

ONE OPERATOR TO RULE THEM ALL

(MAWF '25/26 2. XVI i 2. XVII [28])

2025/26



MAM4: $(V, g, 0)$, np.

(TM, g)

①

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\text{sign}(g) = (p, q) \quad \text{sw}_1(W) = 0$

$(M, 0)$

$\downarrow$
 $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \xrightarrow{\quad} \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$

$\hookrightarrow F_{\text{Spin}} W \xrightarrow{\quad} F_{\text{SO}} W$, np. $F_{\text{Spin}} TM \rightarrow F_{\text{SO}} TM$

$\Downarrow$ $\text{sw}_2(W) = 0$

$F_{\text{Spin}} W \times_{\sigma} S \cong \mathcal{S}(V, g)$

$F_{\text{SO}} W \times_{\text{Cutt} \circ \text{def}} \mathcal{U}(\mathbb{R}^{p, q}) \subseteq \mathcal{U}(W, g)$

CHCEMY: POCHODNE KOWARIANTNE NA (2)

WINDUKOWANE via $F_{SO} V$ } $\rightarrow \mathcal{E}(V, g) : \nabla^{\mathcal{E}}$
 z POWIĄZANIA NA V $\uparrow$ } $\rightarrow \mathcal{S}(V, g) : \nabla^{\mathcal{S}}$
"UZGODNIWEGO" z g $F_{SO} V$

"UZGODNIWIE" z $\Gamma(\mathcal{E}(V, g)) \hookrightarrow \mathcal{S}(V, g)$

! PODCNIŹO: NAJSAMPIERW MUSIMY PRZYPOMNIEĆ SPECYFIKĘ
 RÓŻNICZKOWANIA KOWARIANTNEGO
 NA WIĄZCE WEKTOROWEJ
 (CELEM UZGODNIENIA z g) (BO TAKĄ JEST V) ...

ZACZYNIAMY OD PRZYPOMNIENIA CIEKAWIEJ NATURALNEJ DEFINICJI: (3)

Powinno być ZIERHMANNA $TV = V \otimes_{W, R} HW$ NA (W, B, K^{*r}, π_V)

NĄZYWAMY ZGODNYM ZE STRUKTURĄ K -LINIOWĄ $K \in \{R, C\}$

(LUB PO PROSTU K -LINIOWYM), GDY

$$\forall \lambda \in K^*, v \in V : T_v L_\lambda (H_v W) = H_{L_\lambda(v)} W.$$

TO JEDNAK NIE JEST DEFINICJĄ NAJWYŻSZEJ ZGODNOŚCI,

GDY PRZYCHODZI DO UZGADNIANIA POWIĄZANIA

ZE STRUKTURĄ METRYCZNĄ ...

W ANALOGII DO WIAZGU QŁOWNYCH WYKORZYSTUJEMY WŁC ①

$$\text{Ver}_v : V_{\pi_W(v)} \xrightarrow[\subset^\infty]{\simeq} V_v W : w \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\sigma + L_t(w)),$$

ABY WPROWADZIĆ FORMĘ POWIĄZANIA $\mathbb{K}$ -LINIOWEGO NA V, T .

EPIMORFIZM WIAZGU
WEKTOROWYCH NAD $\mathbb{R}$ $(A, \pi_W) : TV \longrightarrow V$

o WŁAŚNOŚCIACH : (FPV1) $\forall v \in V : A \circ \text{Ver}_v = \text{id}_{V_{\pi_W(v)}}$

$$(FPV2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : A \circ T L_\lambda = L_\lambda \cdot A$$

BEZ TRUDU PRZEKONAMY SIĘ, ŻE FORMA POWIĄZANIA $\mathbb{K}$ -LINIOWEGO
INDUKUJE $\mathbb{K}$ -LINIOWE POWIĄZANIE NA V .

OD FORMY POWIĄZANIA K-LINOWEGO JĄJ TYLKO KŁAC DO (5)

POWODNEJ KOZULA (ALBO POWIĄZANIA KOZULA) NA W ,
CZYLI ODWZOROWANIA

$$\nabla^k : \Gamma(W) \xrightarrow{\mathbb{R}\text{-lin}} \Gamma(T^*B \otimes_{B, \mathbb{R}} W)$$

SPŁNIAJĄCEGO REGULE LEIBNITZA :

$$\forall f \in C^\infty(B, \mathbb{R}), v \in \Gamma(W) : \nabla^k(\mathcal{L}_{f(\cdot)} v(\cdot)) = df \otimes v + \mathcal{L}_{f(\cdot)}(\nabla_v^k) \quad (RL)$$

ŁATWO SPRAWDZAMY, ŻE NA DOWOLNEJ WIĄZCE WEKTOROWEJ
ISTNIEJE ∇^k .

CO ISTOTNE, FORMA POWIĄZANIA K-LINIOWEGO KANONICZNIEM ⑥
INDUKUJE POWIĄZANIE KOSZULA. MECHANIZM INDUKCJI
ZWIĄZŁE OPISUJE FORMUŁA

$$\nabla^k_v := A \circ T_v \quad (= v^{*} A) \quad !!!$$

LOKALNIE PEŁNĄ INFORMACJĘ O POWIĄZANIU KOSZULA KODUJĄ
WSPÓŁCZYNNE CHRISTOFFELA POWIĄZANIA KOSZULA NA V

STOWARZYSZONE Z WYBOREM BAZY MODUŁU CIĘC LOKALNYCH V :

$$\{ e_a^{(i)} : \vartheta_i \rightarrow \pi_V^{-1}(\vartheta_i), a \in \overline{1, r} \} \subset \Gamma(V|_{\vartheta_i})$$

ORAZ WSPÓŁRZĘDNYCH LOKALNYCH $(x^\mu) : \vartheta_i \rightarrow \mathbb{R}^{x \dim B}$ NA ϑ_i ,

WIEC TEŻ - Z WYBOREM BAZY MODUŁU CIĘC LOKALNYCH TB: ⑦

$$\{\partial_\mu\}_{\mu \in \overline{\dim B}} \subset \Gamma(TB|_{\partial_i}).$$

NAMY PRZETO RODZINĘ ODWZOROWAŃ GŁADKICH $\Gamma_{\mu ab}^{(i)}: \partial_i \rightarrow \mathbb{K}$

WYZNACZONĄ PRZEZ RELACJE

$$\perp_{\Gamma_{\mu ab}^{(i)}}(y)(e_b^{(i)}(y)) := \nabla_{\partial_\mu}^k e_a^{(i)}(y), y \in \partial_i,$$

W ODNIESIENIU DO KTÓRYCH ZAKŁADAMY

AFINICZNA WSPÓŁZMIENNICZOŚĆ WZGLĘDEM AUTOMORFIZMÓW $\forall$
I TAKIŻ PRAWA ŻYCIA NA PRZECIĘCIACH (W OBRZIE LOKALNYM)
DZIERŻIN CIĘC LOKALNYCH ∂_i .

OTO WIĘC 1-FORMY CHRISTOFFEL $\Gamma^{(i)} \equiv dx^\mu \otimes \Gamma_\mu^{(i)} \equiv (\langle \psi_b^{(i)}, e_a^{(i)*} \mathcal{A} \rangle)$, (8)
 ZDEFINIOWANE W TERMINACH BAZY DUALNEJ

$$\{ \psi_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \rightarrow \pi_{V^*}^{-1}(\mathcal{O}_i), a \in \overline{1, r} \} \subset \Gamma(V^*|_{\mathcal{O}_i}).$$

DLA MACIERZY DANYCH LOKALNYM AUTOMORFIZMUM $\chi \in \text{Aut}(V)$:

$$h = h_{iab} e_a^* \otimes e_b,$$

OKREŚLONYCH WZORAMI ${}^h e_a^{(i)} \equiv \chi \circ e_a^{(i)} =: {}^h L_{h_{iab}}(e_b^{(i)}),$

ORAZ DLA MACIERZY PRZEBIEGIA $g_{ij} = g_{ijab} e_a^* \otimes e_b$ MAMY

$$\int {}^h \Gamma^{(i)} = h_i^{-1} \cdot dh_i + \text{Ad}_{h_i^{-1}}(\Gamma^{(i)})$$

$$\left[\Gamma^{(j)} = g_{ij}^{-1} \cdot dg_{ij}^{-1} + \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}}(\Gamma^{(i)}) \right]$$

ZWÓR $(\{ \Gamma^{(i)} \}_{i \in \overline{1, r}}, \{ g_{ij} \}_{(i,j) \in \overline{1, r} \times \overline{1, r}})$ OKREŚLONY DLA FUNKCJA $\{ \mathcal{O}_i \}_{i \in I}$ BAZY B

OKREŚLA JEDNOZNACZNIE KLASĘ IZOMORFIZMU WŁĄCZI WEKTOROWEJ ⑨
Z FORMĄ POWIĄZANIA K -LINIOWEGO (W ROZUMIENIU TW. O REKONSTRUKCJI)
WPROWADZENIE POCHOĐNEJ KOŻULA DO GRUPOZY POZWALA
PROSTO SFORMUŁOWAĆ WARUNEK ZGODNOŚCI POWIĄZANIA
JE STRUKTURĄ METRYCZNĄ NA V .

Def.: POWIĄZANIE K -LINIOWE NA WIĄZCE WEKTOROWEJ V
JE STRUKTURĄ METRYCZNĄ g W ROZUMIENIU Def. 7-8-9.2
NĄZYWAMY **METRYCZNYM**, ILEKROĆ INDUKOWANA PRZEZ NIĄ POCHOĐNA
KOŻULA SPEŁNIA WARUNEK

$$\forall V_1, V_2 \in \Gamma(V), X \in \Gamma(TB): \mathcal{L}(g(V_1, V_2)) = g(\nabla_X^k V_1, V_2) + g(V_1, \nabla_X^k V_2). \quad (PM)$$

NA WYKŁADACH VII-IX USTALIŁEMY WZAYEM JEDNOZNACZNĄ RELACJĘ (10)
STRUKTURAMI METRYCZNYMI NA V I REDUKCJAMI $F_G V \rightarrow F_0 V$.
WPROWADZONO POWYŻEJ POJĘCIE POJAŁA PODNIEĆ TĘ RELACJĘ
DO KATEGORII WIĄZEK WEKTOROWYCH Z POWIĄZANIEM.
AŻEBY OSIĄGNĄĆ TEN CEL, POTRZEBUJEMY WRAZIE UZYSKAĆ
WCŁĄD W STRUKTURĘ ALGEBRY LIEGO $so(p, q)$ GRUPY
LIEGO $so(p, q; \mathbb{R})$. ANTYCYPUJĄC DALSZE ROZWIĄZANIA, USTALIMY
PODZIELNOŚĆ RELACJĘ POMIĘDZY ALGEBRAMI LIEGO $so(p, q)$ I $spin(p, q)$
W ODNIESIENIU DO EPINORFIZMU $\underline{Ad}$ ODNOSNYCH GRUP LIEGO.

NASZE STUDIUM ROZPOCZNIEMY OD USTALENIA NATURALNEJ
BAZY ALGEBRY $so(p, q)$ NA PODSTAWIE ANALIZY WARUNKÓW

DEFINIOWAĆMY GRUPĘ MATRIKOWĄ (11)

$$SO(p, q; \mathbb{R}) = \{ M \in \mathbb{R}(p+q) \mid M \delta_{p,q} M^T = \delta_{p,q} \wedge \det_{(p+q)} M = 1 \},$$

w którym zapisie $\delta_{p,q} \equiv \text{diag}(\underbrace{+1, +1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_q)$.

Rozważmy $M_t \equiv \exp(t \triangleright X)$, $X \in so(p, q)$, $t \in \mathbb{R}$ i obliczmy:
(EKSPONENS MATRIKOWY!)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t \triangleright X) \delta_{p,q} \exp(t \triangleright X^T) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \delta_{p,q} = 0$$

$$\stackrel{!}{=} X \delta_{p,q} + \delta_{p,q} X^T \quad \text{ORAZ}$$

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} 1 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det_{(p+q)} \exp(t \triangleright X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{\text{tr}(t \triangleright X)}$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t \triangleright \text{tr} X} = \text{tr} X.$$

PIERWSZY Z TYCH WARUNKÓW PRZEPISUJEMY JAKO (12)

$$X^T = -\delta_{p,q}^{-1} X \delta_{p,q} \equiv -\delta_{p,q} X \delta_{p,q},$$

CZYLI PO ŁĄCZANIU W BAZIE:

$$X_{ba} = X_{ab}^T = -\varepsilon_a \delta_{ac} X_{cd} \varepsilon_d \delta_{db}$$

$$= -\varepsilon_a X_{ab} \varepsilon_b, \text{ SKĄD AUTOMATYCZNIE}$$

$$\text{tr } X = \sum_a X_{aa} \stackrel{\curvearrowright}{=} -\sum_a \varepsilon_a X_{aa} \varepsilon_a = -\sum_a X_{aa} = 0.$$

NA TEJ PODSTAWIE ZAPISUJEMY (DLA $\delta_E^{(n)}(e_a, e_b) = \varepsilon_a \delta_{ab}$)

$$\mathfrak{so}(p,q) \ni X \equiv \sum_{a,b} X_{ab} e_a^* \otimes e_b$$

$$e_a^*(e_b) = \delta_{ab} \text{ J/W}$$

$$= \sum_{a < b} X_{ab} e_a^* \otimes e_b + \sum_{a < b} X_{ba} e_b^* \otimes e_a \quad (13)$$

$$= \sum_{a < b} X_{ab} e_a^* \otimes e_b - \sum_{a < b} \varepsilon_a X_{ab} \varepsilon_b e_b^* \otimes e_a$$

$$= \sum_{a < b} \varepsilon_a X_{ab} (\varepsilon_a e_a^* \otimes e_b - \varepsilon_b e_b^* \otimes e_a)$$

CO PROWADZI DO WNIOSKU

$$\underline{\mathfrak{so}(p, q)} = \bigoplus_{a < b=1}^r \langle \varepsilon_a e_a^* \otimes e_b - \varepsilon_b e_b^* \otimes e_a \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \bigoplus_{a < b=1}^r \langle \delta_E^{(p, q)}(e_a, \cdot) \otimes e_b - \delta_E^{(p, q)}(e_b, \cdot) \otimes e_a \equiv \underline{e_a \wedge e_b} \rangle_{\mathbb{R}}$$

CELEM ODCIĄŻENIA NOTACJI BĘDZIEMY ODTĄD PISAĆ $\delta_e^{(p,q)}(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)$. (14)

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI WYZNACZAMY STYCZNIOWĄ ALGEBRĘ
 LIEGO GRUPY LIEGO $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \subset \mathcal{U}_{p, q}^{\mathbb{R}}$.

Rozważmy najpierw - dla $1 \leq \underline{a} < \underline{b} \leq p$ $\exists \varepsilon_{\underline{a}} = +1 = \varepsilon_{\underline{b}}$ -
 ścieżki $u_{\underline{a}\underline{b}}^{\pm} :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\varepsilon > 0} \mathcal{I}_{\mathbb{R}^{p+q}}(\mathbb{R}^{p+q}) : t \mapsto \cos t \triangleright e_{\underline{a}} \pm \sin t \triangleright e_{\underline{b}}$
 o własności $u_{\underline{a}\underline{b}}^{\pm}(t)^2 = (\cos^2 t \varepsilon_{\underline{a}} + \sin^2 t \varepsilon_{\underline{b}}) \triangleright e^c = e^c$,
 która warunkuje $u_{\underline{a}\underline{b}}^{\pm}(t) \in \text{Pin}(\mathbb{R}^{p+q})$, więc też
 $\gamma_{\underline{a}\underline{b}} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \text{Spin}(p, q) : t \mapsto u_{\underline{a}\underline{b}}^+(t) \cdot u_{\underline{a}\underline{b}}^-(t)$
 $= \cos 2t \triangleright e^c - \sin 2t \triangleright e_{\underline{a}} e_{\underline{b}}.$
 Ścieżka ta przechodzi przez $\gamma_{\underline{a}\underline{b}}(0) = e^c$, zatem

$$\text{spin}(p, q) \ni \dot{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(0) = -2e_a e_b.$$

(15)

NASTĘPNIÉ - DLA $p+1 \leq \bar{a} < \bar{b} \leq p+q$ $\exists \varepsilon_{\bar{a}} = -1 = \varepsilon_{\bar{b}}$ -
TWÓRZYMY ŁAŁCZKĘ

$$v_{\bar{a}\bar{b}}^{\pm} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{R}^{p+q}}(\mathbb{R}^{p+q}) : t \mapsto \pm \cos t \triangleright e_{\bar{a}} + \sin t \triangleright e_{\bar{b}}$$

$$\text{O WŁASNOŚCI } v_{\bar{a}\bar{b}}^{\pm}(t)^2 = (\cos^2 t \varepsilon_{\bar{a}} + \sin^2 t \varepsilon_{\bar{b}}) \triangleright e^c = -e^c,$$

KTÓRA IMPLIKUJE (J/W, WIĘC TEŻ)

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{a}\bar{b}} :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) : t \mapsto v_{\bar{a}\bar{b}}^+(t) \cdot v_{\bar{a}\bar{b}}^-(t) \\ &= \cos 2t \triangleright e^c + \sin 2t \triangleright e_a e_b. \end{aligned}$$

ŚCIEŻKA PRZECHODZI PRZEZ $\gamma_{\bar{a}\bar{b}}(0) = e^c$, STĄD

$$\text{spin}(p, q) \ni \dot{\gamma}_{\bar{a}\bar{b}}(0) = 2e_a e_b.$$

WŁAŚCIWOŚĆ - DLA $\underline{a} \in \overline{1, p}$ i $\underline{b} \in \overline{p+1, p+q}$ $\varepsilon_{\underline{a}} = +1 = -\varepsilon_{\underline{b}}$ (16)

DEFINIOWEMY ŚCIEŻKĘ

$$w_{\underline{a}\underline{b}}^{\pm} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{R}^{p+q}}(\mathbb{R}^{p+q}) : t \mapsto \frac{1}{\cos t} \triangleright (e_{\underline{a}} \pm \sin t \triangleright e_{\underline{b}})$$

o WŁAŚNOŚCI $w_{\underline{a}\underline{b}}^{\pm}(t)^2 = \frac{1}{\cos^2 t} (\varepsilon_{\underline{a}} + \sin^2 t \varepsilon_{\underline{b}}) \triangleright e^c = e^c$

PRZESADZAJĄCEJ o (J/W, WIĘC TEŻ)

$$\begin{aligned} \gamma_{\underline{a}\underline{b}} :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) : t \mapsto w_{\underline{a}\underline{b}}^+(t) \cdot w_{\underline{a}\underline{b}}^-(t) \\ &= \frac{2 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \triangleright e^c - \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} \triangleright e_{\underline{a}} e_{\underline{b}} \end{aligned}$$

ŚCIEŻKA PRZECIŁODZI PRZEŻ $\gamma_{\underline{a}\underline{b}}(0) = e^c$, PRZETO

$$\text{Spin}(p, q) \ni \dot{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(0) = -2 e_{\underline{a}} e_{\underline{b}}.$$

OSTATECZNIE WIĘC $\forall a < b \in \overline{1, p+q} : e_{ab} \equiv e_a e_b \in \mathfrak{spn}(p, q)$, (17)

ALE TEŻ $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{spn}(p, q) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(p, q) = \frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$,
 (POKRYCIE $\mathfrak{spn}(p, q; \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{so}(p, q; \mathbb{R})$ JEST DYSKRETYWNE)

WIĘC $\mathfrak{spn}(p, q) = \bigoplus_{a < b=1}^{p+q} \langle e_{ab} \rangle_{\mathbb{R}}$.

NA ZAKOŃCZENIE OBECNEJ CZĘŚCI NASZEJ DYSKUSJI
 WYZNACZAMY W JAWNEJ POSTACI IZOMORFIZM

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{spn}(p, q) & \xrightarrow[\simeq]{T_e \xi} & \mathfrak{so}(p, q) \\
 \downarrow \exp^{\mathfrak{spn}(p, q; \mathbb{R})} & & \downarrow \exp^{(\mathfrak{so})} \\
 \mathfrak{Spn}(p, q; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\xi \equiv \text{Ad}|_{\mathfrak{spn}(p, q; \mathbb{R})}} & \mathfrak{SO}(p, q; \mathbb{R})
 \end{array}$$

ДОЗНАЖИМЫ НАПИСАЕМ § 15.3.1

(18)

$$\tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \text{Sym}(p, q; \mathbb{R}) : t \mapsto u_{\underline{a}\underline{b}}^{-1}(t) \cdot e_{\underline{a}}$$

ПРИМЕР $\tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(0) = e_{\underline{a}} \triangleright e^c = e^c$, 0 ВЕКТОРНОЕ СПЯЗНЕНИЕ

$$\dot{\tilde{\gamma}}_{\underline{a}\underline{b}}(0) = -e_{\underline{b}} e_{\underline{a}} = e_{\underline{a}\underline{b}}.$$

ЛЕММА - ДЛА $c \in \overline{1, p+q}$ -

$$\begin{aligned} T_e \xi(e_{\underline{a}\underline{b}})(e_c) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \xi(\tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(t))(e_c) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(t) \cdot e_c \cdot \tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}}(t)^{-1} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} u_{\underline{a}\underline{b}}^{-1}(t) \cdot e_{\underline{a}} \cdot e_c \cdot e_{\underline{a}} \cdot u_{\underline{a}\underline{b}}^{-1}(t) \quad \quad \quad = \text{ad}_{\underline{a}\underline{b}}(e_c) \\ &= -e_{\underline{b}} e_{\underline{a}} e_c e_{\underline{a}} e_{\underline{a}} + e_{\underline{a}} e_{\underline{a}} e_c e_{\underline{a}} (-e_{\underline{b}}) = [e_{\underline{a}\underline{b}}, e_c] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } c \notin \{a, b\} \\ -2e_{\underline{b}}, & \text{если } c = \underline{a} \\ 2e_{\underline{a}}, & \text{если } c = \underline{b} \end{cases} \end{aligned}$$

(19)

$$\text{SKŁAD WNIOSKÓW } T_e \xi(e_{\underline{a}\underline{b}}) \equiv -2e_{\underline{a}} \wedge e_{\underline{b}}.$$

ANALOGICZNIE ROZPATRUJEMY ŚCIEŻKI

$$\tilde{\gamma}_{\bar{a}\bar{b}} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) : t \mapsto -\sigma_{\bar{a}\bar{b}}^+(t) \cdot e_{\bar{a}}$$

PRZEZ $\tilde{\gamma}_{\bar{a}\bar{b}}(0) = -\varepsilon_{\bar{a}} \triangleright e^c = e^c$, o wektorze stycznym

$$\tilde{\gamma}_{\bar{a}\bar{b}}'(0) = e_{\bar{a}\bar{b}}.$$

OTRZYMUJEMY WYNIK

$$T_e \xi(e_{\bar{a}\bar{b}})(e_c) = [e_{\bar{a}\bar{b}}, e_c] = \begin{cases} 0, & \text{gdy } c \notin \{\bar{a}, \bar{b}\} \\ 2e_{\bar{b}}, & \text{gdy } c = \bar{a} \\ -2e_{\bar{a}}, & \text{gdy } c = \bar{b} \end{cases},$$

$$\text{KTÓRY MOŻEMY ZAPISAC'} \quad T_e \xi(e_{\bar{a}\bar{b}}) \equiv -2e_{\bar{a}} \wedge e_{\bar{b}}.$$

WRAZCIE TĘŻ DLA ŚCIEŻEK

$$\tilde{\gamma}_{\underline{a}\underline{b}} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) : t \mapsto w_{\underline{a}\underline{b}}^-(t) \cdot e_{\underline{a}}$$

20

$$\dot{\gamma}_{\perp b}(0) = c_{\perp b}, \text{ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ВЫНУК}$$

$$T_e \xi(e_{\underline{a} \overline{b}})(e_c) = [e_{\underline{a} \overline{b}}, e_c] = \begin{cases} 0, & \text{for } c \notin \{\underline{a}, \overline{b}\} \\ -2e_{\overline{b}}, & \text{for } c = \underline{a} \\ -2e_{\underline{a}}, & \text{for } c = \overline{b} \end{cases}$$

$$4 \sin^2 \theta \, T_e \xi(e_{\underline{a}5}) = -2e_{\underline{a}} \wedge e_{\underline{b}}.$$

OSTATECZNIE ZATEM $T_e \xi(e_{ab}) = -2e_a \wedge e_b$,

ՀԱՆԻ ԴԵՅ $(T_e \xi)^{-1}(v_\lambda w) = -\frac{1}{4} [v, w]$. ԻՏԻՈՒՆԻԷ ,

$$(\tau_e \xi)^{-1}(e_a \wedge e_b) = -\frac{1}{2} e_{ab} \equiv -\frac{1}{4} [e_a, e_b], \text{ поэтому}$$

$$(\Gamma_{e\xi})^{-1}(\sigma \wedge w) = v^a w^b (-\tfrac{1}{4} [e_a, e_b]) = -\tfrac{1}{4} [v, w].$$

MOŻEMY JUŻ TERAZ WRÓCIĆ DO BADANIA RELACJI (21)
 MIĘDZY POKŁĘDZĄ POWIĄZANIANI METRYCZNYMI NA (V, g)
 I FORMANI POWIĄZANIA GŁÓWNEGO NA ODNOŚNYCH $F_{SO} V$.
 CELEM WYPRAĆOWANIA NIEODZOWNYCH INTUICJI PRZYSWOŁAJMY
 KONSTRUKCJĘ Z DOWODU STW. 7-8-9.1 (POPRAWIONĄ
 W ODWIECIU DO DYSKUSJI Z ROZD. 5-6.1), POTRACUJMY LOKALNĄ
 BAZĘ PSEUDONORMAŁNĄ $\{e_a^{(i)}\}$ $C^\infty(B, \mathbb{R})$ -MODUŁU $\Gamma(V)$ JAKO
 WYNIK EWALUACJI $E_{(i)} := (e_a^{(i)}) \equiv s_{(i)}$ (LOKALNEGO) PŁASKIEGO
 CIĘCIA UNITALNEGO $s_{(i)}(\cdot) = F\tau_i^{-1}(\cdot, 1) \in \Gamma(F_{SO} V|_{\theta_i})$,
 DLA STOWARZYSZONEJ Z $s_{(i)}$ TRIWIALIZACJI (WG STW. 3.4),

(22)

Tj. mamy $e_a^{(i)} \equiv s_{(i)}(\cdot)(e_a) \equiv \varepsilon_{(i)}(\cdot)(e_a) \equiv [e^i](s_{(i)}(\cdot), \cdot, e_a)$.

Niechaj $\omega \equiv \sum_{a < b} \omega^{ab} \otimes e_a \wedge e_b \in \Omega^1(F_{so} V) \otimes_{\mathbb{R}} so(p, q)$ będzie formą
rozwiązania głównego na $F_{so} V$. W świetle Stw. 14.3 TA
jest w pełni określona przez potencjały lokalne

$$\begin{aligned} \omega_i &= \varepsilon_{(i)}^* \omega \equiv \varepsilon_{(i)}^* \omega_{ab} \otimes e_a \wedge e_b =: \omega_{ab}^{(i)} \otimes e_a \wedge e_b, \\ &\quad \omega_{ab}^{(i)} \stackrel{!}{=} \omega_{[ab]}^{(i)} \\ &\equiv \frac{1}{2} \omega_{ab}^{(i)} \otimes e_a \wedge e_b \quad (\text{pełny zakres indeksów}) \end{aligned}$$

które możemy następnie obliczać na bazie $\{e_c\}$:

$$ev_{e_a} \circ \omega_i = \frac{1}{2} \omega_{bc}^{(i)} \otimes e_b \wedge e_c(e_a) = \frac{1}{2} \varepsilon_a(\omega_{ab}^{(i)} - \omega_{ba}^{(i)}) \otimes e_b = \varepsilon_a \omega_{ab}^{(i)} \otimes e_b$$

$$\hookrightarrow ev_{e_a} \circ \omega \circ T\varepsilon_{(i)} : TB|_{\sigma_i} \rightarrow TF_{so} V|_{\sigma_i} \rightarrow so(p, q) \rightarrow \mathbb{R}^{p+q}$$

W OBECNOŚCI POWIĄZANIA KOSZULA NA V NATURALNYM JEST (23)
 JATEM ZAPOSTULOWAĆ — ZWAŻYWSZY STRUKTURĘ POWYŻSZEJ
 RELACJI ($\varepsilon_{(i)}(\cdot)(e_a) \equiv e_a^{(i)}(\cdot) \wedge ev_{e_a} \circ \omega \circ T\varepsilon_{(i)}$ JEST RÓŻNICZKOWANIEM!) —

$$\varepsilon_{(i)}(\cdot) \circ ev_{e_a} \circ \underline{\omega} \circ T\varepsilon_{(i)} \stackrel{!}{=} \nabla^k e_a^{(i)} \quad \text{⊛}$$

JAKO DEFINICJĘ FORMY POWIĄZANIA NA $T_{SO}V$ INDUKOWANEJ
 PRZEZ DANE METRYCZNE POWIĄZANIE KOSZULA ∇^k .

POWYŻSZY POSTULAT PROWADZI DO UTOŻSAMIENIA

$$\varepsilon_{(i)}(\cdot) \circ (e_a \omega_{ab}^{(i)}(\cdot) \otimes e_b) \equiv e_a \omega_{ab}^{(i)}(\cdot) \otimes e_b^{(i)}(\cdot)$$

$$\stackrel{!}{=} \nabla^k e_a^{(i)}(\cdot) \equiv \Gamma_{ab}^{(i)}(\cdot) \otimes e_b^{(i)}(\cdot), \text{ CZYLI } \underline{e_a \omega_{ab}^{(i)}} \stackrel{!}{=} \Gamma_{ab}^{(i)}.$$

WARUNKIEM KONIECZNYM JEJEGO SENSOWNOŚCI JEST TOŻSAMOŚĆ (24)

$$\Gamma_{ba}^{(i)} = \varepsilon_b \omega_{ba}^{(i)} = -\varepsilon_b \omega_{ab}^{(i)} = -\varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \varepsilon_b,$$

KTÓRĄ PRZEPISUJEMY W SUGESTYWNEJ POSTACI

$$0 = \Gamma_{ab}^{(i)} \varepsilon_b + \Gamma_{ba}^{(i)} \varepsilon_a \equiv g(\nabla^k e_a^{(i)}, e_b^{(i)}) + g(e_a^{(i)}, \nabla^k e_b^{(i)}). \quad *$$

NASZ POSTULAT * JEST DOPATKOWO PODBUDOWANY OBSERWACJĄ:

POWIĄZANIE ω INDUKUJE NA $F_{SO} V \times_{\text{def}} \mathbb{R}^{*p,q} \simeq V$
(ROZDZ. 9-10-11.1) POMODNĄ KOWARIANTNĄ, KTÓRA W OBRAZIE
LOKALNEJ TRYWIALIZACJI F_i OBLIŻA SIĘ NA ODPOWIEDZĄCĄ BAZIE
 $e_a^{(i)}$ PRZESTRZENI CIĘC WEDLE FORMUŁY (15.3) (POR. TAKŻE: (15.5))
Busch 25

(25)

$$\begin{aligned}
D^{\omega_i}[(\varepsilon_{(i)}, e_a)]_i &= T(p_{\Sigma} \circ F_{\tau_i} \circ [(\varepsilon_{(i)}, e_a)]) - \mathcal{K}^{(p_{\Sigma})}(p_{\Sigma} \circ F_{\tau_i} \circ [(\varepsilon_{(i)}, e_a)]) \circ \omega_i \\
&\equiv T e_a - \mathcal{K}^{(p_{\Sigma})}(e_a) \circ \omega_i = -\mathcal{K}^{(p_{\Sigma})}(e_a) \circ \omega_i \\
&= -\frac{1}{2} \omega_{bc}^{(i)} \otimes \mathcal{K}_{e_b \wedge e_c}^{(p_{\Sigma})}(e_a) \equiv -\frac{1}{2} \omega_{bc}^{(i)} \otimes \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-t \triangleright e_b \wedge e_c)(e_a) \\
&= \frac{1}{2} \omega_{bc}^{(i)} \otimes e_b \wedge e_c(e_a) = \varepsilon_a \omega_{ab}^{(i)} \otimes e_b,
\end{aligned}$$

PRZY CZYM RACHUNEK POWYŻSZY IMPLICITE BAZUJE NA UPOŻAMIEWNIU

$$[(\varepsilon_{(i)}, e_a)] \xleftrightarrow{[\hat{e}^i]} \varepsilon_{(i)}(\cdot)(e_a) \equiv e_a^{(i)}.$$

ROZUMOWANIE POWYŻSZE PROWADZI DO

Tw. ISTNIEJE WZAJEM JEDNOZNACZNA ODPOWIEDNIOŚĆ MIĘDZY POWIĄZANAMI METRYCZNYMI NA (V, g) A FORMAMI POWIĄZANIA (GF.) NA $T_{SO} V$.

D ; W ŚWIEŁE WZĘSNIĘTYCH UKŁADEN W OBECNOŚCI FORMY (26)
 POWIĄZANIA (CŁ.) W NA $F_{SO} V$ O POTENCJAŁACH LOKALNYCH W;
 JAK NA STR. (22) NOŻEMY ZDAĆ POCHODNĄ KOŻDĄ NA BAZIE
 (LOKALNE)

$$\nabla^k e_a^{(i)} := \varepsilon_a \omega_{ab}^{(i)} \otimes e_b^{(i)},$$

A NASTĘPNIE ROZSZERZYĆ DO $\Gamma(V)$ POPRZESZ (RL).

NA GRUNCIE TW. O REKONSTRUKCJI PRZYWOŁANEGO NA STR. 9.

WYSTARCZY OBECNIE POŁĄŻAĆ, ŻE ZAPOSTULOWANE TU
 1-FORMY CHRISTOFFELA PODLEGAYĄ STOSOWNYM PRZEKSZTAŁCENIOM
 WZGLĘDEM AUTOMORFIZMÓW V (W OBRAZIE LOKALNYM),
 PATRZ: PŁ. (8). W TYM CELU PRZEPISUJEMY

$$\Gamma^{(i)} \equiv \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes (e_a^* \otimes e_b) \equiv \varepsilon_a \omega_{ab}^{(i)} \otimes (e_a^* \otimes e_b) \quad (27)$$

$$\equiv \omega_{ab}^{(i)} \otimes ((e_a | \cdot) \otimes e_b) = \frac{1}{2} \omega_{ab}^{(i)} \otimes e_a \wedge e_b \equiv \omega_i$$

(PEŁNY ZAKRES a, b !)

WYKORZYSTUJĄC PO DRODZE SKOŚNĄ SYMETRIĘ $\omega_{ab}^{(i)}$.

REGUŁY TRANSFORMACYJNE DLA $\Gamma^{(i)}$ WYNIKAJĄ WPROST Z STRUKTURALNIE IDENTYCZNYCH REGUŁ TRANSFORMACYJNYCH DLA POTENCJAŁÓW LOKALNYCH ω_i .

METRYCZNOŚĆ TAK ZADANEGO POWIĄZANIA NA V ZOSTAŁA WYKAZANA NA STR. (24). 

I ODWROTNIE, REGUŁY TRANSFORMACYJNE DLA $\Gamma^{(i)}$ ZE STR. (8)

W POŁĄCZENIU Z TOŻSAMOŚCIĄ  ZE STR. (28) CZYNIAJĄ

$\omega_i := \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes e_a \wedge e_b$ POTENCJAŁ LOKALNY POWIĄZANIA

ciotkowego na $F_{\mathbb{R}^n}$ W, więc teża wynika z Tw. 14.3. $\square$ (28)

W szczególnym przypadku $V = TM$, w którym pola wektorowe na bazie V to $\Gamma(TM) \equiv \Gamma(V)$, wprowadzamy

Def.: Powiązanie na wzgłędnie stycznej TM nad rozmaitością gładką M określamy mianem **BEZTORSYJNEGO**, ilekroć **TENSOR TORSJI**

$$T : \Gamma(TM)^{\times 2} \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$: (X, Y) \mapsto \nabla_X^k Y - \nabla_Y^k X - [X, Y]_{\Gamma(TM)}$$

Dla odnośnej pochodnej Koszula ∇^k znika.

O WYJĄTKOWOŚCI POWYŻSZEJ CECHY PRZEWODNIJE NAS... (29)

WARIANT NA POTRZEBY WYKŁADU!

Tw. [PODSTAWOWE GEOMETRII RIEMANNOWSKIEJ]

$\forall (M, g)$ ROZMAITOŚĆ METRYCZNA : $SW_1(M) = 0 \Rightarrow \exists \nabla^k / \Gamma(TM)$ METRYCZNE

JESLI ∇^k JEST BEZTORSYJNE, TO JEST ONO DANE JEDNOZNACZNIE.

D: W ŚWIELE STW.7-8-9.1 : TW.7-8-9.4 (ORAZ WN.7-8-9.1)

ISTNIENIE NA TM STRUKTURY METRYCZNEJ I ZMIANIE ODDAŚNOŚ

1. KLASY STIEFFELA-WHITNEA IMPLIKUJE REDUKCJĘ

$$F_G TM \hookrightarrow F_{O(\text{sym } g)} TM \hookrightarrow F_{SO(\text{sym } g)} TM.$$

FORMA POWIĄZANIA GŁÓWNEGO NA TEJ KRATNIEJ WŁOŻCE, 30
 WIDOK ISTNIENIE GWARANTUJE TW. 14.2 INDUKUJE NA TM
 POWIĄZANIE METRYCZNE NA MOCY TW. 36 STR. 25.
 POZOSTAJE PRZEKONAĆ SIĘ, ŻE NARZUCENIE WARUNKU
 BEZTORSYJNOŚCI UJEDNODZACZANIA JEGO WYBÓR.

METRYCZNOŚĆ ∇^k POZWALA NAM ZAPISAĆ — DLA DOWOLNYCH $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ —

$$\begin{cases}
 X \lrcorner dg(Y, Z) = g(\nabla_X^k Y, Z) + g(Y, \nabla_X^k Z) \\
 Y \lrcorner dg(Z, X) = g(\nabla_Y^k Z, X) + g(Z, \nabla_Y^k X) \stackrel{\text{BEZTORSYJNOŚĆ}}{=} g(\nabla_Y^k Z, X) + g(Z, \nabla_X^k Y) \\
 Z \lrcorner dg(X, Y) = g(\nabla_Z^k X, Y) + g(X, \nabla_Z^k Y) + g(Z, [X, Y])
 \end{cases}$$

(31)

NA TEJ PODSTAWIE OBLICZAMY TOŻSAMOŚĆ (KOŞZULA)

$$\begin{aligned} & X \lrcorner dg(Y, Z) + Y \lrcorner dg(Z, X) - Z \lrcorner dg(X, Y) \\ &= 2g(\nabla_X^* Y, Z) + g(Y, \nabla_X^* Z - \nabla_Z^* X) + g(X, \nabla_Y^* Z - \nabla_Z^* Y) + g(Z, [X, Y]) \\ &= 2g(\nabla_X^* Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

KTÓRA POZWALA WYZNACZYĆ ∇^k JEDNOZNACZNIE
(FORMY CHRISTOFFELA WYRAŻAJĄ SIĘ PRZEZ g I dg). □

PO DOTYCZĄSOWYCH PRZYGOTOWANIACH...

POŁOŹĄ CZAS ZACZĄĆ!

PRZYPOMNIJMY SOBIE NASZ STAN POSIADANIA JE STR. (1) ... (32)

JAKO ŻE PROLONGACJA $F_{\text{Spin}} V \xrightarrow{\Xi} F_{\text{SO}} V$ (KOLEJ ISTNIENIE
ZAGŁADAMY) JEST W.P.W. NAKRYCIEM DYSKRETNYM
MODELOWANYM NA $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Spin}(p, q; \mathbb{R}) \xrightarrow{\Xi} \text{SO}(p, q; \mathbb{R})$

POWOLNA FORMA POWIĄZANIA GŁÓWNEGO ω NA $F_{\text{SO}} V$
(OJCU - W ŚWIECIE TW. JE STR. (25) - POWOLNE

POWIĄZANIE METRYCZNE NA (V, g)) INDUKUJE

$$\omega^S := \left(T_e \Xi \right)^{-1} \circ \Xi^* \omega \in \Omega^1(F_{\text{Spin}} V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{spin}(p, q)$$

BEZ TRUDU PRZEKONUJEMY SIĘ, ŻE

Stw. W^s jest formą powiązania głównego (33)
na wiązce baz spinowej $F_{\text{spin}} W$ wiązki W .

Określamy ją mianem **formy powiązania spinowego**.

D: Definiując własności form powiązania głównego używamy globalnej trywializacji podwiązki pionowej. Rozważmy przeto

$$\widetilde{\text{Vect}} : F_{S^0} W \times \mathfrak{so}(p, q) \longrightarrow VF_{S^0} W$$

$$: (\beta, X) \longmapsto \mathcal{K}_X^{(r)}(\cdot) \equiv T_{(\beta, e)} r(\mathbb{O}_{F_{S^0} W}(\beta), X)$$

ORAZ

$$\widetilde{\text{Vect}}^s : F_{\text{spin}} W \times \mathfrak{spin}(p, q) \longrightarrow VF_{\text{spin}} W$$

$$: (\Sigma, \gamma) \longmapsto \mathcal{K}_\gamma^{(r^s)}(\Sigma) \equiv T_{(\Sigma, e)} r^s(\mathbb{O}_{F_{\text{spin}} W}(\Sigma), \gamma).$$

WPROST NA MOCZ DEFINICJI Ξ JAKO UCZŁONIONEGO MORFIZMU (34)
 WIĄZUŁU GŁÓWNYCH (WŁĘC - W SZCZEGÓLNOŚCI - ODWZOROWANIA EULIWARIAWANTNEGO)
 ZACHODZI

$$\begin{aligned}\omega^s \circ \widetilde{\text{Vect}}^s(\cdot, \gamma) &\equiv (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T \Xi \circ T_{(\cdot, e)} r^1 (O_{T_{F_{\text{spin}} V}} \gamma) = (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T_{(\cdot, e)} (\Xi \circ r^1) (O_{T_{F_{\text{spin}} V}} \gamma) \\ &= (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T_{(\cdot, e)} (r \circ (\Xi \times \xi)) (O_{T_{F_{\text{spin}} V}} \gamma) = (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T r (O_{T_{F_{\text{spin}} V}} \tau_e \xi(\gamma)) \\ &\equiv (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega (\mathcal{K}_{\tau_e \xi(\gamma)}(\cdot)) = (\tau_e \xi)^{-1} (\tau_e \xi(\gamma)) = \gamma \equiv \text{id}_{\text{spin}(\rho, g)}(\gamma),\end{aligned}$$

$$\text{UJYCI} \quad \omega^s \circ \widetilde{\text{Vect}}^s = \text{id}_{F_{\text{spin}} V \times \text{spin}(\rho, g)}!$$

NADTO - DLA DOWOLNEGO $M \in \text{Spin}(\rho, g; \mathbb{R})$ -

$$\begin{aligned}\omega^s \circ T r_M^s &\equiv (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T (\Xi \circ r^s(\cdot, M)) = (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T (r \circ (\Xi(\cdot), \xi(M))) \\ &= (\tau_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T_{\Xi(\cdot)} r_{\xi(M)} \circ T \Xi = (\tau_e \xi)^{-1} \circ T_e \text{Ad}_{\xi(M)}^{-1} \circ \omega \circ T \Xi,\end{aligned}$$

ALE TEŻ $\forall \gamma \in \text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$: $(\xi \circ \text{Ad}_M)(\gamma) = \xi(M\gamma M^{-1}) = \text{Ad}_{\xi(M)}(\gamma)$

z racji homomorficzności ξ , a stąd

$$T_e(\xi \circ \text{Ad}_M) = T_e(\text{Ad}_{\xi(M)} \circ \xi), \text{ PRZETO}$$

$$\omega^S \circ \text{Tr}_M^S = T_e \text{Ad}_{M^{-1}} \circ (T_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T\xi = T_e \text{Ad}_{M^{-1}} \circ \tilde{\omega}^S,$$

co w sumie oznacza, że ω^S jest formą powiązania głównego.



MOŻEMY PROSTO POWIĄZAĆ POTENCJAŁY LOKALNE FORMY
POWIĄZANIA SPINOWEGO Z 1-FORMAMI CHRISTOFFELA
INDUKUJĄCEGO JĄ POWIĄZANIA KOŞZULA...

Rozważmy lokalną bazę spinową $\Sigma_{(i)} \in \Gamma(F_{\text{spin}} V|_{\mathcal{O}_i})$ (36)

indukującą wtedy Ξ bazę pseudonormalną $E_{(i)} \in \Gamma(F_{\text{so}} V|_{\mathcal{O}_i})$.

Co oznacza, że $E_{(i)} = \Xi \circ \Sigma_{(i)}$, a wówczas – w świetle formuły

ze str. (20): $\Sigma_{(i)}^* \omega^s = \omega^s \circ T\Sigma_{(i)} = (T_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ T\Xi \circ T\Sigma_{(i)}$

$$= (T_e \xi)^{-1} \circ \omega \circ TE_{(i)} = (T_e \xi)^{-1} (\varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes e_a \wedge e_b)$$

$$= -\frac{1}{4} \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes [e_a, e_b] = -\frac{1}{2} \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes e_a e_b.$$

Z tak określonego powiązania na wiązkach głównych:

$F_{\text{so}} V$ i $F_{\text{spin}} V$ możemy teraz indukować pochodne kowariantne

na wiązkach stowarzyszonych: $\mathcal{C}\ell(V, g) = F_{\text{so}} V \times_{\text{aff} \circ \rho_{\text{det}}} \mathcal{C}\ell_{p, g}^{\mathbb{R}}$

Ozn. $\lambda_c := \text{Cliff} \circ \rho_{\text{det}}$

$\mathcal{S}(V, g) = F_{\text{spin}} V \times_{\sigma} S$

Wę schematu opisanego na wykładzie XV. W obrazie lokalnym (37) wymaga to znajomości odnośnicy pól fundamentalnych, którym przyjrzymy się obecnie:

(1) Wobec $\lambda_c : \mathfrak{so}(p, q; \mathbb{R}) \rightarrow \ln(\mathcal{U}_{p, q}^{\mathbb{R}})$ jest

$$\mathcal{K}^{(\lambda_c)} : \mathfrak{so}(p, q) \longrightarrow \overline{\text{Id}} \ln(\mathcal{U}_{p, q}^{\mathbb{R}}) \equiv \text{Der}(\mathcal{U}_{p, q}^{\mathbb{R}}),$$

czyli indukowana pochodna kowariantna będzie różnicowaniem algebry $\Gamma(\mathcal{U}(V, g))$.

(2) Wobec $\sigma : \mathfrak{spn}(p, q; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(S)$ jest

$$\mathcal{K}^{(\sigma)} : \mathfrak{spn}(p, q) \longrightarrow \mathfrak{gl}(S) \equiv \text{End}(S)$$

A konkretnie

Str. $\forall 1 \leq a < b \leq p+q : \mathcal{K}_{e_a \wedge e_b}^{(\lambda_c)}(\gamma) = \frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma]$
 $\gamma \in \mathcal{U}_{p, q}^{\mathbb{R}}, v \in S \quad \mathcal{K}_{e_a \wedge e_b}^{(\sigma)}(v) = -\sigma(e_{ab})(v).$

D: Po pierwszej i drugiej naturalnej exp ,

(38)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{Spin}(p, q; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\xi} & \mathfrak{SO}(p, q; \mathbb{R}) \\
 \exp^{\mathfrak{Spin}} \uparrow & \stackrel{\xi}{\cong} \text{Ad}^{\dagger} \equiv \text{Ad}^{\uparrow} & \uparrow \exp^{\mathfrak{so}} \\
 \mathfrak{spin}(p, q) & \xleftarrow{(\tau_c \xi)^{-1}} & \mathfrak{so}(p, q)
 \end{array}$$

zakładaj: $\exp^{\mathfrak{so}}(X)(v)$ jest realizowane w $\mathcal{C}_{p, q}^{\mathbb{R}}$ jako

$$\xi \left(\exp^{\mathfrak{spin}} \circ (\tau_c \xi)^{-1}(X) \right) (v) \stackrel{\text{in } \bigcup_{\substack{\lambda_c \\ \text{in}}} \mathbb{R}^{p, q}}{=} \text{Ad}_{\exp^{\mathfrak{spin}}((\tau_c \xi)^{-1}(X))}(v),$$

zatem $\text{Cliff}_{\text{out}}(\exp^{\mathfrak{so}}(X))(v) = \text{Ad}_{\exp^{\mathfrak{spin}}((\tau_c \xi)^{-1}(X))}(v)$, a wobec tego -
na mocy lematu 3.5 str. (20) -

$$\begin{aligned} \kappa_{e_a \wedge e_b}^{(\lambda_c)}(\gamma) &\equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Ad}_{\exp^{t\text{ad}}((\Gamma_e \xi)^{-1}(-t \triangleright e_a \wedge e_b))}(\gamma) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp^{t\text{ad}}\left(\frac{1}{2}t \triangleright e_{ab}\right) \cdot \gamma \cdot \exp^{t\text{ad}}\left(-\frac{1}{2}t \triangleright e_{ab}\right) = \frac{1}{2}[e_{ab}, \gamma], a < b! \end{aligned}$$

ANALOGIZNIE OBUCHAY

$$\kappa_{e_{ab}}^{(\sigma)}(v) \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sigma(\exp^{t\text{ad}}(-t \triangleright e_{ab}))(v) = -\sigma(e_{ab})(v), a < b.$$

□

Cor. Рочислне $\nabla^{\text{ce}}_\gamma$ дла $\gamma = [(\xi_i), (\gamma_i)] \in \Gamma(\mathcal{A}(W, g))$

и ∇^s_σ дла $\sigma \in [(\xi_i), (\sigma_i)] \in \Gamma(\mathcal{S}(W, g))$

ω презентаций локальных структурных изоморфизмов $\Sigma_{(i)} \in \Gamma(F_{S_{p_i}} V|_{\theta_i})$ и $\xi_{(i)} \in \Gamma(F_{S_0} W|_{\theta_i})$ то — відповідно

$$\mathcal{D}^{\xi(i)} \gamma_i = T \gamma_i - \omega_{ab}^{(i)} \otimes \frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_i] \equiv T \gamma_i - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_i] \quad (40)$$

$$\mathcal{D}^{\Sigma(i)} \sigma_i = T \sigma_i + \omega_{iab}^s \otimes \sigma(e_{ab})(\sigma_i) \equiv T \sigma_i - \frac{1}{2} \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \sigma(e_{ab})(\sigma_i)$$

NA PODSTAWIE POWYŻSZEJO BEZ TRUDU OKAZUJEMY:

Stw. ∇^{el} JEST RÓŻNICZKOWANIEM ALGEBRY $\Gamma(\mathcal{CL}(W, g))$ (O STRUKTURZE INDUKOWANEJ Z TEJ NA $\mathcal{CL}(W, g)$, OPISANEJ NA WŁASNOŚCIACH $\underline{X} : \underline{X}^T$).

D: W ŚWIETELIE Stw. JE STR. (37) JEST - DLA $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{CL}_{\text{Pf}}^{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{e_a \wedge e_b}^{(\Lambda_c)}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) &= \frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_1 \gamma_2] \equiv \frac{1}{2} (e_{ab} \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 e_{ab}) \equiv \frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_1] \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \left(\frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_2] \right) \\ &\equiv \mathcal{K}_{e_a \wedge e_b}^{(\Lambda_c)}(\gamma_1) \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{e_a \wedge e_b}^{(\Lambda_c)}(\gamma_2) \quad , \end{aligned}$$

1
a < b

ZATEM - DLA $\gamma_i^1, \gamma_i^2 : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{U}_{p,q}^{\mathbb{R}} \ni \gamma^1 \gamma^2 \in \Gamma(\mathcal{U}(W, g))$ J/W - (41)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\varepsilon_{(i)}}(m^{\circ}(\gamma^1, \gamma^2)) &= T(\gamma_i^1 \cdot \gamma_i^2) - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_i^1 \gamma_i^2] \\ &= (T\gamma_i^1) \cdot \gamma_i^2 - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_i^1] \cdot \gamma_i^2 + \gamma_i^1 \cdot T\gamma_i^2 - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \gamma_i^1 \left(\frac{1}{2} [e_{ab}, \gamma_i^2] \right) \\ &= m^{\circ}(\mathcal{D}^{\varepsilon_{(i)}} \gamma^1, \gamma_i^2) + m^{\circ}(\gamma_i^1, \mathcal{D}^{\varepsilon_{(i)}} \gamma^2) \end{aligned}$$

GDZIE WYKORZYSTALISMY TO, JE STYCZNA DO PRZESTRZENI WEKTOROWEJ / ALGEBRY W JEJ DOKŁADNYM PUNKCIE JEST KANONICZNIE ISOMORFICZNA Z TĄ PRZESTRZENIĄ / ALGEBRĄ. $\square$

WŁASNOŚĆ POWYŻSZA WPISUJEMY W

Def: BUDOWNA KOWARIAANTNA NA $\Gamma(\mathcal{U}(W, g))$ O WŁASNOŚCI JAKI W STW. ZE STW. (40) NOGI MIAMO **POCZODNEJ CLIFFORDA**.

NAMY TĘŻ 3 DAWNA OZECIWANIE

Skr. ∇^g jest zgodnione ze strukturą $\Gamma(\mathcal{U}(V,g))$ -modułu
na $\Gamma(\mathcal{S}(W,g))$ w sensie określonym przez tożsamość

$$\forall (x, \psi) \in \Gamma(\mathcal{U}(V,g)) \times \Gamma(\mathcal{S}(W,g)) : \nabla^g(x \triangleright \psi) = \nabla^g x \triangleright \psi + x \triangleright \nabla^g \psi.$$

D: Tak poprzednio, sprawdzamy tożsamość w obrazie lokalnym:
Dla $\gamma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{U}_{p,q}^{\mathbb{R}}, \psi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{S}$ stowarzyszonych z γ i - odpowiednio - ψ
przez $\xi_{(i)}$ i - odpowiednio - $\Sigma_{(i)} : \Xi \circ \Sigma_{(i)} \equiv \xi_{(i)}.$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\xi_{(i)}}(\sigma(\gamma_i)(\psi_i)) &= T(\sigma(\gamma_i)(\psi_i)) - \frac{1}{2} \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \sigma(e_{ab})(\sigma(\gamma_i)(\psi_i)) \\ &= \sigma(T\gamma_i)(\psi_i) + \sigma(\gamma_i)(T\psi_i) - \frac{1}{2} \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \sigma(e_{ab}\gamma_i)(\psi_i) \\ &\equiv \sigma(T\gamma_i)(\psi_i) - \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \sigma(\frac{1}{2}[e_{ab}, \gamma_i])(\psi_i) + \sigma(\gamma_i)(T\psi_i - \frac{1}{2} \varepsilon_a \Gamma_{ab}^{(i)} \otimes \sigma(e_{ab})(\psi_i)) \end{aligned}$$

$$\equiv \sigma(D^{(i)} \gamma)(\psi_i) + \sigma(\gamma_i)(D^{(i)} \psi). \quad \square$$

(43)

UKORONOWANIEM NASZYCH WIELOMIERZYSTWYCH DOUGAN JEST

Def.: Niechaj $\mathcal{U}(TM, g)$ będzie wiązka modułów Clifford ^(Def. 10-11.2) wiązki stycznej nad różniczkową spinową M , o wektorem typowym (W, e) .

Operator Diraca na $\mathcal{U}(TM, g)$ to operator różniczkowy

$$D : \Gamma(\mathcal{U}(TM, g)) \ni \psi \mapsto \sum e_i \circ d\pi(e_i^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_i^{(i)}} \psi,$$

w którego zapisie użyliśmy dowolnej lokalnej bazy pseudo-ortonormalnej $\{e_a^{(i)}\}_{a \in \overline{1, d_{\text{dim}} M}}$ $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -modułu $\Gamma(TM)$ dla metryki $g \in \Gamma(S^2 T^*M)$ o sygnaturze (p, q) ($\varepsilon_a = +1 = -\varepsilon_L, 1 \leq a \leq p < b \leq p+q$).

Stw. ∇ JEST DOBRZE OKREŚLONY.

(44)

D. SPRAWDZAMY NAJPIERW NIEZALEŻNOŚĆ DEFINICJI

OD WYBORU BAZY $\{e_a^{(i)}\}$: DOWOLNA INNA BAZA

PSEUDO-ORTONORMALNA $\{f_a^{(i)}\}$ JEST $\exists$ POWYŻSZY

POWIĄZANA (ŁADKO ZALEŻNĄ OD PUNKTU W PRZESTRZENI)

TRANSFORMACJĄ ORTOGONALNĄ $f_a^{(i)} = L_{iab} \cdot e_b^{(i)}$,

WIĘC WOPRZEC $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -LINIOWOŚCI ∇^g W ARGUMENCIE

$e_a^{(i)}$ OTRZYMUJEMY

$$\varepsilon_a \sigma_{ijm}(f_a^{(i)}) \triangleright \nabla_{f_a^{(i)}}^g \psi = \varepsilon_a L_{iab} h_{iac} (\sigma_{ijm}(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}}^g \psi)$$

$$\begin{aligned}
 &\equiv \varepsilon_b \llbracket \varepsilon_a h_{iab} \varepsilon_b h_{iac} (\sigma \circ j\pi(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi) \quad (45) \\
 &= \varepsilon_b \llbracket h_{iba}^{-1} h_{iac} (\sigma \circ j\pi(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi) \\
 &= \varepsilon_b \sigma \circ j\pi(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_b^{(i)}} \psi.
 \end{aligned}$$

POWÓD GLOBALNEJ OKREŚLONOŚCI ∇ PRZEBIEGA PODOBNIE:
 OTO NA PRZECIECIU DZIEDZIN BAZ LOKALNYCH
 $\{e_a^{(i)}\}$ ORAZ $\{e_a^{(j)}\}$ MAMY $e_a^{(j)}(\cdot) \equiv \tau_j^{-1}(\cdot, e_a) = \tau_i^{-1}(\cdot, g_{ij}(\cdot)(e_a))$
 $= \llbracket_{g_{iab}(\cdot)} (\tau_i^{-1}(\cdot, e_b)) \equiv \llbracket_{g_{iab}}(e_b^{(i)})(\cdot),$
 PRZETO

$$\varepsilon_a \sigma \circ j\pi(e_a^{(j)}) \triangleright \nabla_{e_a^{(j)}} \psi = \varepsilon_a \llbracket_{g_{iab}} g_{ijac} (\sigma \circ j\pi(e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi)$$

(46)

$$= \varepsilon_b \int \varepsilon_a g_{ijab} \varepsilon_b g_{ijac} (\sigma \circ j_{\pi}) (e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi$$

$$= \varepsilon_b \int g_{ij}^{-1}{}^{ba} g_{ijac} (\sigma \circ j_{\pi}) (e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi$$

$$= \varepsilon_b (\sigma \circ j_{\pi}) (e_b^{(i)}) \triangleright \nabla_{e_c^{(i)}} \psi \quad \square$$

OPERATOR TEN ODGRYWA FUNDAMENTALNĄ ROLĘ W MODELOWANIU DYNAMIKI PÓŁ FERMIONOWYCH, ALE TEŻ NIEBIE INFORMACJĘ O STRUKTURZE METRYCZNEJ NA M I JAKO TAKI OKREŚLA FUNKT WYJŚCIA DO DALSZEGO IDŁOŻYKA UŁOŻENIÓW GEOMETRII SPINOWEJ ROZWAŻANYCH PRZEZ CONNESA...
ERGO

C_{EC1} (N') EST (PAS) LA FIN.