PRYNCYPIALNOŚĆ – CNOTA FAJNA I UŻYTECZNA
(MAWF '25/26 2.III [RRS])

FIG. 1. *Sua Tremendità* (Jego Fajność) Giorgio I, z wykształcenia i pasji hodowca kwiatów, z urzędu i fantazji princeps *Principato di Seborga*, kraju uznawanego (wedle samych 297 Seborgan) przez Burkinę Faso i kwitnącego w cieniu pragmatycznego *motto*: *Sub umbra sedi!* (Siedź w cieniu!).

Spis treści

Na ostatnim wykładzie zetknęliśmy się z konstrukcją wiązki włóknistej kanonicznie stowarzyszonej z dowolną rozmaitością klasy C^1, jaką jest wiązka styczna nad tą rozmaitością. Wiązka ta okazała się być wyposażoną w naturalną i intuicyjnie antycypowaną strukturę liniową we włóknie, z której wyabstrahowaliśmy pojęcie wiązki wektorowej, czyli geometryzacji algebraicznej struktury przestrzeni wektorowej. Kanoniczność konstrukcji wiązki wektorowej stycznej (tj. brak jakichkolwiek obstrukcji topologicznych dla jej realizacji) dowodzi naturalności tego pojęcia w kategorii rozmaitości różniczkowalnych. Obecnie podążymy dalej tropem konstrukcji kanonicznych wprost ku celowi naszych dociekań, jaki stanowią wiązki stowarzyszone Clifforda i spinorowe. Rozważymy zatem kolejny przykład kanonicznej geometryzacji prostej struktury algebraicznej, aby następnie wyabstrahować z naszych rozważań definicję nowej klasy wiązek włóknistych.

1. Wstęp

Jedną z naturalnych konstrukcji na przestrzeni wektorowej jest wybór bazy $\{e_i\}_{i\in\overline{1,D}}$, $D = \dim_{\mathbb{K}} V$, tj. wybór izomorfizmu

$$\mathbb{K}^{\times D} \xrightarrow{\cong} V \ : \ (v^1, v^2, \ldots, v^D) \longmapsto v^i \triangleright e_i \, .$$

Konstrukcja ta ma swój nader istotny odpowiednik w teorii wiązek wektorowych, który teraz omówimy.

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times r}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $r \in \mathbb{N}^{\times}$, o trywializacjach lokalnych $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times r}$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B. **Wiązka reperów** (zwana też **wiązką baz**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$ to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}\big)$$

o składowych

- przestrzeń totalna

$$\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \coloneqq \bigsqcup_{x \in B} \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x\big)$$

  o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ indukowanej przez trywializacje $\{\tau_i\}_{i \in I}$ i o włóknie $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V})_x \equiv \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x)$ nad dowolnym punktem $x \in B$ będącym zbiorem baz $\beta_x : \mathbb{K}^{\times r} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ włókna $\mathbb{V}_x$;
- włókno typowe $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \equiv \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r})$;
- rzut na bazę $\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} : \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \longrightarrow B : (\beta_x, x) \longmapsto x$.

Przy tym bijekcje

$$\mathsf{F}\tau_i : \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) : (\beta_x, x) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \circ \beta_x\big),$$

indukują na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ (gdzie topologia na $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ to topologia podprzestrzeni topologicznej przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(r) \cong \mathbb{K}^{\times r^2}$), tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{U} \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i \in I} : \mathsf{F}\tau_i\big(\mathcal{U} \cap \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\big) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K})\big).$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i$ są homeomorficznymi trywializacjami lokalnymi o odwzorowaniach przejścia klasy C^∞:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, g_{ij}(\cdot)\big) \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})\big) \\ &: \quad x \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, g_{ij}(x)\big), \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, g_{ij}(x)\big) : \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \circlearrowleft : \chi \longmapsto g_{ij}(x) \circ \chi.$$

Struktura rozmaitości różniczkowej klasy C^∞ jest indukowana wzdłuż homeomorfizmów $\mathsf{F}\tau_i$ ze struktury produktowej na lokalnym modelu $\mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$, trywialnej (klasy C^∞) w drugim czynniku i wyznaczanej przez przecięcie z atlasem $\widehat{\mathscr{A}_B}$ na rozmaitości B w czynniku pierwszym. Względem tak określonej struktury różniczkowalnej trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$ są tautologicznie gładkie klasy C^∞, podobnie jak rzut kanoniczny na bazę, $\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}} \equiv \mathrm{pr}_1 \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}$.

Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. W pierwszej kolejności odnotujmy istnienie naturalnego prawego działania – włókno po włóknie – grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ na przestrzeni totalnej $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ danego w postaci

$$r : \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \times \mathrm{GL}(r;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} : \big((\beta_x, x), \chi\big) \longmapsto (\beta_x \circ \chi, x) \equiv (\beta_x, x) \triangleleft \chi.$$

Działanie to jest w jawny sposób wolne (wobec odwracalności elementów włókna $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x)$), a nadto przechodnie nad dowolnym punktem $x \in B$ – wszak dla dowolnej pary $\beta_{x\,1}, \beta_{x\,2} \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x\big)$ spełniona jest tożsamość

$$\beta_{x\,2} \equiv \beta_{x\,1} \circ \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

a ponieważ $\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r})$ jest odwzorowaniem o odwrotności $\beta_{x\,2}^{-1} \circ \beta_{x\,1}$, przeto możemy zapisać

$$(\beta_{x\,2}, x) = (\beta_{x\,1}, x) \triangleleft \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big),$$

konstatując przy tym, że $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r},\mathbb{V}_x)$ jest torsorem grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$. Wybór dowolnego elementu $\beta_{x\,*}\in\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r},\mathbb{V}_x)$ zadaje *niekanoniczny* ($\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$-ekwiwariantny) izomorfizm

$$\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times r},\mathbb{V}_x\big)\xrightarrow{\cong}\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})\ :\ \beta_x\longmapsto\beta_{x\,*}^{-1}\circ\beta_x\,.$$

Wobec powyższego bez trudu stwierdzamy, że odwzorowania

$$\mathsf{F}\tau_i^{-1}\ :\ \mathcal{O}_i\times\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})\xrightarrow{\cong}\pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)\ :\ (x,\chi)\longmapsto\big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big)$$

są bijektywne, oto bowiem przyporządkowują w sposób jawnie injektywny elementom zbioru $\{x\}\times\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$, $x\in\mathcal{O}_i$ elementy zbioru $\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r},\mathbb{V}_x)\times\{x\}$. Są więc odwracalne i bez trudu przekonujemy się, że ich odwrotnościami są $\mathsf{F}\tau_i$. To pozwala użyć tych ostatnich do zaindukowania topologii na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ według opisanego schematu. Ich identyfikacja jako trywializacji lokalnych zasadza się na bezpośrednim rachunku:

$$\mathsf{F}\tau_i\circ\mathsf{F}\tau_j^{-1}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\times\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})\ \circlearrowleft\ :\ (x,\chi)\longmapsto\big(x,\mathrm{pr}_2\circ\tau_i\circ\tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big)\big)=\big(x,g_{ij}(x)\circ\chi(\cdot)\big)\,,$$

w którym $g_{ij}\in C^\infty(\mathcal{O}_{ij},\mathrm{GL}(r;\mathbb{K}))$ są odwzorowaniami przejścia wiązki $\mathbb{V}$, a który ukazuje gładki charakter odwzorowań $\mathsf{F}\tau_i\circ\mathsf{F}\tau_j^{-1}$.

Na koniec zauważmy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ (więc także trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$) są ekwiwariantne względem prawostronnego działania grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$: regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim ich dziedziny (patrz: Przykł .2 (1)) oraz opisanego powyżej r na przeciwdziedzinie. Istotnie, obliczamy wprost – dla dowolnego elementu $\gamma\in\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ –

$$\begin{aligned}\mathsf{F}\tau_i^{-1}\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i}\times\wp_\gamma)(x,\chi)\ &=\ \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi\circ\gamma)=\big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi\circ\gamma(\cdot)\big),x\big)\equiv\big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big)\circ\gamma(\cdot),x\big)\\&\equiv\ \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big)\triangleleft\gamma\equiv r_\gamma\circ\mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi)\,.\end{aligned}$$

Trywializacje lokalne są zatem zgodne z zaobserwowaną wcześniej strukturą torsora grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ na włóknie wiązki reperów. Odnotujmy też na marginesie strukturę algebraiczną odwzorowań przejścia:

$$\mathsf{F}\tau_i\circ\mathsf{F}\tau_j^{-1}(x,\chi)\equiv\big(x,\ell_{g_{ij}(x)}(\chi)\big)\,,$$

gdzie ℓ jest lewym działaniem regularnym grupy $\mathrm{GL}(r;\mathbb{K})$ na sobie (patrz: Przykł. 2 (1)), komutującym z $\wp$.

Abstrakcja pojęcia wiązki głównej z powyższej konstrukcji kanonicznej wymaga[1] mariażu algebraicznej struktury grupy i struktury topologicznej oraz różniczkowej, który opisuje

Definicja 2. Grupa topologiczna to grupa

$$\big(\mathrm{G},m\equiv\cdot,\mathrm{Inv}\equiv(\cdot)^{-1},\bullet\longmapsto e\big)\,,$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G},m,\mathrm{Inv},\bullet\longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}},\mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}},\bullet\longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1,m_1,\mathrm{Inv}_1,\bullet_1\longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2,m_2,\mathrm{Inv}_2, \bullet_2\longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Grupa Liego to grupa

$$\big(\mathrm{G},m\equiv\cdot,\mathrm{Inv}\equiv(\cdot)^{-1},\bullet\longmapsto e\big)\,,$$

której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G},m,\mathrm{Inv},\bullet\longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H},m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}},\mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}},\bullet\longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Bogatym źródłem przykładów grup Liego jest poniższe twierdzenie, które podajemy bez dowodu (dowód jest prezentowany na kursie Teorii Grup II).

[1] W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w rozmaitych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto wprowadzić pojemniejsze pojęcie grupy i jej działania w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

Twierdzenie 1 (Cartana o podgrupie domkniętej)**.** Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

Przykłady 1.
(1) dowolna $V \in \mathrm{Obj}\,\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{(<\infty)}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ jest przemienną grupą Liego z $(m, \mathrm{Inv}, e) = (+_V, \mathsf{P}_V, \mathbf{0}_V)$;
(2) dla V z poprzedniego przykładu $\mathrm{GL}(V;\mathbb{K}) = \{\ \chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \quad | \quad \exists\ \chi^{-1}\ \}$ jako otwarty podzbiór przestrzeni wektorowej $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ jest grupą Liego (z superpozycją endomorfizmów jako mnożeniem) zwaną **grupą główną liniową** V – jest ona izomorficzna z **grupą główną liniową** $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathbb{K}(n) \quad | \quad \det_{(n)} A \neq 0\ \}$ dziedziczącą topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}(n) \equiv \mathbb{K}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{K}^\times)$ (wszak $\det_{(n)} \ :\ \mathbb{K}(n) \longrightarrow \mathbb{K}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym);
(3) wszechobecne w fizyce „małe" grupy Liego $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ i $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ oraz **grupa Poincarégo** $\mathrm{ISO}(3,1) = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SO}(3,1)$ o topologii będącej pochodną (złożonej) topologii **grupy Lorentza** $\mathrm{SO}(3,1) = \{\ L \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R}) \quad | \quad L^{\mathrm{T}}\cdot\eta\cdot L = \eta\ \}$ odwzorowań zachowujących metrykę Minkowskiego $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ (ich naturalne działanie na $\mathbb{R}^4$ określa iloczyn półprosty w definicji $\mathrm{ISO}(3,1)$);
(4) **grupa specjalna liniowa** $\mathrm{SL}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \quad | \quad \det_{(n)} A = 1\ \}$;
(5) **grupa ortogonalna** $\mathrm{O}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \quad | \quad A^{\mathrm{T}} \cdot A = \mathbf{1}_n\ \}$;
(6) **grupa specjalna ortogonalna** $\mathrm{SO}(n;\mathbb{K}) = \mathrm{O}(n;\mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{K})$;
(7) **grupa unitarna** $\mathrm{U}(n) = \{\ A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) \quad | \quad A^\dagger \cdot A = \mathbf{1}_n\ \}$;
(8) **grupa specjalna unitarna** $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$;
(9) **grupa symplektyczna** $\mathrm{Sp}(n;\mathbb{K}) = \{\ A \in \mathrm{SL}(2n;\mathbb{K}) \quad | \quad A^{\mathrm{T}} \cdot J_n \cdot A = J_n\ \}$ odwzorowań zachowujących „strukturę symplektyczną"
$$J_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Uzgodninie struktury różniczkowej i algebraicznej na zbiorze G ma daleko idące konsekwencje, których szczegółowe studium jest przedmiotem odrębnego kursu (Teoria Grup II – zapraszam w tym semestrze!) i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w kontekście konstrukcji powiązania na wiązkach głównych. Tymczasem jednak przejdziemy bezpośrednio do dyskusji zagadnień związanych z działaniem grup Liego na rozmaitościach różniczkowalnych, które odgrywają kluczową rolę w konstrukcji wiązek stowarzyszonych (takich jak wiązki Clifforda i spinorowe właśnie). Zaczniemy, jak zazwyczaj, od pojęcia podstawowego.

Definicja 3. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą[2] i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej[3]. Homomorfizm grup
$$\lambda_\cdot\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X)\ :\ g \longmapsto \lambda_g$$
określamy mianem **działania lewostronnego grupy** G **na zbiorze** X, na którym jest określone działanie grupy G, a który nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy** G. Antyhomomorfizm
$$\varrho_\cdot\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X)\ :\ g \longmapsto \rho_g$$
nazywamy **działaniem prawostronnym grupy** G **na zbiorze** X, a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy** G. Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako
$$\lambda\ :\ \mathrm{G} \times X \longrightarrow X\ :\ (g,x) \longmapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g,x)\,,$$
a podgrupy $\varrho_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako
$$\varrho\ :\ X \times \mathrm{G} \longrightarrow X\ :\ (x,g) \longmapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x,g)\,.$$

[2]Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.
[3]Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

Niechaj $X_A,\ A \in \{1,2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem lewostronnie** G**-ekwiwariantnym**, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times X_1 \arrow[r, "\lambda^1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times f"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{G} \times X_2 \arrow[r, "\lambda^2"'] & X_2 \end{tikzcd} .$$

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych $\varrho^A,\ A \in \{1,2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^1"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie** G**-ekwiwariantnym**.

Parę $((X, \mathscr{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy** G (albo G**-przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo G**-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G. Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) topologicznie G**-ekwiwariantnego**.

Parę $((M, \widehat{\mathscr{A}}), \lambda)$ złożoną z rozmaitości różniczkowalnej $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ oraz działania lewostronnego grupy Liego G na M nazywamy **rozmaitością z działaniem gładkim lewostronnym grupy** G (albo G**-rozmaitością gładką lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem gładkim klasy C^∞. Analogicznie definiujemy **rozmaitość z działaniem gładkim prawostronnym** (albo G**-rozmaitość gładką prawostronną**) G. Gładkie odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne klasy C^∞ między rozmaitościami z działaniem gładkim lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) **gładko** G**-ekwiwariantnego**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami $M_A,\ A \in \{1,2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1, M_2)\,.$$

Przykłady 2.

(1) Kanonicznym przykładem G-przestrzeni jest sama grupa Liego G, przy czym jako działanie gładkie możemy wybrać dowolne złożenie dwóch działań elementarnych: **lewego działania regularnego**

$$\ell\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (h,g) \longmapsto m(h,g) \equiv \ell_h(g)$$

i **prawego działania regularnego**

$$\wp\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (g,h) \longmapsto m(g,h) \equiv \wp_h(g)\,,$$

e.g., **działanie dołączone**

$$\mathrm{Ad}\ :\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (h,g) \longmapsto h \cdot g \cdot h^{-1} \equiv \ell_h \circ \wp_{h^{-1}}(g) \equiv \mathrm{Ad}_h(g)\,.$$

Tak przygotowani formalnie, możemy już przejść do stosownej abstrakcji struktury z Def. 1.

2. Wiązki główne z grupą strukturalną

Powyższa rekapitulacja rudymentarnych pojęć teorii grup Liego i G-przestrzeni[4] daje nam do ręki intuicje i narzędzia formalne nieodzowne do sprawnego i konstruktywnego poruszania się w środowisku struktur geometrycznych kluczowych dla geometryzacji modułów spinorowych, a także – dla modelowania symetrii lokalnych (a ściślej: ulokalnionych symetrii globalnych) w mechanice klasycznej i teorii pola. Wracamy teraz do ich szczegółowej dyskusji.

Definicja 4. Niechaj G będzie grupą Liego. **Wiązka główna** o **grupie strukturalnej** G to wiązka włóknista

$$(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna P_{G} z wolnym działaniem prawostronnym $r.$ grupy strukturalnej G, które jest przechodnie we włóknie nad (dowolnym) punktem bazy, co opisuje diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & B \end{tikzcd} ;$$

- lokalne trywializacje

(1) $$\tau_i \ : \ \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \,, \quad i \in I$$

stowarzyszone z pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B i G-ekwiwariantne względem działań prawostronnych: r na dziedzinie oraz regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim przeciwdziedziny,

$$\widetilde{\wp}^i \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp \ : \ (\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ : \ \big((x, g), h\big) \longmapsto (x, g \cdot h) \,,$$

tj. spełniające warunki

$$\tau_i \circ r_g = \widetilde{\wp}^i_g \circ \tau_i \,, \qquad i \in I \,.$$

Podwiązka główna o grupie strukturalnej H wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to podwiązka $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \restriction_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}})$ tejże wiązki (włóknistej) o grupie strukturalnej będącej podgrupą Liego $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$.

Morfizm wiązek głównych $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}, B_\alpha, \mathrm{G}_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ o działaniach odnośnych grup strukturalnych r^α to trójka (Φ, f, φ) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) \ : \ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}, B_1, \mathrm{G}_1, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}) \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}, B_2, \mathrm{G}_2, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}})$$

oraz homomorfizmu grup topologicznych (wzgl. Liego) pozostających w relacji wyrażanej przez diagram przemienny

(2) $$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \times \mathrm{G}_1 \arrow[r, "r^1"] \arrow[d, "\Phi \times \varphi"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}"] \arrow[d, "\Phi"] & B_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \times \mathrm{G}_2 \arrow[r, "r^2"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}}"'] & B_2 \end{tikzcd} .$$

Przykłady 3.

(1) Trywialna wiązka główna nad B o grupie strukturalnej G, czyli

$$(B \times \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \mathrm{pr}_1) \,.$$

[4] Więcej o nich można dowiedzieć się z mojego wykładu krypto-monograficznego „Teoria grup II". Uzupełnienie nader istotne z punktu widzenia naszych przyszłych dociekań przyniesie także następny wykład.

(2) Wiązka reperów wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ modelowanej na $\mathbb{K}^{\times r}$, czyli

$$\big(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}, B, {\rm GL}(r;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}\big)\,,$$

w szczególności zaś – **wiązka reperów nad rozmaitością** (albo **wiązka baz nad rozmaitością**) M wymiaru n, czyli

$$\big(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathsf{T}M, M, {\rm GL}(\mathsf{T}M) \cong {\rm GL}(n;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathsf{T}M}\big)\,.$$

(3) **Rozwłóknienie Hopfa** (jeszcze raz, tym razem jako...)

$$\big({\rm SU}(2) \equiv \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, {\rm U}(1), \pi_{{\rm SU}(2)/{\rm U}(1)}\big)\,,$$

w którym rzut na bazę przyjmuje postać

$$\pi_{{\rm SU}(2)/{\rm U}(1)}\ :\ {\rm SU}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^{\times 3} \cong \mathbb{C}\times\mathbb{R}\ :\ m(z_1,z_2) \equiv \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \longmapsto \big(2z_1\cdot\overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2\big)\,,$$

a działanie definiujące grupy strukturalnej ${\rm U}(1)$ jest dane wzorem

$$\begin{aligned} r_\cdot\ &:\ {\rm SU}(2)\times{\rm U}(1) \longrightarrow {\rm SU}(2) \\ &:\ \left(\begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}, u\right) \longmapsto \begin{pmatrix} z_1\cdot u & -\overline{z}_2\cdot u^{-1} \\ z_2\cdot u & \overline{z}_1\cdot u^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}\,, \end{aligned}$$

w którego ostatniej części ${\rm U}(1)$ traktujemy jako podgrupę Liego macierzowej grupy Liego ${\rm SU}(2)$. Istotnie, zachowywanie włókna $\pi_{{\rm SU}(2)/{\rm U}(1)}$ przez swobodne działanie $r_\cdot$ jest oczywiste, a i przechodniość $r_\cdot$ we włóknie łatwo widać: Niechaj dla dwóch macierzy $m(z_1,z_2)$ i $m(\zeta_1,\zeta_2)$ z ${\rm SU}(2)$ zachodzi równość

$$\big(2z_1\cdot\overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2\big) = \big(2\zeta_1\cdot\overline{\zeta}_2, |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2\big)\,,$$

a wówczas – wobec równości $|z_1|^2+|z_2|^2 = 1 = |\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2$ – stwierdzamy

$$|\zeta_a| = |z_a|\,,\qquad a\in\{1,2\}\,.$$

Rzecz jasna, nie może zachodzić $(z_1,z_2) = (0,0)$, rozważmy wszakże najsampierw szczególny przypadek: $z_1 = 0$, więc i $\zeta_1 = 0$, w którym równość $2z_1\cdot\overline{z}_2 = 2\zeta_1\cdot\overline{\zeta}_2$ jest spełniona automatycznie. Mamy ponadto $(1 =)|\zeta_2| = |z_2|$, co implikuje istnienie $u\in{\rm U}(1)$ spełniającego równość $z_2\cdot u = \zeta_2$, z której dalej wynika

$$m(\zeta_1 = 0,\zeta_2) = r_u\big(m(z_1 = 0, z_2)\big)\,.$$

Analogiczne rozumowanie prowadzi do równości

$$m(\zeta_1,\zeta_2 = 0) = r_{\overline{u}}\big(m(z_1, z_2 = 0)\big)\,.$$

Wreszcie też gdy $z_1,z_2 \neq 0$, jest też $\zeta_1,\zeta_2\neq 0$, a wówczas $z_a = r_a\cdot u_a$ oraz $\zeta_a = \rho_a\cdot \upsilon_a$ dla pewnych liczb $r_a,\rho_a \in]0,\infty[$, $u_a,\upsilon_a\in{\rm U}(1)$, przy czym $r_a = \rho_a$, $a\in\{1,2\}$ Z równości $2z_1\cdot\overline{z}_2 = 2\zeta_1\cdot\overline{\zeta}_2$ wywodzimy teraz tożsamość

$$\upsilon_2\cdot u_2^{-1} = \upsilon_1\cdot u_1^{-1} =: u\,,$$

która pozwala zapisać

$$\zeta_a = \rho_a\cdot\upsilon_a = \big(r_a\cdot u_a\big)\cdot\big(\upsilon_a\cdot u_a^{-1}\big) \equiv z_a\cdot u\,,$$

więc też

$$m(\zeta_1,\zeta_2) = r_u\big(m(z_1,z_2)\big)\,.$$

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 4. Odwzorowania przejścia w wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\rm G}, B, {\rm G}, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}})$ o trywializacjach lokalnych (1) przyjmują postać

$$\tau_i\circ\tau_j^{-1}(x,g) = \big(x, \ell_{g_{ij}(x)}(g)\big)\,,$$

gdzie $g_{ij}\ :\ O_{ij}\to{\rm G}$, $i,j\in I$ jest pewnym gładkim 1-kocyklem, ℓ zaś jest lewym działaniem regularnym z Przykł. 2 (1).

<u>*Dowód:*</u> Wprost z konstrukcji zachodzi równość

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x,g) = \big(x, \gamma_{ij}(x,g)\big)\,,$$

w której zapisie $\gamma_{ij}(x,\cdot)$ jest G-*ekwiwariantnym* dyfeomorfizmem G nad każdym punktem $x \in O_{ij}$ bazy, od którego zależy gładko. Owa G-ekwiwariantność implikuje równość

$$\gamma_{ij}(x,g) \equiv \gamma_{ij}\big(x, r_g(e)\big) = r_g\big(\gamma_{ij}(x,e)\big) \equiv \gamma_{ij}(x,e)\cdot g \equiv \ell_{\gamma_{ij}(x,e)}(g)\,,$$

pozwala zatem zdefiniować gładkie odwzorowanie $g_{ij} \coloneqq \gamma_{ij}(e,\cdot)\ :\ O_{ij} \to \mathrm{G}$. □

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj

$$\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \coloneqq \{\ (p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \quad | \quad \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)\ \}$$

będzie produktem włóknistym. **Odwzorowanie ilorazowe** na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to odwzorowanie

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

określone przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)\,.$$

Uwaga 1. O postulowanej gładkości odwzorowania ilorazowego najłatwiej jest przekonać się przy użyciu trywializacji lokalnych. Istotnie, niechaj $p_1, p_2 \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$, $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$, przy czym $p_\alpha = \tau_i^{-1}(x, g_\alpha)$, $\alpha \in \{1,2\}$ dla pewnych elementów $g_\alpha \in \mathrm{G}$, a wtedy wobec równości

$$p_2 = \tau_i^{-1}(x,g_2) \equiv \tau_i^{-1}\big(x, g_1 \cdot \big(g_1^{-1}\cdot g_2\big)\big) = \tau_i^{-1}(x,g_1) \triangleleft \big(g_1^{-1}\cdot g_2\big) \equiv p_1 \triangleleft \big(g_1^{-1}\cdot g_2\big)$$

otrzymujemy reprezentację lokalną odwzorowania ilorazowego:

$$\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2) \equiv g_1^{-1}\cdot g_2 = \mathrm{m}\big(\mathrm{Inv}\circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_1), \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_2)\big)\,,$$

daną w postaci superpozycji odwzorowań gładkich (m jest operacją binarną w G), więc gładką.

Podstawowe własności strukturalne odwzorowania ilorazowego, z których przyjdzie nam korzystać niebawem, opisuje

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 5. Odwzorowanie ilorazowe spełnia warunki wyrażone przez następujące diagramy przemienne:

(DM1) skośna symetria

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Inv}"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd}\,,$$

gdzie $\tau_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ \circlearrowleft\ :\ (p_1,p_2) \longmapsto (p_2,p_1)$ jest (obciętą do produktu włóknistego) transpozycją kanoniczną, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)^{-1}\,;$$

(DM2) warunek 1-kocyklu (z którego wynika (DM1))

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ \mathrm{pr}_{1,2}, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ \mathrm{pr}_{2,3})"] \arrow[dr, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ \mathrm{pr}_{1,3}"'] & \mathrm{G}\times\mathrm{G} \arrow[d, "M"] \\ & \mathrm{G} \end{tikzcd}\,,$$

gdzie $\mathrm{pr}_{i,j} \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \;:\; (p_1, p_2, p_3) \longmapsto (p_i, p_j)$, $(i,j) \in \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ jest (obciętym do produktu włóknistego) rzutem kanonicznym, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2,p_3)\in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \;:\; \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_3) \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_3)^{-1} \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2) = e\,;$$

(DM3) G-ekwiwariantność

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathrm{G} \arrow[l, "(r\circ \mathrm{pr}_{1,3}{,}\mathrm{pr}_2)"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\times r"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\
\mathrm{G} & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "\ell\circ(\mathrm{Inv}\times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})\circ\tau_{\mathrm{G},\mathrm{G}}"] \arrow[r, "\wp"'] & \mathrm{G}
\end{tikzcd} ,$$

czyli

$$\forall_{(p_1,p_2)\in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ g_1,g_2\in \mathrm{G}} \;:\; \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1 \triangleleft g_1, p_2 \triangleleft g_2) = g_1^{-1} \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2) \cdot g_2\,.$$

Dowód: Oczywisty. □

Nie zawsze mamy do czynienia z pełnym „pakietem" obiektów wymienionych w definicji wiązki głównej. Warto zatem zastanowić się, które z jej elementów mają naturę *konstytutywną*, tj. determinują istnienie struktury wiązki głównej na rozmaitości. Odpowiedzi na tak postawione pytanie przynosi

Stwierdzenie 3. Niechaj P, B będą rozmaitościami i niech G będzie grupą Liego. Zakładamy też, że jest określona surjektywna submersja $\pi \;:\; \mathsf{P} \longrightarrow B$ oraz gładkie działanie prawostronne $r_\cdot \;:\; \mathsf{P} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}$ grupy G na P. Jeśli działanie $r_\cdot$ jest swobodne, jego orbity pokrywają się z poziomicami π, a odwzorowanie $\phi_{\mathsf{P}} \;:\; \mathsf{P} \times_B \mathsf{P} \longrightarrow \mathrm{G}$ określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2)\in \mathsf{P}\times_B \mathsf{P}} \;:\; p_2 = r_{\phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)}(p_1)$$

jest gładkie, to wówczas czwórka

$$(\mathsf{P}, B, \mathrm{G}, \pi)$$

jest wiązką główną.

Dowód: Na podstawie Tw. II.1-2.1 o istnieniu cięć lokalnych surjektywnej submersji stwierdzamy istnienie pokrycia otwartego $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ rozmaitości B, na którego elementach określone są gładkie cięcia lokalne $\sigma_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}$ submersji π, możemy zatem zdefiniować jawnie gładkie odwzorowania

$$\tau_i^{-1} \;:\; \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \;:\; (x,g) \longmapsto r_g\big(\sigma_i(x)\big)\,.$$

Wykorzystując odwzorowanie ϕ_{P}, bez trudu znajdujemy ich (gładkie) odwrotności:

$$\tau_i \;:\; \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \;:\; p \longmapsto \big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big)\,.$$

Są one dobrze określone, gdyż

$$\pi\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) = (\pi \circ \sigma_i) \circ \pi(p) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \circ \pi(p) = \pi(p)\,,$$

i – istotnie – spełniają postulowane tożsamości:

$$\tau_i^{-1} \circ \tau_i(p) \;=\; \tau_i^{-1}\big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big) = r_{\phi_{\mathsf{P}}(\sigma_i\circ\pi(p),p)}\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) \equiv p\,,$$

$$\begin{aligned}
\tau_i \circ \tau_i^{-1}(x,g) \;&=\; \tau_i\big(r_g\big(\sigma_i(x)\big)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) \\
&=\; \big(\pi \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) = \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) = (x,g)\,,
\end{aligned}$$

z których druga wynika stąd, że działanie G odwzorowuje poziomicę π w siebie, a do tego nieuchronnie

$$\forall_{(p_1,p_2,g)\in\mathsf{P}^{\times 2}\times\mathrm{G}}\ :\ \phi_{\mathsf{P}}\big(p_1,r_g(p_2)\big)=\phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)\cdot g\,.$$

Są one także stosownie G-ekwiwariantne, oto bowiem[5]

$$\tau_i^{-1}\big((x,g)\triangleleft h\big)\equiv\tau_i^{-1}(x,g\cdot h)=r_{g\cdot h}\big(\sigma_i(x)\big)=r_h\circ r_g\big(\sigma_i(x)\big)=r_h\big(r_g\circ\sigma_i(x)\big)\equiv r_h\circ\tau_i^{-1}(x,g)\,.$$

Skonstruowane powyżej trywializacje lokalne spełniają w punktach $x\in\mathcal{O}_{ij},\ i,j\in I$ warunki

$$\begin{aligned}\tau_i\circ\tau_j^{-1}(x,g) &= \tau_i\big(r_g\circ\sigma_j(x)\big)=\big(\pi\circ r_g\circ\sigma_j(x),\phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i\circ\pi\circ r_g\circ\sigma_j(x),r_g\circ\sigma_j(x)\big)\big)\\ &= \big(x,\phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x),r_g\circ\sigma_j(x)\big)\big)=\big(x,\phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x),\sigma_j(x)\big)\cdot g\big)\,,\end{aligned}$$

z których odczytujemy postać odwzorowań przejścia:

$$g_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow\mathrm{G}\ :\ x\longmapsto\phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x),\sigma_j(x)\big)\,,$$

zamykając tym samym procedurę identyfikacji postulowanej struktury wiązki głównej o grupie strukturalnej G. □

W następnej kolejności przedstawimy wygodne kryterium trywializowalności wiązki głównej.

Stwierdzenie 4. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi klasy C^∞ wiązki głównej i jej trywializacjami lokalnymi. W szczególności wiązka główna jest globalnie trywializowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ma globalne cięcie.

Dowód: Cięciu lokalnemu $\sigma\ :\ \mathcal{O}\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\subset\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ \mathcal{O}\in\mathscr{T}(B)$ przyporządkowujemy trywializację (lokalną)

$$\tau_\sigma\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\longrightarrow\mathcal{O}\times\mathrm{G}\ :\ p\longmapsto\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\big)\big)$$

o pożądanych własnościach, a więc odwracalną,

$$\tau_\sigma^{-1}\ :\ \mathcal{O}\times\mathrm{G}\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\ :\ (x,g)\longmapsto\sigma(x)\triangleleft g\,,$$

i G-ekwiwariantną,

$$\begin{aligned}\tau_\sigma(p\triangleleft g) &\equiv \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g),p\triangleleft g\big)\big)=\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\triangleleft g\big)\big)\\ &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\big)\cdot g\big)=\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p),p\big)\big)\triangleleft g\equiv\tau_\sigma(p)\triangleleft g\,.\end{aligned}$$

I odwrotnie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}\times\mathrm{G}$ przypisujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau\ :\ \mathcal{O}\longrightarrow\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O})\ :\ x\longmapsto\tau^{-1}(x,e)\,.$$

Powyższe przyporządkowania są przy tym wzajem odwrotne. Istotnie, z jednej strony zachodzi

$$\forall_{x\in\mathcal{O}}\ :\ \sigma_{\tau_\sigma}(x)=\tau_\sigma^{-1}(x,e)=\sigma(x)\triangleleft e=\sigma(x)\,.$$

Z drugiej strony, ilekroć $p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ jest w dziedzinie τ_{σ_τ}, jest również w dziedzinie τ, można go zatem przedstawić w postaci $p=\tau^{-1}(x,g)$, a wtedy

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma_\tau}(p) &\equiv \tau_{\sigma_\tau}\big(\tau^{-1}(x,g)\big)=\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}(x,g)\big),\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}(x,g)\big),\tau^{-1}(x,g)\big)\big)\\ &= \big(x,\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma_\tau(x),\tau^{-1}(x,g)\big)\big)=\big(x,\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}(x,e),\tau^{-1}(x,e)\triangleleft g\big)\big)=(x,g)\equiv\tau(p)\,.\end{aligned}$$

□

[5] Odwrotność G-ekwiwariantnej bijekcji jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym.

Uwaga 2. Należy podkreślić, że ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia nie stosuje się do wiązek włóknistych w ogólności. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że każda wiązka wektorowa ma globalne cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ (a nie każda taka wiązka jest globalnie trywializowalna – patrz, np., wiązka styczna nad nieuczesaną $\mathbb{S}^2$).

Na zakończenie naszego trawersu przez elementarz teorii wiązek głównych zajmiemy się wyznaczeniem wygodnego opisu lokalnego morfizmów wiązek głównych pokrywających dyfeomorfizm identycznościowy na bazie (pośród których z czasem rozpoznamy tzw. „transformacje symetrii cechowania").

Twierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 4. Dowolny morfizm $(\Phi, \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ wiązek głównych $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau^\alpha_i \ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij} \ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$), opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd} ,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i \ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}\,, \quad i \in I$$

o własności

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_{ij}} \ :\ g^2_{ij}(x) = h_i(x)\cdot g^1_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1}\,. \tag{3}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

Dowód: Rozumując analogicznie jak w dowodzie Tw. II.1-2.4, upewniamy się, że odwzorowanie Φ jest jednoznacznie zadane przez wartości przyjmowane przez nie na lokalnie płaskich cięciach $\sigma^1_i \equiv \sigma_{\tau^1_i}$, $i \in I$ stowarzyszonych z lokalnymi trywializacjami swej dziedziny. Istotnie, dowolny punkt z włókna $\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}\,x}$ możemy wobec założonej G-ekwiwariantności trywializacji zapisać w postaci

$$\tau^{1\,-1}_i(x,g) = \sigma^1_i(x) \triangleleft g\,,$$

a zatem wobec G-ekwiwariantności Φ zachodzi

$$\Phi\big(\tau^{1\,-1}_i(x,g)\big) = \Phi\big(\sigma^1_i(x)\triangleleft g\big) = \Phi\big(\sigma^1_i(x)\big)\triangleleft g\,.$$

Definiujemy jawnie gładkie odwzorowania

$$h_i \coloneqq \mathrm{pr}_2\circ\tau^2_i\circ\Phi\circ\sigma^1_i \ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$$

i sprawdzamy: z jednej strony

$$\tau^{2\,-1}_j\big(x, h_j(x)\big) = \tau^{2\,-1}_i\big(x, g^2_{ij}(x)\cdot h_j(x)\big)\,,$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} \tau^{2\,-1}_j\big(x,h_j(x)\big) &= \Phi\circ\sigma^1_j(x) \equiv \Phi\big(\tau^{1\,-1}_j(x,e)\big) = \Phi\big(\tau^{1\,-1}_i\big(x, g^1_{ij}(x)\big)\big) = \Phi\big(\tau^{1\,-1}_i(x,e)\big)\triangleleft g^1_{ij}(x) \\ &\equiv \Phi\circ\sigma^1_i(x)\triangleleft g^1_{ij}(x) = \tau^{2\,-1}_j\big(x,h_i(x)\big)\triangleleft g^1_{ij}(x) = \tau^{2\,-1}_j\big(x, h_i(x)\cdot g^1_{ij}(x)\big)\,, \end{aligned}$$

co w sumie odtwarza postulowaną relację w konsekwencji bijektywności trywializacji lokalnych.

Niechaj teraz $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami głównymi o trywializacjach lokalnych $\tau^\alpha_i \ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ i odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij} \ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$. Mając dowolną rodzinę odwzorowań $h_i \ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$ opisanych w tezie dowodzonego twierdzenia, definiujemy nad elementami pokrycia współtrywializującego odwzorowania lokalnie gładkie

$$\Phi_i \ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \ :\ \tau^{1\,-1}_i(x,g) \longmapsto \tau^{2\,-1}_i\big(x, h_i(x)\cdot g\big)\,,$$

dla których liczymy – w dowolnym punkcie $(x,g) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{G}$ –

$$\begin{aligned}\Phi_j\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big) &= \Phi_j\big(\tau_j^{1\,-1}\big(x, g_{ji}^1(x)\cdot g\big)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)\cdot g_{ji}^1(x)\cdot g\big) \\ &= \tau_i^{2\,-1}\big(x, g_{ij}^2(x)\cdot h_j(x)\cdot g_{ji}^1(x)\cdot g\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)\cdot g\big) \equiv \Phi_i\big(\tau_i^{1\,-1}(x,g)\big)\,.\end{aligned}$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że $\Phi_i,\ i \in I$ są ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi\ :\ \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}\,, \qquad\qquad \Phi\restriction_{\pi^{-1}_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i\,,$$

działającego z zachowaniem włókien i jawnie G-ekwiwariantnego (dzięki przemienności lewego i prawego działania regularnego G na sobie oraz założonej G-ekwiwariantności trywializacji). □

Nasz tour d’horizon teorii wiązek głównych wieńczy poniższe stwierdzenie, będące prostą konsekwencją (konstruktywnego dowodu) powyższego Twierdzenia.

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Def. 4. Podkategoria

$$\mathbf{Bun}_{\mathrm{G}}(B)/B$$

kategorii $\mathbf{Bun}_{\mathrm{G}}(B)$ wiązek głównych nad bazą B o grupie strukturalnej G o tej samej klasie obiektów co $\mathbf{Bun}_{\mathrm{G}}(B)$ i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie, $f = \mathrm{id}_B$ (i na grupie strukturalnej, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$) jest grupoidem.

Dowód: W świetle Tw. 2 wystarczy poprowadzić rozważania w opisie lokalnym, w którym dowolny morfizm $\Phi\ :\ \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}$ pokrywający identyczność na bazie B jest reprezentowany przez rodzinę odwzorowań $h_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G},\ i \in I$. Na mocy tego samego stwierdzenia rodzina odwzorowań $\{\widetilde{h}_i := \mathrm{Inv}\circ h_i\}_{i\in I}$ określa morfizm $\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}$, który w oczywisty sposób jest odwrotnością Φ. □

Do dyskusji istotnych konstrukcji z udziałem wiązek głównych (takich jak redukcja wiązki głównej wzdłuż włożenia podgrupy właściwej jej grupy strukturalnej (np. na wiązce baz wiązki stycznej nad rozmaitością w obecności struktury metrycznej) i jej prolongacja wzdłuż rozszerzenia centralnego tejże)) jeszcze wrócimy, a tymczasem kontynuujemy nasz trawers cwałem przez geometryzacje struktur algebraicznych. . .