wyważyliśmy otwarte drzwi, $\varpi[\mathcal{A}] \equiv \Theta_C$, niemniej jednak kopnięcie przyniosło przyjemność i naukę. Definicja powyższa jest doskonałym zwieńczeniem dyskusji otwartej przez strukturalny postulat (12.1).

LITERATURA

- [KN63] Sh. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, John Wiley & Sons, 1963.
- [RS09] I. Runkel and R. R. Suszek, “Gerbe-holonomy for surfaces with defect networks”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **13** (2009), 1137–1219.