

**ACTION DIRECTE GRUPY LIEGO**  
(MAWF '25/26 2.IV [RRS])



FIG. 1. Mural szablonowy Banksy'ego z 2003 r. pt. "The Flower Bomber" (Beit Sahour, Zachodni Brzeg Jordanu, Palestyna). W jednoosobowym warszawskim środowisku wyżej-geometrycznym znany jest pod nazwą "The Gerbe Thrower".

SPIS TREŚCI

1. Wiele twarzy działania właściwego	1
2. Struktura gładka na przestrzeni orbit	5
Literatura	12

1. WIELE TWARZY DZIAŁANIA WŁAŚCIWEGO

Rzetelna dyskusja wiązek głównych i stowarzyszonych, których potrzebujemy w konstrukcji wiązek Clifforda i odnośnych wiązek spinorowych, wymaga wprowadzenia do teorii działania grup Liego na różniczkowalnościach różniczkowalnych. W odwołaniu do pojęć podstawowych<sup>1</sup> wprowadzonych na Wykładzie 2.III (których wzbogacenia w kontekście różniczkowo-geometrycznym i algebraicznym dostarcza szczegółowe studium w ramach odrębnego kursu pt. „Teoria Grup II” i z których część przyjdzie nam jeszcze omawiać w okolicznościach konstrukcji powiązania na wiązkach głównych) przejdziemy teraz bezpośrednio do dyskusji kompleksu zagadnień związanych z geometryzacją zbioru orbit takiego działania.

---

<sup>1</sup>W interesujących nas zastosowaniach będziemy mieć zawsze do czynienia ze strukturą różniczkowalną zarówno na grupie, jak i na zbiorze, na którym ta działa, jednakowoż dla zachowania pełnej kontroli nad założeniami, których przyjęcie jest niezbędnym w rozmaitych rozpatrywanych przez nas okolicznościach, warto prowadzić dyskusję możliwie długo w kategorii topologicznej, co też czynimy poniżej.

**Definicja 1.** Przyjmijmy zapis Def. 23-3. Działanie  $\lambda : G \times X \rightarrow X$  grupy topologicznej  $G$  na przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  nazywamy **właściwym**, ilekroć odwzorowanie

$$(1) \quad \Lambda := (\lambda, \text{pr}_2) : G \times X \rightarrow X \times X : (g, x) \mapsto (g \triangleright x, x)$$

jest właściwe, tj. ilekroć przeciwobrazy zbiorów zwartych względem  $\Lambda$  są zwarte.

Warunek właściwości działania można przeformułować jak poniżej.

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Działanie  $\lambda : G \times X \rightarrow X$  grupy topologicznej  $G$  na przestrzeni Hausdorffa  $(X, \mathcal{T}(X))$  jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru zwartego  $\mathcal{K} \subset X$  podzbiór

$$G(\mathcal{K}) := \{ g \in G \mid \lambda_g(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset \}$$

jest zwarty.

*Dowód:* Załóżmy najpierw, że działanie  $\lambda$  jest właściwe, tj. przeciwobraz dowolnego podzbioru zwartego w  $X \times X$  względem odwzorowania  $\Lambda$  (z Def. 1) jest zwarty. Niechaj  $\mathcal{K} \subset X$  będzie wybranym (dowolnie) podzbiorem zwartym, a wtedy podzbiór

$$\begin{aligned} G(\mathcal{K}) &\equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in \mathcal{K}} : g \triangleright x \in \mathcal{K} \} \equiv \{ g \in G \mid \exists_{x \in X} : \Lambda(g, x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \} \\ &= \text{pr}_1(\Lambda^{-1}(\mathcal{K} \times \mathcal{K})) \end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągły obraz (rzut kanoniczny  $\text{pr}_1$  jest odwzorowaniem ciągłym) przeciwobrazu kwadratu kartezjańskiego zbioru zwartego (czyli zbioru zwartego w topologii produktowej) względem odwzorowania właściwego  $\Lambda$ .

I odwrotnie, niechaj podzbiór  $G(\mathcal{K})$  będzie zwarty dla dowolnego podzbioru zwartego  $\mathcal{K} \subset X$ . Rozważmy dowolny podzbiór zwarty  $\tilde{\mathcal{K}} \subset X \times X$ . Jego ciągle obrazy  $\text{pr}_A(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$ ,  $A \in \{1, 2\}$  są zwarte, przeto własność tę ma także ich suma mnogościowa,  $\mathcal{K}_{12} \equiv \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \cup \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset X$ . Przy tym oczywiście ilekroć  $(g, x) \in G \times X$  spełnia warunek  $\Lambda(g, x) \in \tilde{\mathcal{K}}$ , to tym bardziej para ta spełnia warunek  $\Lambda(g, x) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$ , oto bowiem relacja  $(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{K}}$  implikuje relacje  $x_1 \in \text{pr}_1(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$  oraz  $x_2 \in \text{pr}_2(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$ , więc też  $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$ , zatem ostatecznie

$$\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}}) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}) \equiv \{ (g, x) \in G \times \mathcal{K}_{12} \mid g \triangleright x \in \mathcal{K}_{12} \} \subset G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12},$$

co w świetle twierdzenia o zwartości podzbiorów domkniętych przestrzeni topologicznej przesądza o zwartości  $\Lambda^{-1}(\tilde{\mathcal{K}})$ . Istotnie, podzbiór ten jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc – na mocy twierdzenia o domkniętości podzbiorów zwartych przestrzeni Hausdorffa, a wobec hausdorffowości  $X$ , która jest dziedziczona przez  $X \times X$  – domkniętego podzbioru  $\tilde{\mathcal{K}}$ , a ponieważ – jak pokazaliśmy – jest podzbiorem (pod)przestrzeni zwartej  $G(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12}$  (iloczynu kartezjańskiego zbiorów zwartych), przeto jest – znów na mocy pierwszego z przywoływanych twierdzeń – także zwarty.  $\square$

Nierzadko wygodniejszym okazuje się opis działania właściwego zawarty w

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Działanie  $\lambda : G \times X \rightarrow X$  grupy topologicznej  $G$  na lokalnie prezwartej<sup>2</sup> przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy ze zbieżności dowolnego ciągu punktów

$$\lambda(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow M : n \mapsto g_n \triangleright x_n,$$

określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  oraz dowolnego ciągu elementów  $g : \mathbb{N} \rightarrow G$ , wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu  $g$ .

*Dowód:* Załóżmy najpierw, że odwzorowanie  $\Lambda$  jest właściwe i niechaj  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  oraz  $g : \mathbb{N} \rightarrow G$  będą ciągami o własnościach

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X, \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \triangleright x_n \in X.$$

<sup>2</sup>Przestrzeń topologiczną nazywamy **lokalnie prezwartą**, jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze prezwartym (tj. takim, którego domknięcie jest zwarte) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu.

Korzystając z założenia o lokalnej przwartości  $X$ , wybierzmy dowolne zbiory przwarte  $\mathcal{U} \ni x$  oraz  $\mathcal{V} \ni y$  zawierające punkty  $x$  i – odpowiednio –  $y$  wraz z pewnymi ich otoczeniami (otwartymi). Zbieżność  $x$  do  $x$  (wzgl.  $\lambda(g, x)$  do  $y$ ) oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są zawarte w  $\mathcal{U}$  (wzgl.  $\mathcal{V}$ ), więc tym bardziej w zwartym zbiorze  $\bar{\mathcal{U}}$  (wzgl.  $\bar{\mathcal{V}}$ ), to jednak oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu  $\Lambda(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow X \times X : n \mapsto (g_n \triangleright x_n, x_n)$  są zawarte w zwartym podzbiorze  $\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}}$ , a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu  $(g, x) : \mathbb{N} \rightarrow G \times X : n \mapsto (g_n, x_n)$  są zawarte w podzbiorze  $\Lambda^{-1}(\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}})$ , który wobec właściwego charakteru  $\Lambda$  jest zwarty. Ta cecha  $\Lambda^{-1}(\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{V}})$  przesądza o istnieniu podciągu zbieżnego ciągu  $(g, x)$ , co w szczególności implikuje zbieżność odnośnego podciągu ciągu  $g$ .

I odwrotnie, założmy, że spełniona jest implikacja z końca tezy dowodzonego stwierdzenia. Ustalmy podzbiór zwarty  $\mathcal{K} \subset X \times X$  i wybierzmy dowolny ciąg  $(g, x)$  punktów w zbiorze  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ . Jego obraz w  $X \times X$  względem  $\Lambda$  jest zawarty w zwartym podzbiorze  $\mathcal{K}$ , można zeń przeto wybrać podciąg zbieżny, którego przeciwobraz przecina się z ciągiem wyjściowym  $(g, x)$  definiując (pod)ciąg, o którym mowa we wspomnianej wcześniej implikacji. Tym sposobem otrzymujemy podciąg  $(g, x)$  w  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) \subset G \times X$  zbieżny w  $G \times X$  w topologii produktowej, a ponieważ zbiór  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$  jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc też domkniętego (j/w) podzbioru  $\mathcal{K}$ , przeto granica tego zbieżnego podciągu leży w  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ , co ostatecznie dowodzi zwartości  $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$  i tym samym przekonuje, że  $\Lambda$  jest odwzorowaniem właściwym.  $\square$

Przykładu bezpośredniego zastosowania powyższego rezultatu jest

**Stwierdzenie 3.** Działanie topologiczne zwartej grupy topologicznej na dowolnej rozmaitości różniczkowalnej jest właściwe.

*Dowód:* Każdy ciąg elementów grupy ma podciąg zbieżny z racji zwartości grupy, teza wynika zatem wprost ze Stw. 2.  $\square$

Mamy także

**Stwierdzenie 4.** Działanie dowolnej podgrupy domkniętej dowolnej grupy Liego stanowiące ograniczenie do podgrupy działania regularnego prawego (wzgl. lewego) grupy na sobie jest właściwe.

*Dowód:* Zastosujemy kryterium ze Stw. 2. Niechaj  $g : \mathbb{N} \rightarrow G$  będzie ciągiem zbieżnym,  $h : \mathbb{N} \rightarrow H$  zaś – takim, dla którego ciąg  $g \cdot h : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g_n \cdot h_n$  jest zbieżny. Wobec ciągłości operacji grupowych w  $G$  zbieżnym jest wówczas także ciąg  $(\text{Inv} \circ g) \cdot (g \cdot h) = h$ .  $\square$

I wreszcie kluczowe dla naszych dalszych rozważań

**Stwierdzenie 5.** Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe.

*Dowód:* Rozważmy ciągi  $p : \mathbb{N} \rightarrow P_G$  i  $g : \mathbb{N} \rightarrow G$  o własnościach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n) = \tilde{p}.$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\pi_{P_G}(\tilde{p}) \equiv \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \triangleleft g_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{P_G}(p_n) = \pi_{P_G}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) = \pi_{P_G}(p),$$

która w świetle Def. 23.5 pozwala zapisać

$$\tilde{p} = p \triangleleft \phi_{P_G}(p, \tilde{p}).$$

Niechaj  $\pi_{P_G}(p) \in \mathcal{O}_i$ , gdzie  $\mathcal{O}_i$  jest elementem pokrycia trywializującego  $P_G$ . Istnieje indeks  $N \in \mathbb{N}$  o własności

$$\forall_{n \geq N} : p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i),$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi  $p_{N+}$  i  $p_{N+} \triangleleft g_{N+}$  w obrazie trywializacji  $\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ , w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n, \gamma_n), \quad \tau_i(p) =: (x, \gamma),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \gamma_n) = (x, \gamma),$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n \cdot g_n)$$

oraz

$$\tau_i(\tilde{p}) = \tau_i(p \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}) = (x, \gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n \cdot g_n) = \gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}).$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n^{-1} \cdot (\gamma_n \cdot g_n)) = \gamma^{-1} \cdot (\gamma \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})) = \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p}),$$

który przesądza o słuszności dowodzonej tezy.  $\square$

Idąc tym tropem dalej w kierunku fizykalnych zastosowań, napotykamy

**Corollarium 1.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  będzie wiązką główną,  $M$  zaś – rozmaitością z działaniem (lewostronnym)  $\lambda : G \times M \rightarrow M$  grupy  $G$ . Rozważmy rozmaitość produktową  $\mathbb{P}_G \times M$ . Działanie grupy  $G$  dane wzorem

$$\tilde{\lambda} : G \times (\mathbb{P}_G \times M) \rightarrow \mathbb{P}_G \times M : (g, (p, x)) \mapsto (r(p, g^{-1}), \lambda(g, m))$$

(2)

jest wolne i właściwe.

Dowód: Oczywisty.  $\square$

Tytułem przygotowania gruntu pod wynik wieńczący nasze rozważania wysłowimy jeszcze

**Lemat 1.** Przyjmijmy zapis Def. 23-3. i niechaj  $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$  będzie przestrzenią z działaniem topologicznym grupy topologicznej  $G$ . Rzut kanoniczny

$$\pi_{X/G} : X \rightarrow X/G$$

na przestrzeń orbit

$$X/G := \{ G \triangleright x \mid x \in X \}$$

jest odwzorowaniem otwartym<sup>3</sup> względem topologii ilorazowej na  $X/G$ .

Dowód: Rozważmy zbiór otwarty  $\mathcal{O} \subset X$ . Jego obraz  $\pi_{X/G}(\mathcal{O})$  jest – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej – otwarty w  $X/G$ , jeśli przeciwobraz tego ostatniego,

$$\pi_{X/G}^{-1}(\pi_{X/G}(\mathcal{O})) = \{ \lambda(g, x) \mid (g, x) \in G \times \mathcal{O} \} \equiv G \triangleright \mathcal{O}$$

jest otwarty w  $X$ . Tak jednak jest w istocie, oto bowiem zbiór ten jest sumą mnogościową

$$G \triangleright \mathcal{O} = \bigcup_{g \in G} \lambda_g(\mathcal{O})$$

obrazów zbioru otwartego  $\mathcal{O}$  względem automorfizmów  $\lambda_g$  przestrzeni  $X$ , czyli zbiorów otwartych.  $\square$

<sup>3</sup>**Odwzorowanie otwarte** między przestrzeniami topologicznymi to takie, które przeprowadza podzbiory otwarte dziedziny w podzbiory otwarte przeciwdziedziny.

I wreszcie na zakończenie części wstępnej udowodnimy jeszcze pomocnicze (dla dowodu zasadniczego Tw. 2)

**Twierdzenie 1** (O rzędzie odwzorowania ekwiwariantnego). Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj  $((M_A, \widehat{\mathcal{A}}_A), \lambda^A)$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą rozmaitościami z odnośnymi działaniami gładkimi (lewostronnymi) grupy Liego  $G$ , przy czym zakładamy dodatkowo, że  $\lambda^1$  jest przechodnie, tj.,

$$\forall_{x, y \in M_1} \exists_{g \in G} : y = \lambda^1(g, x),$$

i niech  $F : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem gładko (lewostronnie)  $G$ -ekwiwariantnym. Wówczas  $F$  ma stały rząd, w szczególności zaś przeciwobrazy punktów w  $M_2$  względem  $F$  są domkniętymi podrozmaitościami włożonymi w  $M_1$ .

*Dowód:* Wobec przechodniości działania  $G$  na rozmaitości  $M_1$ , dla każdej pary punktów  $x_1, x_2 \in M_1$  istnieje element  $g_{21} \in G$  o własności  $x_2 = \lambda_{g_{21}}^1(x_1)$ , przy czym z racji  $G$ -ekwiwariantności  $F$  zachodzi tożsamość funkcjonalna

$$F \circ \lambda_{g_{21}}^1 = \lambda_{g_{21}}^2 \circ F,$$

a zatem także tożsamość

$$\mathbb{T}_{x_1}(F \circ \lambda_{g_{21}}^1) = \mathbb{T}_{x_1}(\lambda_{g_{21}}^2 \circ F),$$

którą możemy przepisać w postaci

$$\mathbb{T}_{x_2}F \circ \mathbb{T}_{x_1}\lambda_{g_{21}}^1 = \mathbb{T}_{F(x_1)}\lambda_{g_{21}}^2 \circ \mathbb{T}_{x_1}F.$$

Z racji dyfeomorficznego charakteru odwzorowań  $\lambda_{g_{21}}^A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  (przesądzającego o odwracalności odwzorowań do nich stycznych) z powyższej tożsamości wywodzimy wniosek o tożsamości rzędów:

$$\text{rk } \mathbb{T}_{m_2}F = \text{rk } \mathbb{T}_{m_1}F,$$

który w konsekwencji przechodniości  $\lambda^1$  możemy rozciągnąć na całą dziedzinę  $F$ . Końcowa część tezy wynika wprost z twierdzenia o rzędzie (odwzorowania).  $\square$

## 2. STRUKTURA GŁADKA NA PRZESTRZENI ORBIT

Ukrytym celem naszych dotychczasowych rozważań, w których poświęciliśmy dużo czasu na rozpatrzenie rozmaitych sformułowań pojęcia właściwości działania grupy na przestrzeni topologicznej, było przygotowanie gruntu pod topologizację i wybór struktury gładkiej na zbiorze orbit takiego działania. Zwieńczeniem naszych wysiłków jest fundamentalne

**Twierdzenie 2** (O rozmaitości ilorazowej). Przyjmijmy notację Def. 1 oraz Lematu 1 (i wcześniejszą). Ilekroć działanie grupy Liego  $G$  na rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit  $M/G$  jest rozmaitością topologiczną wymiaru  $\dim M - \dim G$  i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny  $\pi_{M/G}$  jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaitości nosi miano **rozmaitości ilorazowej**.

*Dowód:* Zaczniemy od zidentyfikowania struktury rozmaitości topologicznej na zbiorze orbit  $M/G$ . Topologia  $M/G$  jest topologią ilorazową indukowaną z  $M$ : zbiór  $\mathcal{O} \subset M/G$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz  $\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})$  jest otwarty w  $M$ . Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, wykorzystajmy relację równoważności  $\mathcal{R}_\lambda$  na  $M$ , jaką jest przynależność do tej samej orbity działania  $G$ ,

$$\mathcal{R}_\lambda = \Lambda(G \times M) \subset M \times M,$$

gdzie  $\Lambda$  jest odwzorowaniem zdefiniowanym w Równ. 1. Relacja ta zadaje rozkład  $M$  na wzajem rozłączne orbity działania grupy  $G$ . Niechaj  $x$  i  $y$  będą punktami w  $M$ , których obrazy  $\pi_{M/G}(x)$  i  $\pi_{M/G}(y)$  są dwoma różnymi punktami w przestrzeni orbit, tj.  $\pi_{M/G}(x) \neq \pi_{M/G}(y)$ , a wtedy

$(x_1, x_2) \notin \mathcal{R}_\lambda$ , ponieważ zaś podzbiór  $\mathcal{R}_\lambda \subset M \times M$  jest w świetle twierdzenia o domkniętości odwzorowania właściwego o przewartej przeciwdziedzinnie domknięty w topologii produktowej na  $M \times M$  jako ciągły obraz zbioru domkniętego  $G \times M$  względem odwzorowania właściwego  $\Lambda$ , przeto istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \ni (x_1, x_2)$  o własności  $\mathcal{O}_{(x_1, x_2)} \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$ . Wprost na mocy definicji topologii produktowej otoczenie takie jest sumą mnogościową pewnej rodziny iloczynów kartezjańskich podzbiorów otwartych w  $M$ , wybierając zatem dowolny z nich – powiedzmy  $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ ,  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(M)$  – otrzymujemy relacje  $\mathcal{O}_\alpha \ni x_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  oraz  $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \cap \mathcal{R}_\lambda = \emptyset$ , a zatem także  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha) \ni \pi_{M/G}(x_\alpha)$ , przy czym koniecznie  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_1) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$ , w przeciwnym bowiem razie istniałyby punkty  $y_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  należące do wspólnej orbity działania  $G$ , a zatem także  $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_\lambda \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ , co przeczyłoby rozłączności  $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$  i  $\mathcal{R}_\lambda$ . W konsekwencji Lematu 1 zbiory  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_\alpha)$  są otwartymi otoczeniami punktów  $\pi_{M/G}(x_\alpha)$  w przestrzeni orbit.

W następnej kolejności dokonamy rozkładu rozmaitości  $M$  na włożone weń gładko orbity działania grupy  $G$ , po czym stowarzyszymy z tym rozkładem stosowne lokalne mapy, w których współrzędne kartografujące kierunki transwersalne do (bliskich sobie) orbit zostaną ostatecznie wykorzystane w konstrukcji atlasu przestrzeni orbit. Punktem wyjścia do tak zakreślonej taktyki jest upewnienie się, że orbity działania grupy są w istocie podrozzmaitościami gładko włożonymi w  $M$ . W tym celu rozważymy odwzorowanie gładkie, określone dla dowolnie ustalonego punktu  $x \in M$ ,

$$\Omega_x \equiv \lambda(\cdot, x) : G \longrightarrow M : g \longmapsto \lambda(g, x),$$

o oczywistej własności

$$\Omega_x(G) = G \triangleright x.$$

Odwzorowanie to jest jawnie  $G$ -ekwiwariantne,

$$\forall g \in G : \Omega_x \circ \ell_g = \lambda_g \circ \Omega_x,$$

tj. splata ze sobą działania  $G$ : lewe regularne na sobie oraz  $\lambda$  na  $M$ , a ponieważ pierwsze z tych działań jest przechodnie, przeto możemy odnieść do  $\Omega_x$  tezę Tw. 1, wnioskując o stałości rzędu tego odwzorowania. Ponadto jest ono injekcją, oto bowiem równość

$$g_2 \triangleright x = \Omega_x(g_2) = \Omega_x(g_1) = g_1 \triangleright x \iff (g_2^{-1} \cdot g_1) \triangleright x = x$$

oznacza – wobec założenia dotyczącego charakteru działania  $\lambda$  – równość

$$g_2^{-1} \cdot g_1 = e \iff g_2 = g_1.$$

To jednak w połączeniu z wcześniejszą konkluzją, a w odwołaniu do twierdzenia o immersyjności gładkiej injekcji o stałym rzędzie (wynikającego wprost z twierdzenia o stałym rzędzie), pozwala stwierdzić, że  $\Omega_x$  jest immersją. Przy tym ilekroć  $\mathcal{K} \subset M$  jest zwarty, więc też (wobec hausdorffowości  $M$ ) domknięty, jego przeciwobraz  $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$  jest domknięty w  $G$  wobec ciągłości  $\Omega_x$ , a ponieważ dla dowolnego należącego doń elementu  $g$  zachodzi relacja  $g \triangleright x \in \mathcal{K}$ , czyli też

$$(g \triangleright (\mathcal{K} \cup \{x\})) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) = (g \triangleright \mathcal{K} \cup \{g \triangleright x\}) \cap (\mathcal{K} \cup \{x\}) \supset \{g \triangleright x\} \neq \emptyset,$$

co implikuje jego zawieranie się

$$\Omega_x^{-1}(\mathcal{K}) \subset G(\mathcal{K} \cup \{x\})$$

w zbiorze  $G(\mathcal{K} \cup \{x\})$ , który jest zwarty na mocy Stw. 1, przeto  $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$  jest zwarty. To zaś oznacza, że  $\Omega_x$  jest odwzorowaniem właściwym, a zatem ostatecznie – w konsekwencji poprzednich ustaleń – gładkim włożeniem (jest nim każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym – patrz: [Sus23]).

Wybierzmy (dowolnie) punkt  $x \in M$ , a wraz z nim – jego przeciwobraz  $e \in G$  względem  $\Omega_x$ , i lokalne mapy:  $\kappa_e : \mathcal{O}_e \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$ ,  $D = \dim G$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_e$  elementu neutralnego  $e$  w  $G$  oraz  $\kappa_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$ ,  $N = \dim M$  na pewnym otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x$  w  $M$ , w których lokalna prezentacja włożenia  $\Omega_x$  przybiera postać kanoniczną (jako immersja), czyli

$$G \triangleright \{x\} \cap \mathcal{O}_x = \kappa_x^{-1}(\mathcal{U}_x \times \{\mathbf{0}_n\}),$$

gdzie  $\mathcal{U}_x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{\times D})$  jest homeomorficznym obrazem fragmentu orbity  $x$  zawartego w  $\mathcal{O}_x$ . Niechaj

$$\Delta_x := \kappa_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathbb{R}^{\times N})$$

będzie podrozmaitością  $\mathcal{O}_x$  transwersalną do (fragmentu) rzeczonyj orbity  $G \triangleright \{x\}$ , wyznaczającą rozkład przestrzeni stycznej

$$\mathbb{T}_x M = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x,$$

w którym wobec immersywności  $\Omega_x$  identyfikujemy

$$(3) \quad \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) \equiv \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \subset \mathbb{T}_x M.$$

Oznaczmy dalej

$$\delta_x := \lambda|_{G \times \Delta_x} : G \times \Delta_x \longrightarrow M.$$

Wykażemy, że  $\delta_x$  jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu punktu  $(e, x) \in G \times \Delta_x$ . W tym celu wykorzystamy gładkie włożenie

$$\iota_x : G \longrightarrow G \times \Delta_x : g \longmapsto (g, x)$$

do rozłożenia odwzorowania  $\Omega_x$  wedle schematu

$$\Omega_x = \delta_x \circ \iota_x,$$

a zatem także – stycznego do niego:

$$\mathbb{T}_e \Omega_x = \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x.$$

Zważywszy Równ. (3), konstatujemy prawdziwość relacji

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_e G \oplus \{0_{\mathbb{T}_x \Delta_x}\}) \\ &\equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_e \iota_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_e \Omega_x(\mathbb{T}_e G) = \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}). \end{aligned}$$

Wprowadźmy dalej gładkie włożenie

$$\iota_e : \Delta_x \longrightarrow G \times \Delta_x : y \longmapsto (e, y)$$

podrozmaitości transwersalnej do (lokalnego fragmentu) orbity  $G \triangleright \{x\}$ , aby móc rozłożyć gładkie włożenie  $J_{\Delta_x} : \Delta_x \longrightarrow M$  w postaci

$$J_{\Delta_x} = \delta_x \circ \iota_e$$

i – co za tym idzie – styczne do niego:

$$\mathbb{T}_y J_{\Delta_x} = \mathbb{T}_{(e,y)} \delta_x \circ \mathbb{T}_y \iota_e.$$

Wobec oczywistej równości

$$\mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) = \{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x$$

otrzymujemy tym razem relację

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) &\supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\{0_{\mathbb{T}_e G}\} \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x) \equiv \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathbb{T}_x \iota_e(\mathbb{T}_x \Delta_x) = \mathbb{T}_x J_{\Delta_x}(\mathbb{T}_x \Delta_x) \\ &\equiv \mathbb{T}_x \Delta_x \subset \mathbb{T}_x M, \end{aligned}$$

ostatecznie zatem stwierdzamy, że

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) \supset \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) \oplus \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \mathbb{T}_x M,$$

skoro zaś zarazem

$$\mathbb{T}_x M \supset \mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)),$$

to nieuchronnie

$$\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x(\mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x)) = \mathbb{T}_x M,$$

co dowodzi surjektywności  $\mathbb{T}_{(e,x)} \delta_x$ , a ponieważ jest też – wobec ustalonej wcześniej immersywności  $\Omega_x$  –

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_{(e,x)}(G \times \Delta_x) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_e G + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x(G \triangleright \{x\}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x \Delta_x \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M,$$

przeto  $\mathbb{T}_{(e,x)}\delta_x$  jawi się bijekcją. Na tym etapie możemy już odwołać się do twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań, aby orzec istnienie pewnego otoczenia otwartego  $\mathcal{V}_x$  punktu  $(e, x) \in \mathbb{G} \times \Delta_x$  odwzorowywanego dyfeomorficznie przez (ograniczenie)  $\delta_x$  w pewne otoczenie otwarte  $\tilde{\mathcal{O}}_x$  punktu  $x \in M$ . Biorąc pod uwagę naturę topologii (produktowej) na  $\mathbb{G} \times \Delta_x$  (według schematu myślowego wyłożonego na początku niniejszego dowodu w uzasadnieniu hausdorffowskości topologii ilorazowej na przestrzeni orbit), upewniamy się, że pierwsze z tych otoczeń można wybrać w postaci produktowej  $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_e \times \mathcal{W}_x$ , przy czym z każdego z otoczeń:  $\mathcal{W}_a$ ,  $a \in \{e, x\}$  można wyjąć przetrwane przeciwobrazy pewnych kul otwartych  $B^D(\tilde{\kappa}_e(e) = \mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \equiv \tilde{\kappa}_e(\tilde{\mathcal{W}}_e)$ ,  $\varepsilon_e > 0$  oraz – odpowiednio –  $B^{N-D}(\tilde{\kappa}_x(x) = \mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \equiv \tilde{\kappa}_x(\tilde{\mathcal{W}}_x)$ ,  $\varepsilon_x > 0$  względem lokalnych map  $\tilde{\kappa}_e : \mathcal{W}_e \rightarrow \mathbb{R}^{x^D}$  oraz – odpowiednio –  $\tilde{\kappa}_x : \mathcal{W}_x \rightarrow \mathbb{R}^{x^{N-D}}$ . W dalszej części naszej analizy skupimy uwagę na otoczeniu produktowym  $\tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x$ .

W następnej kolejności pokażemy, że otoczenie  $\tilde{\mathcal{W}}_x \subset \Delta_x$  można wybrać na tyle małym, ażeby każda orbita działania  $\mathbb{G}$  przecinała je w co najwyżej jednym punkcie. Załóżmy przeciwnie i rozważmy przeliczalną bazę otoczeń  $x$  w  $\tilde{\mathcal{W}}_x$  złożoną z przeciwobrazów względem  $\tilde{\kappa}_x$  rodziny kul otwartych  $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n)$ ,  $r_n := \frac{1}{E(\varepsilon_x^{-1})+n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . W każdym z przeciwobrazów  $\mathcal{B}_n \equiv \tilde{\kappa}_x^{-1}(B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n))$  tkwi para punktów  $x_n$  oraz  $y_n \neq x_n$  należących do tej samej orbity, tj. spełniających warunek  $y_n = g_n \triangleright x_n$  dla pewnego elementu  $g_n \in \mathbb{G}$ . Przy tym wobec założonej postaci bazy otoczeń oba ciągi punktów w (przezwartym)  $\tilde{\mathcal{W}}_x$  zbiegają do  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n \triangleright x_n),$$

a zatem – w świetle Stw. 2, a z racji właściwego charakteru  $\lambda$  – ciąg  $g$  zdefiniowany przez parę ciągów  $(x., y.)$  zawiera podciąg  $g_n$  zbieżny do pewnego elementu  $g \in \mathbb{G}$ . Ciągłość działania  $\lambda$  pozwala nam zatem zapisać ciąg równości

$$g \triangleright x \equiv \lambda\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (g_{n_k}, x_{n_k})\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x,$$

a ponieważ mamy do czynienia z działaniem wolnym, przeto nieodzownie  $g = e$ . Jednakowoż dla dostatecznie dużych wartości  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi  $g_{n_k} \in \tilde{\mathcal{W}}_e$ , przy czym  $g_{n_k} \neq e$  (wszak  $y_{n_k} \neq x_{n_k}$ ) więc też

$$\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) = y_{n_k} = \lambda(e, y_{n_k}),$$

co z racji injektywności  $\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x} \equiv \lambda \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x}$  implikuje równość

$$(g_{n_k}, x_{n_k}) = (e, y_{n_k}),$$

prowadzącą do jawnej sprzeczności. Otoczenie  $\tilde{\mathcal{W}}_x$  o postulowanej cesze zawsze zatem istnieje.

Rozważmy teraz złożenie homeomorfizmów

$$\phi_x := (\tilde{\kappa}_e \times \tilde{\kappa}_x) \circ (\delta_x \upharpoonright_{\tilde{\mathcal{V}}_x})^{-1} : \tilde{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{V}}_x \equiv \tilde{\mathcal{W}}_e \times \tilde{\mathcal{W}}_x \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x).$$

Pokażemy, że określa ono lokalną mapę zgodną z działaniem grupy  $\mathbb{G}$  w tym naturalnym sensie, że orbity tegoż działania są w tej mapie hiperpłaszczyznami parametryzowanymi przez pierwszych  $D$  współrzędnych. Zaczniemy od tego, że wobec otwartości zarówno swojej dziedziny, jak i przeciwdziedziny homeomorfizm  $\phi_x$  dopuszcza postulowaną interpretację, pozostaje więc jedynie upewnić się co do słuszności naszych oczekiwań dotyczących opisu fragmentów orbit zawartych w jego dziedzinie. Mamy

$$\begin{aligned} \phi_x^{-1} : \quad & B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_x \\ & : \quad (\xi, \zeta) \longmapsto \delta_x(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)) \equiv \lambda(\tilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)), \end{aligned}$$

bez trudu przeto stwierdzamy, że dowolna hiperpowierzchnia  $\zeta = \zeta_* = \text{const}$  jest zawarta w pojedynczej orbicie, oto bowiem jej homeomorficzny przeciwobraz w  $M$  względem  $\phi_x$  spełnia relację

$$\phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \{\zeta_*\}) \equiv \lambda(\tilde{\mathcal{W}}_e \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \subset \lambda(\mathbb{G} \times \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}) \equiv \mathbb{G} \triangleright \{\tilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}.$$

Rozumowanie to pokazuje, że dowolna orbita  $\mathbb{G} \triangleright \{y\}$ ,  $y \in M$  przecina  $\tilde{\mathcal{O}}_x$  wzdłuż sumy mnogościowej (fragmentów) hiperpowierzchni o opisie współrzędniowym  $\zeta = \zeta_i = \text{const}$ ,  $i \in I_y$  dla pewnego zbioru indeksów  $I_y$ . Otoczenie  $\tilde{\mathcal{W}}_x$  zostało jednak wybrane tak, iżby dowolna orbita

przecinała je w *co najwyżej jednym* punkcie, wobec czego  $|I_y| \leq 1$ . Lokalna mapa  $\phi_x$  jest zatem – w istocie – zgodna z działaniem  $G$  w określonym wyżej znaczeniu i może być wykorzystana w kartografowaniu przestrzeni orbit na otoczeniu punktu  $\pi_{M/G}(x) \equiv [x]$ .

Skonstruujemy teraz lokalną mapę na otoczeniu  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$  punktu  $[x]$ , pamiętając, że otwartość zbioru  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \ni [x]$  w topologii ilorazowej jest zapewniona przez otwartość rzutu kanonicznego  $\pi_{M/G}$ , stwierdzoną w Lemacie 1. Oznaczmy lokalne cięcie przez  $x$  w poprzek orbit zawartych w  $\tilde{\mathcal{O}}_x$  symbolem

$$\tilde{\Delta}_x := \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x))$$

i zauważmy, że ograniczenie rzutu kanonicznego

$$\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x} : \tilde{\Delta}_x \longrightarrow \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$$

jest bijekcją w świetle założeń poczynionych w odniesieniu do charakteru przecięć orbit działania  $G$  z  $\tilde{\mathcal{O}}_x$  oraz z racji potwierdzonej zgodności mapy  $\phi_x$  z tymże działaniem. Przy tym ilekroć  $\mathcal{W} \subset \tilde{\Delta}_x$  jest podzbiorem otwartym, jego obraz w przestrzeni orbit

$$\pi_{M/G}(\mathcal{W}) \equiv \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(\{\mathbf{0}_D\} \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})) = \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1}(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W}))$$

jest w oczywisty sposób otwarty jako obraz względem złożenia odwzorowań otwartych zbioru  $B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \text{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})$  otwartego w topologii produktowej – wszak  $\phi_x$  jest homeomorfizmem, więc też odwzorowaniem otwartym, a rzut na drugą składową zadanego przezeń zbioru  $\phi_x(\mathcal{W})$  otwartego w topologii produktowej, czyli będącego sumą mnogościową iloczynów kartezjańskich zbiorów otwartych, jest takąż sumą rzutów tychże iloczynów na drugą składową, więc także zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^{N-D}$ . Koniec końców odwzorowanie ograniczone  $\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x}$  jest zatem homeomorfizmem, którego ciągłą odwrotność będziemy oznaczać symbolem

$$\sigma_{[x]} := (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_x})^{-1} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\psi_{[x]} := \text{pr}_2 \circ \phi_x \circ \sigma_{[x]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \tilde{\Delta}_x \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

które – jak łatwo widać – jest homeomorfizmem otoczenia otwartego  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$  na kulę otwartą  $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^{N-D}$ , czyli – innymi słowy – lokalną mapą klasy  $C^0$ . Należy przy tym podkreślić, że lokalna prezentacja rzutu kanonicznego określona przez lokalną mapę  $\phi_x$  na  $\tilde{\mathcal{O}}_x$  oraz stowarzyszoną z nią lokalną mapę  $\psi_{[x]}$  na  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_x)$  przyjmuje prostą postać

$$\psi_{[x]} \circ \pi_{M/G} \circ \phi_x^{-1} : B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \rightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x),$$

o jawnie submersywnym charakterze. Odwzorowanie  $\sigma_{[x]}$  ma zatem naturalną interpretację ciecica lokalnego submersji  $\pi_{M/G}$ . Jeśli więc zaindukujemy strukturę rozmaitości na  $M/G$  z tej na rozmaitości  $M$  (j/w) przy użyciu podatlasu na  $M$  utworzonego przez wszystkie możliwe mapy lokalne na  $M$  zgodne z działaniem  $G$  i wszystkie cięcia lokalne rzutu kanonicznego nad obrazami – względem tegoż ciecica – ich dziedzin, to dla zakończenia dowodu twierdzenia pozostanie nam jedynie wykazać gładkość odwzorowań przejścia między mapami określonymi na przecinających się nie-pusto otoczeniach w przestrzeni orbit, a na koniec – jedyność tak otrzymanej struktury gładkiej.

Niechaj zatem  $\psi_{[x_A]} : \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_A}) \xrightarrow{\cong} B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_A})$ ,  $A \in \{1, 2\}$  będą dwiema lokalnymi mapami spełniającymi warunek  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_1}) \cap \pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \neq \emptyset$ , a stowarzyszonymi z lokalnymi mapami  $\phi_{x_A} : \tilde{\mathcal{O}}_{x_A} \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;A}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_n; \varepsilon_{x_A})$ . Przecinanie się rzutów  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_A})$  otoczeń  $\tilde{\mathcal{O}}_{x_A}$  odnośnych punktów  $x_A$  oznacza, że są w tych otoczeniach punkty  $y_A \in \tilde{\mathcal{O}}_{x_A}$  należące do tej samej orbity, tj.  $y_2 = g_{21} \triangleright y_1$  dla pewnego elementu  $g_{21} \in G$ , możemy zatem bez straty ogólności (dokonawszy – jeśli trzeba – trywialnego przesunięcia w przeciwdziedzinach obu map  $\phi_{x_A}$ ) przyjąć, że  $y_A = x_A$  i jest spełniony warunek

$$x_2 = g_{21} \triangleright x_1.$$

Załóżmy najpierw, że  $g_{21} = e$ , a wtedy możemy wprost rozpatrzyć odwzorowanie przejścia między mapami  $\phi_{x_1} = (\xi_1, \zeta_1)$  i  $\phi_{x_2} = (\xi_2, \zeta_2)$  na zbiorze  $\mathcal{O}_{12} := \tilde{\mathcal{O}}_{x_1} \cap \tilde{\mathcal{O}}_{x_2}$ . Jako że przecięcia dowolnej orbity z każdym z otoczeń odpowiadają stałej i jedynej wartości  $\zeta_1$  oraz takiejż wartości  $\zeta_2$ ,

przeło gładkie (wprost na mocy konstrukcji – wszak  $\phi_{x_A}$  są mapami na gładkiej rozmaitości  $M$ ) odwzorowanie przejścia między obiema mapami jest postaci

$$\begin{aligned} \phi_{x_2} \circ (\phi_{x_1} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{12}})^{-1} &: \phi_{x_1}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \phi_{x_2}(\mathcal{O}_{12}) \\ &: (\xi_1(y), \zeta_1(y)) \mapsto (F_1 \circ (\xi_1, \zeta_1), F_2 \circ \zeta_1)(y), \end{aligned}$$

gdzie  $F_1$  i  $F_2$  są pewnymi odwzorowaniami gładkimi. W szczególności więc otrzymujemy relację

$$\zeta_2(y) = F_2 \circ \zeta_1(y), \quad y \in \mathcal{O}_{12},$$

z której odczytujemy jawnie gładką postać odwzorowania przejścia między mapami indukowanymi:

$$\begin{aligned} \psi_{[x_2]} \circ (\psi_{[x_1]} \upharpoonright_{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12})})^{-1} &: \psi_{[x_1]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \psi_{[x_2]} \circ \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{12}) \\ &: \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ (\pi_{M/G} \upharpoonright_{\tilde{\Delta}_{x_1}})^{-1}(\pi_{M/G}(y)) \equiv \zeta_1(y) \mapsto \zeta_2(y) = F_2(\zeta_1(y)). \end{aligned}$$

W przypadku  $g_{21} \neq e$  nie możemy wprawdzie *a priori* rozważać odwzorowań przejścia między mapami  $\phi_{x_1}$  i  $\phi_{x_2}$  na  $\mathcal{O}_{12}$  (zbiór ten może być w szczególności pusty), ale możemy zastąpić mapę lokalną  $\phi_{x_2}$  oraz cięcie lokalne  $\sigma_{[x_2]}$  użyte w definicji mapy lokalnej  $\psi_{[x_2]}$  na  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$  innymi z tego samego podatlasu na  $M$  i – odpowiednio – zbioru cięć lokalnych rzutu kanonicznego, indukujących mapy lokalne na przestrzeni orbit, które wspólnie wyznaczają *tę samą* mapę lokalną  $\psi_{[x_2]}$  na  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{x_2})$ , ale jednocześnie przeprowadzają punkt z jej dziedziny przez zbiór otwarty w nakryciu  $M$  przecinający się z  $\mathcal{O}_{x_1}$  w pewnym otoczeniu otwartym  $x_1$ , co sprowadza nas do poprzednio zweryfikowanego przypadku. Otóż więc użyjmy automorfizmu  $\lambda_{g_{21}}$ , aby zdefiniować odwzorowanie

$$\phi_{x_1}^{21} := \phi_{x_2} \circ \lambda_{g_{21}} : \lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;2}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_2})$$

na otwartym (wprost z konstrukcji) otoczeniu  $\lambda_{g_{21}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$  punktu  $x_1$ . Jako że automorfizm  $\lambda_{g_{21}}$  przeprowadza orbity na orbity,  $\phi_{x_1}^{21}$  jest mapą lokalną zgodną z działaniem  $G$ . Definicję tę uzupełniamy stosowną definicją lokalnego cięcia rzutu kanonicznego nad  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ ,

$$\sigma_{[x_2]}^{21} := \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}.$$

Ta ostatnia ma sens, gdyż

$$\pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \pi_{M/G} \circ \sigma_{[x_2]} = \text{id}_{\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})},$$

a przy tym zgodnie z zapowiedzią odtwarza, w połączeniu z nową mapą lokalną, wyjściową mapę lokalną na  $\pi_{M/G}(\tilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ , o czym przekonuje bezpośredni rachunek:

$$\psi_{[x_2]}^{21} := \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1}^{21} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \lambda_{g_{21}} \circ \lambda_{g_{21}}^{-1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} = \text{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \sigma_{[x_2]}^{21} \equiv \psi_{[x_2]}.$$

To kończy dowód istnienia struktury gładkiej, o której jest mowa w tezie twierdzenia. Należy jeszcze wykazać struktury tej jedyność.

W tym celu rozważmy dowolne dwie takie struktury na tej samej przestrzeni orbit  $M/G$ , oznaczając odnośne jej kopie indeksem:  $(M/G)_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  dla wygodnego odróżnienia. Wprost na mocy poczynionego założenia rzut kanoniczny  $\pi_{M/G} : M \twoheadrightarrow (M/G)_A$ ,  $A \in \{1, 2\}$  jest w obu przypadkach gładką surjektywną submersją, można zatem odnieść do niego tezę Stw.19-20-21-22.1. (o kwazi-universalnej własności submersji), i to na dwa sposoby: możemy oto zapisać diagram przemiennej

$$\begin{array}{ccc} & & (M/G)_2 \\ & \nearrow \pi_{M/G} & \uparrow \text{id}_{M/G} \\ M & \xrightarrow{\pi_{M/G}} & (M/G)_1 \end{array},$$

w którym traktujemy  $\pi_{M/G} : M \twoheadrightarrow (M/G)_1$  jako submersję,  $\pi_{M/G} : M \twoheadrightarrow (M/G)_2$  zaś (to samo odwzorowanie) – jako odwzorowanie referencyjne, którego gładkość przesądza o gładkości

$\text{id}_{M/G}$ ; możemy też zamienić miejscami (i rolami)  $(M/G)_1$  i  $(M/G)_2$ , co prowadzi do wniosku, że także wtedy, gdy traktujemy  $\text{id}_{M/G}$  jako odwzorowanie z  $(M/G)_2$  w  $(M/G)_1$ , jest ono gładkie, co jest równoznaczne z równoważnością obu struktur różniczkowych.  $\square$

**Uwaga 1.** Często przyjmuje się, że nośnik struktury rozmaitości topologicznej powinien spełniać drugi aksjomat przeliczalności. Bez trudu przekonujemy się, że przestrzeń orbit  $M/G$  ma tę cechę, oto bowiem obraz dowolnej skończonej lub przeliczalnie nieskończonej bazy  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_n\}_{n \in I \subseteq \mathbb{N}}$  topologii  $M$  względem rzutu kanonicznego na przestrzeń orbit,  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}) = \{\pi_{M/G}(\mathcal{O}_n)\}_{n \in I \subseteq \mathbb{N}}$ , jest – w świetle Lematu 1 – odpowiednią bazą topologii (ilorazowej)  $M/G$ . Istotnie,  $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$  jest pokryciem otwartym  $M/G$ , a ponadto dla dowolnej pary  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}), \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}), n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  elementów tej rodziny o niepustym przecięciu  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x, x \in M$  istnieje element  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \subset \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2})$  o własności  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \ni G \triangleright x$ . W rzeczy samej, z relacji  $\pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni G \triangleright x$  wynika istnienie punktów  $x_A \in \mathcal{O}_{n_A}, A \in \{1, 2\}$  oraz elementu grupy  $g_{21} \in G$  spełniających relację  $x_2 = g_{21} \triangleright x_1$ , wobec czego zbiór  $\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})$  ma niepuste przecięcie z  $\mathcal{O}_{n_2}$ , a ponieważ jest otwarty (jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego), przeto jest sumą mnogościową pewnej rodziny elementów bazy  $\mathcal{O}$ . Przynajmniej jeden element tej rodziny – oznaczmy go  $\mathcal{O}_{n_{12}}$  – przecina się niepusto z  $\mathcal{O}_{n_2}$ , a zatem – wprost na mocy definicji bazy topologii – istnieje element  $\mathcal{O}_{n_{122}} \in \mathcal{O}$  spełniający warunek

$$\mathcal{O}_{n_{122}} \subset \mathcal{O}_{n_{12}} \cap \mathcal{O}_{n_2} \subset \lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2},$$

z którego wynika już pożądaný warunek

$$\begin{aligned} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_{122}}) &\subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}) \subset \pi_{M/G}(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}) \\ &= \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_2}). \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego  $\mathcal{O} \subset M/G$  zachodzi – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej oraz wobec bazowego charakteru  $\mathcal{O}$  – tożsamość

$$\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i},$$

w której  $I \subset \mathbb{N}$  jest pewnym zbiorem indeksów. Wobec powyższego otrzymujemy równość

$$\pi_{M/G}(\pi_{M/G}^{-1}(\mathcal{O})) = \pi_{M/G}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{n_i}\right) = \bigcup_{i \in I} \pi_{M/G}(\mathcal{O}_{n_i}),$$

która przesądza o bazowym charakterze  $\pi_{M/G}(\mathcal{O})$ .

Na zakończenie tej części wykładu wypowiemy stwierdzenie istotne z punktu widzenia zastosowań teorii grup Liego w opisie nieliniowych realizacji symetrii w teorii pola (w szczególności w modelowaniu efektywnej teorii pola „małych” wzbudzeń klasycznej jej próżni), a mianowicie

**Twierdzenie 3.** Przyjmijmy zapis Lematu 1 i niechaj  $G$  będzie grupą Liego,  $H \subseteq G$  zaś – jej podgrupą domkniętą. Istnieje dokładnie jedna struktura rozmaitości gładkiej na przestrzeni ilorazowej  $G/H$  z topologią ilorazową zaindukowaną z  $G$ , względem której rzut kanoniczny  $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$  jest surjektywną submersją. Naturalne lewe działanie

$$(4) \quad [\ell] : G \times (G/H) \rightarrow G/H : (\tilde{g}, gH) \mapsto (\tilde{g} \cdot g)H$$

jest gładkie względem tej struktury. Gładka rozmaitość  $G/H$  z działaniem grupy  $G$  określona tym sposobem nosi miano **gładkiej przestrzeni jednorodnej**  $G$ .

*Dowód:* Rozważmy działanie  $\wp : G \times H \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$  podgrupy  $H \subset G$  na grupie  $G$  otrzymane w wyniku ograniczenia do tejże podgrupy prawego działania regularnego  $G$  na sobie. Jest ono jawnie swobodne, a przy tym możemy je zapisać jako superpozycję

$$\wp = m \circ (\text{id}_G \times \jmath_H)$$

odwzorowań gładkich (przy czym gładkość kanonicznego włożenia  $\jmath_H : H \rightarrow G$  wynika wprost z Tw. II.3.1., zatem jest też gładkie. W świetle Stw. 4 jest ono również właściwe, możemy więc

odnieć do pary  $(G, H)$  tezę Tw. 2, konstatując prawdziwość pierwszej części tezy twierdzenia dowodzonego. Pozostaje zatem wykazać gładkość działania  $[\lambda]$ . Zauważmy, że działanie to domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc}
 & & G/H \\
 & \nearrow^{\pi_{G/H} \circ m} & \uparrow [\lambda] \\
 G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times \pi_{G/H}} & G \times G/H
 \end{array}$$

w którym  $\text{id}_G \times \pi_{G/H}$  jest submersją, co pozwala zastosować Stw.II.1-2.1., aby wywnioskować gładkość  $[\lambda]$  z gładkości odwzorowania  $\pi_{G/H} \circ m$ , wynikającej ze stwierdzonej wcześniej gładkości  $\pi_{G/H}$  i założonej gładkości  $m$ .  $\square$

#### LITERATURA

[Sus23] R.R. Suszek, “*Niezbędnik różniczkowo-geometryczny*”, notatki uzupełniające, 2023.