

ASOCJACJE W DZIAŁANIU  
(MAWF '25/26 2.V I 2.VI [RRS])



FIG. 1. Platon i Arystoteles, praojcowie idei asocjacji przez sekwencję działań, na fresku Raffaello Sanzio da Urbino z 1511 r. pt. “*Scuola di Atene*” (*Stanze di Raffaello*, Palazzo Apostolico, Vaticano).

SPIS TREŚCI

1. Motywacja	2
2. Abstrakcja	5
Literatura	22

Konstrukcja różności ilorazowej stanowi jeden z kluczowych elementów procedury geometryzacji rozmaitych bytów algebraicznych, w szczególności zaś: algebr Clifforda, modułów spinorowych i działania tych pierwszych na tych drugich. Jej zastosowanie w interesującym nas kontekście wymaga wprowadzenia procedury zwanej stowarzyszeniem różności wyposażonej w działanie grupy Liego  $G$  z wiązką główną o grupie strukturalnej  $G$ . Procedura ta jest naturalnym teoriopolowym awatarem uniwersalnej konstrukcji homotopijnej przestrzeni ilorazowej (z jęz. ang. “homotopy quotient”) odgrywającej pierwszoplanową rolę w kontekście modelowania geometrii różniczkowej przestrzeni orbit działania grup topologicznych – w tej swojej wersji została ona po raz pierwszy pomyślana przez Cartana [Car50], a potem podchwycona i rozwinęta przez Borela, skąd nazwa: model Cartana–Borela, *cp.* [Tu20]. A że spektrum zastosowań fizykalnych rzeczonyj procedury wykracza daleko poza kontekst cliffordowski (i obejmuje tak istotne zagadnienia jak cechowanie, czyli ulokalnianie symetrii globalnych w teoriach pola (w którym to kontekście wprowadza w naturalny sposób obrazek defektowy), oraz modelowanie różnorodnych zjawisk w

teoriach z symetrią wycechowaną, jak choćby efekt Higgsa, którym poświęcony jest wykład monograficzny Autora pt. „Zastosowania teorii wiązek włóknistych w fizyce”), przeto omówimy ją ze szczegółami.

### 1. MOTYWACJA

Okazuje się, że wiązkę wektorową  $\mathbb{V}$  można odtworzyć (z dokładnością do izomorfizmu) z odnośnej wiązki reperów  $F_{GL}\mathbb{V}$  przez pewną sprytną konstrukcję, którą przedstawiamy poniżej. Jak wynika wprost z definicji  $F_{GL}\mathbb{V}$ , jest dobrze określone odwzorowanie (punktowej) ewaluacji

$$\widehat{ev} : F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{V} : ((\beta_x, x), v) \longmapsto \beta_x(v) \in \mathbb{V}_x.$$

Odwzorowanie to jest stałe na orbitach działania

$$\begin{aligned} \tilde{ev} & : GL(r; \mathbb{K}) \times (F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r}) \longrightarrow F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r} \\ & : (\chi, ((\beta_x, x), v)) \longmapsto ((\beta_x \circ \chi^{-1}, x), \chi(v)), \end{aligned}$$

zapisanego w terminach naturalnego (definiującego) działania grupy  $GL(r; \mathbb{K})$  na  $\mathbb{K}^{\times r}$ ,

$$ev : GL(r; \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{\times r} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times r} : (\chi, v) \longmapsto \chi(v).$$

To oznacza, że  $\widehat{ev}$  zstępuje na rozmaitość ilorazową  $(F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r})/GL(r; \mathbb{K})$  zdefiniowaną w odniesieniu do działania  $\tilde{ev}$ , której istnienie zapewnia Cor. 4.1 na gruncie Tw. 4.2. Innymi słowy,  $\widehat{ev}$  zadaje odwzorowanie

$$[\widehat{ev}] : (F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r})/GL(r; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{V}$$

$$(2) \quad : [((\beta_x, x), v)] \longmapsto \widehat{ev}((\beta_x, x), v) \equiv \beta_x(v)$$

które domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{V} \\ & \nearrow \widehat{ev} & \uparrow [\widehat{ev}] \\ F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r} & \xrightarrow{\pi_{(F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r})/GL(r; \mathbb{K})}} & (F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r})/GL(r; \mathbb{K}) \end{array} .$$

Zapisany na nim rzut kanoniczny  $\pi_{(F_{GL}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r})/GL(r; \mathbb{K})}$  na przestrzeń orbit jest – w świetle Tw. II.4.2 – gładką submersją, przeto wprost na mocy Stw. II.1-2.1 gładkość odwzorowania indukowanego  $[\widehat{ev}]$  jest implikowana przez gładkość odwzorowania  $\widehat{ev}$ . Przy tym bez trudu przekonujemy się, że w ograniczeniu do dowolnego włókna  $(\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{\times r})/GL(r; \mathbb{K})$ ,  $x \in B$  odwzorowanie to jest bijekcją. Istotnie, wybierzmy dowolną bazę  $\beta_x^* \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times r}, \mathbb{V}_x)$  i rozważmy zbiór  $S := \{((\beta_x^*, x), v) \mid v \in \mathbb{K}^{\times r}\}$ . Orbits dwóch dowolnych jego elementów,  $GL(r; \mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^*, x), v_1)$  i  $GL(r; \mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^*, x), v_2)$ , albo pokrywają się ze sobą, albo też są rozłączne (jako klasy abstrakcji relacji równoważności). Pierwsza z tych ewentualności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$((\beta_x^*, x), v_2) \in GL(r; \mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^*, x), v_1)$$

$$\iff \exists \chi \in GL(r; \mathbb{K}) : ((\beta_x^*, x), v_2) = ((\beta_x^* \circ \chi^{-1}, x), \chi(v_1)) \iff (\chi = \text{id}_{\mathbb{K}^{\times r}} \wedge v_2 = v_1),$$

zatem nietożsame elementy zbioru  $S$  należą do rozłącznych orbit. Pozostaje sprawdzić injektywność  $[\widehat{ev}]$ . W tym celu rozważmy konsekwencje równości

$$\beta_x^1(v_1) \equiv [\widehat{ev}][((\beta_x^1, x), v_1)] = [\widehat{ev}][((\beta_x^2, x), v_2)] \equiv \beta_x^2(v_2).$$

Ta jest równoważna równości

$$v_2 = \beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1(v_1),$$

która implikuje relację

$$v_2 \in GL(r; \mathbb{K}) \triangleright v_1,$$

a dalej także

$$((\beta_x^2, x), v_2) = ((\beta_x^1 \circ (\beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1)^{-1}, x), \beta_x^{2-1} \circ \beta_x^1(v_1)) \in \text{GL}(r; \mathbb{K}) \triangleright ((\beta_x^1, x), v_1).$$

Na tej podstawie wyciągamy wniosek o równości argumentów,

$$[((\beta_x^1, x), v_1)] = [((\beta_x^2, x), v_2)],$$

która przesądza o iniektywności  $[\widehat{e}\mathbb{V}]$ . Mamy zatem do czynienia z gładką bijekcją. Skonstruujemy jej gładką odwrotność. W tym celu użyjemy lokalnych trywializacji  $\tau_i : \pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \text{GL}(r; \mathbb{K})$ ,  $i \in I$  wiązki reperów stowarzyszonych z pokryciem  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , które w odwołaniu do tezy Stw. 23.3 pozwalają nam skonstruować lokalnie gładkie cięcia

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{F}_{\text{GLV}} : x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, e) \equiv (\beta_i(x), x) \in \text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{xr}, \mathbb{V}_x) \times \{x\},$$

przy czym pole baz  $\beta_i$  zależy (lokalnie) gładko od punktu w  $\mathcal{O}_i \subset B$ . Łatwo przekonujemy się, że odwzorowanie zadane lokalnie (nad  $\mathcal{O}_i \ni x$ ) w postaci

$$\Sigma_i \downarrow_{\mathbb{V}_x} : \mathbb{V}_x \longrightarrow (\text{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{xr}, \mathbb{V}_x) \times \mathbb{K}^{xr}) / \text{GL}(r; \mathbb{K}) : \nu \longmapsto [((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu)))]$$

jest (lokalną) odwrotnością  $[\widehat{e}\mathbb{V}]$ , oto bowiem

$$\begin{aligned} \Sigma_i \circ [\widehat{e}\mathbb{V}]([((\beta_x, x), v)]) &= \Sigma_i \circ \beta_x(v) = [((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v))] \\ &\equiv [((\beta_x \circ (\beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x)^{-1}, x), \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v))] = [((\beta_x, x), v)] \end{aligned}$$

a nadto – dla  $\nu \in \mathbb{V}_x$  –

$$[\widehat{e}\mathbb{V}] \circ \Sigma_i(\nu) = [\widehat{e}\mathbb{V}][((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu))] = \beta_i(x)(\beta_i(x)^{-1}(\nu)) = \nu.$$

I wreszcie na koniec upewniamy się, że odwzorowania lokalne  $\Sigma_i$  stanowią ograniczenia (do odnośnych elementów  $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  pokrycia przestrzeni totalnej  $\mathbb{V}$ ) odwzorowania globalnie gładkiego. W tym celu musimy najpierw ustalić regułę transformacyjną dla lokalnych wyborów bazy  $\beta_i$ . Niechaj  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{GL}(r; \mathbb{K})$  będą odwzorowaniami przejścia dla wybranych wcześniej trywializacji lokalnych  $\mathbb{F}_{\text{GLV}}$ , tj. – dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  oraz  $\chi \in \text{GL}(r; \mathbb{K})$  –

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, \chi) = (x, g_{ij}(x) \circ \chi).$$

Obliczamy wówczas

$$\begin{aligned} (\beta_j(x), x) &\equiv \tau_j^{-1}(x, \text{id}_{\mathbb{K}^{xr}}) = \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x)) = \tau_i^{-1}(x, \text{id}_{\mathbb{K}^{xr}}) \triangleleft g_{ij}(x) = (\beta_i(x), x) \triangleleft g_{ij}(x) \\ &\equiv (\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), \end{aligned}$$

czyli

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x),$$

a stąd już łatwo wyprowadzamy – dla dowolnego punktu  $\nu \in \mathbb{V}_x$ ,  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  – pożądaną tożsamość

$$\begin{aligned} \Sigma_j(\nu) &= [((\beta_j(x), x), \beta_j(x)^{-1}(\nu))] = [((\beta_i(x) \circ g_{ij}(x), x), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(\nu))] \\ &= [((\beta_i(x), x), \beta_i(x)^{-1}(\nu))] \equiv \Sigma_i(\nu). \end{aligned}$$

Dotychczasowe nasze rozważania pozwalają nam wypisać wprost naturalne trywializacje lokalne (złożenia  $[\widehat{e}\mathbb{V}]$  z rozkładami otrzymanych tym sposobem wektorów we włóknie w lokalnej bazie)

$$[\tau_i] : (\pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{xr}) / \text{GL}(r; \mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xr} : [((\beta_x, x), v)] \longmapsto (x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_x(v)),$$

o odwrotnościach

$$[\tau_i]^{-1} : \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xr} \xrightarrow{\cong} (\pi_{\mathbb{F}_{\text{GLV}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times \mathbb{K}^{xr}) / \text{GL}(r; \mathbb{K}) : (x, v) \longmapsto [((\beta_i(x), x), v)]$$

i tym samym zidentyfikować strukturę wiązki włóknistej na rozmaiłości ilorazowej  $(\mathbb{F}_{\text{GLV}} \times \mathbb{K}^{xr}) / \text{GL}(r; \mathbb{K})$ , przy czym jest jasne, że jest to wiązka wektorowa nad  $B$  o ciele bazowym  $\mathbb{K}$ . Odnotujmy na marginesie, że odwzorowania przejścia dla wypisanych tu trywializacji przyjmują – w dowolnym punkcie  $(x, v) \in \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{K}^{xr}$  – postać

$$[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}(x, v) = [\tau_i][((\beta_j(x), x), v)] = (x, \beta_i(x)^{-1} \circ \beta_j(x)(v)) = (x, g_{ij}(x)(v)),$$

identyczną jak w przypadku  $\mathbb{V}$ . Wobec swojej oczywistej  $\mathbb{K}$ -liniowości odwzorowanie  $[\widehat{e}\mathbb{V}]$  jawi się nam jako izomorfizm wiązek wektorowych

$$[\widehat{e}\mathbb{V}] : (\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V} \times \mathbb{K}^{\times r})/\text{GL}(r; \mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}.$$

Na gruncie powyższych i wcześniejszych rozważań możemy wyartykułować proste, acz strukturalne

**Stwierdzenie 1.** Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi (a zatem także trywializacjami lokalnymi) wiązki reperów wiązki wektorowej i trywializacjami lokalnymi wiązki wektorowej.

*Dowód:* Dowolne cięcie lokalne  $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}$ ,  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$  pozwala zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times r} : v \mapsto (\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)),$$

jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowe we włóknie i gładkie, o oczywistej odwrotności

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times r} \rightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) : (x, V) \mapsto \sigma(x)(V),$$

także gładkiej (i  $\mathbb{K}$ -liniowej). Własności te pozwalają zidentyfikować  $\tau_\sigma$  jako trywializację lokalną wiązki  $\mathbb{V}$  stowarzyszoną z cięciem lokalnym  $\sigma$  wiązki reperów.

Odwracając powyższe rozumowanie, dowolnej trywializacji lokalnej  $\tau : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times r}$  przyporządkowujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \rightarrow \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) : x \mapsto \tau^{-1}(x, \cdot).$$

Bez trudu przekonujemy się, że skonstruowane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, stwierdzamy równość

$$\forall_{(x, V) \in \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times r}} : \sigma_{\tau_\sigma}(x)(V) = \tau_\sigma^{-1}(x, V) = \sigma(x)(V),$$

a z niej wyprowadzamy tożsamość

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \forall_{v \in \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})} : \tau_{\sigma_\tau}(v) &= (\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma_\tau \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)) = (\pi_{\mathbb{V}}(v), \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot)^{-1}(v)) \\ &\equiv \tau \circ \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot)^{-1}(v)) = \tau(v), \end{aligned}$$

albowiem

$$\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot)(\text{pr}_2 \circ \tau(v)) = \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \text{pr}_2 \circ \tau(v)) \equiv \tau^{-1} \circ \tau(v) = v,$$

przeto

$$\tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot)^{-1}(v)) = \tau^{-1}(\pi_{\mathbb{V}}(v), \text{pr}_2 \circ \tau(v)) = v.$$

Wobec tego

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau.$$

□

oraz

**Stwierdzenie 2.** Dowolna rodzina trywializacji lokalnych wiązki reperów wiązki wektorowej indukuje rodzinę trywializacji lokalnych wiązki wektorowej (stowarzyszonych z tą samą rodziną podzbiorów otwartych ich wspólnej bazy) o tych samych odwzorowaniach przejścia.

*Dowód:* Niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{xr}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $(F_{GL}\mathbb{V}, B, GL(r; \mathbb{K}), \pi_{F_{GL}\mathbb{V}})$  zaś – wiązką jej reperów i niech  $\tau_i : \pi_{F_{GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times GL(r; \mathbb{K})$ ,  $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}(B)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  będą dwiema trywializacjami lokalnymi drugiej z nich, o niepustym przecięciu dziedzin,  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ , nad którym są określone odwzorowania przejścia  $g_{12} : \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \rightarrow GL(r; \mathbb{K})$ . Z każdą z trywializacji stowarzyszamy cięcie lokalne wedle formuły podanej w dowodzie Stw. 23.3,

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \pi_{F_{GL}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset F_{GL}\mathbb{V} : y \mapsto \tau_i^{-1}(y, \mathbf{1}_n),$$

a następnie używamy ich do skonstruowania odnośnych gładkich trywializacji lokalnych wiązki  $\mathbb{V}$  zgodnie z przepisem sformułowanym w dowodzie Stw. 1,

$$\tau_{\sigma_i} : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{xr} : v \mapsto (\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma_i \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)), \quad i \in \{1, 2\}.$$

O tym, że są to trywializacje o postulowanych odwzorowaniach przejścia, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnych  $(y, V) \in \mathcal{O}_{12} \times \mathbb{K}^{xr}$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) &= \tau_{\sigma_1}(\sigma_2(y)(V)) = (\pi_{\mathbb{V}}(\sigma_2(y)(V)), (\sigma_1 \circ \pi_{\mathbb{V}})(\sigma_2(y)(V))^{-1}(\sigma_2(y)(V))) \\ &= (y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_2(y)(V)), \end{aligned}$$

k który po uwzględnieniu ciągu równości

$$\sigma_2(y) \equiv \tau_2^{-1}(y, \mathbf{1}_n) = \tau_1^{-1}(y, g_{12}(y)) = \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \triangleleft g_{12}(y) \equiv \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \circ g_{12}(y) \equiv \sigma_1(y) \circ g_{12}(y)$$

odtwarza pożądaną wynik

$$\tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) = (y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_1(y) \circ g_{12}(y)(V)) \equiv (y, g_{12}(y)(V)).$$

□

## 2. ABSTRAKCJA

Z przedstawionego w poprzednim rozdziale studium (kanonicznego) przypadku możemy wyabstrahować strukturalne własności konstrukcji będącej jego przedmiotem, kluczowe dla konstrukcji tej powodzenia. Mamy zatem do czynienia z konstrukcją wiązki włóknistej „stowarzyszonej” z daną wiązką główną poprzez działanie grupy strukturalnej tej ostatniej na ustalonej rozmaitości różniczkowalnej, przy czym owa rozmaitość jest promowana do rangi włókna typowego konstruowanej wiązki, a dane lokalne (trywializacje lokalne i odpowiadające im odwzorowania przejścia) wyjściowej wiązki głównej indukują odnośne dane lokalne tejsze. Stosownej formalizacji tych naszych spostrzeżeń dostarcza

**Definicja 1.** Niechaj  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  będzie wiązką główną,  $M$  zaś – rozmaitością z gładkim działaniem (lewostronnym)  $\lambda : G \times M \rightarrow M$  grupy Liego  $G$ . **Wiązka stowarzyszona z  $P_G$  poprzez  $\lambda$**  to wiązka włóknista

$$(P_G \times_{\lambda} M, B, M, \pi_{P_G \times_{\lambda} M})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna  $P_G \times_{\lambda} M \equiv (P_G \times M)/G$  będąca rozmaitością ilorazową określoną – według schematu opisanego w Cor. II.4.1 (na gruncie Tw. II.4.2) i w użytym tam zapisie – przez działanie z Równ. (II.4.2);
- rzut na bazę

$$\pi_{P_G \times_{\lambda} M} : P_G \times_{\lambda} M \rightarrow B : [(p, m)] \mapsto \pi_{P_G}(p).$$

Przy tym trywializacje lokalne  $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  wiązki głównej  $P_G$  stowarzyszone z pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$  indukują trywializacje lokalne

$$\tilde{\tau}_i : \pi_{P_G \times_{\lambda} M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times M : [(p, m)] \mapsto (\pi_{P_G}(p), \lambda_{p \circ \tau_i(p)}(m)),$$

o odwzorowaniach przejścia (indukowanych z tych dla  $P_G$ )

$$\tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times M \ni (x, m) \mapsto (x, \lambda_{g_{ij}(x)}(m)).$$

Ustaliwszy (dowolnie) punkt  $x \in B$ , wybierzmy (także dowolnie)  $p_* \in (P_G)_x$ . Dyfeomorfizmy

$$[p_*]_\lambda : M \xrightarrow{\cong} (P_G \times_\lambda M)_x : m \mapsto [(p_*, m)],$$

o odwrotnościach

$$[p_*]_\lambda^{-1} : (P_G \times_\lambda M)_x \xrightarrow{\cong} M : [(p, m)] \mapsto \lambda_{\phi_{P_G}(p_*, p)}(m)$$

i oczywistej własności

$$(3) \quad \forall g \in G : [p_* \triangleleft g]_\lambda = [p_*]_\lambda \circ \lambda_g,$$

nosząc miano **izomorfizmów modelujących włókna**. Indukują one **izomorfizmy transportu włókna**

$$\begin{aligned} [p_2, p_1]_\lambda \equiv [p_2]_\lambda \circ [p_1]_\lambda^{-1} & : (P_G \times_\lambda M)_{\pi_{P_G}(p_1)} \xrightarrow{\cong} (P_G \times_\lambda M)_{\pi_{P_G}(p_2)} \\ & : [(p, m)] \mapsto [(p_2, \lambda_{\phi_{P_G}(p_1, p)}(m))], \end{aligned}$$

określone dla dowolnej pary  $(p_1, p_2) \in P_G$ .

Dla dowolnej pary  $(P_G \times_{\lambda_\alpha} M_\alpha, B, M_\alpha, \pi_{P_G \times_{\lambda_\alpha} M_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wiązek stowarzyszonych z tą samą wiązką główną  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  określamy także **niezmiennik wiązek stowarzyszonych** jako morfizm wiązek włóknistych

$$(\Phi, \text{id}_B) : P_G \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow P_G \times_{\lambda_2} M_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny, wypisany dla dowolnej pary punktów  $p_1, p_2 \in P_G$ ,

$$\begin{array}{ccc} (P_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{P_G}(p_1)} & \xrightarrow{[p_2, p_1]_{\lambda_1}} & (P_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{P_G}(p_2)} \\ \downarrow \Phi \upharpoonright_{(P_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{P_G}(p_1)}} & & \downarrow \Phi \upharpoonright_{(P_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{P_G}(p_2)}} \\ (P_G \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{P_G}(p_1)} & \xrightarrow{[p_2, p_1]_{\lambda_2}} & (P_G \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{P_G}(p_2)} \end{array} .$$

**Uwaga 1.** Istnienie struktury rozmaitości na przestrzeni orbit  $P_G \times_\lambda M$  działania  $\tilde{\lambda}$  jest bezpośrednią konsekwencją Tw. II.4.2, na którego przywołanie w powyższym kontekście pozwala Cor. II/4.1. Przy tym gładkość rzutu na bazę  $\pi_{P_G \times_\lambda M}$  wynika tu wprost ze Stw. II.1-2.1, kiedy zauważyć, że rzut ten domyka diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \pi_{P_G} \circ \text{pr}_1 & \uparrow \pi_{P_G \times_\lambda M} \\ P_G \times M & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times M)/G}} & P_G \times_\lambda M \end{array} ,$$

w którym  $\pi_{(P_G \times M)/G}$  jest surjektywną submersją (na mocy tegoż Tw. II.4.2), a  $\pi_{P_G} \circ \text{pr}_1$  jest jawnie gładkie. Jako że to ostatnie odwzorowanie także jest submersją, przeto własność tę ma  $\pi_{P_G \times_\lambda M}$ , o czym przekonuje tożsamość uzyskana w obrazie powyższego diagramu względem funktora stycznego.

Przejdziemy do zbadania trywializacji lokalnych, zaczynając od sprawdzenia sensowności ich definicji. Musimy w tym celu pokazać, że wartość przyjmowana przez odwzorowanie  $\tilde{\tau}_i$  na klasie  $[(p, m)]$  nie zależy od wyboru reprezentanta tej ostatniej. Obliczamy przeto

$$\begin{aligned} (\pi_{P_G}(p \triangleleft g), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p \triangleleft g), \lambda(g^{-1}, m))) &= (\pi_{P_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g, \lambda(g^{-1}, m))) \\ &= (\pi_{P_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g \cdot g^{-1}, m)) = (\pi_{P_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m)). \end{aligned}$$

Ponadto ponieważ odwzorowania

$$\tau_i : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \longrightarrow \mathcal{O}_i \times M : (p, m) \longmapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda_{\text{pr}_2 \circ \tau_i}(p)(m)), \quad i \in \{1, 2\}$$

są jawnie gładkie, a przy tym pozostają z  $\tilde{\tau}_i$  w relacji opisywanej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_i \times M \\ & \nearrow \tau_i & \uparrow \tilde{\tau}_i \\ \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M & \xrightarrow{\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}} & \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \end{array},$$

w którym rzut kanoniczny  $\pi_{(\mathbb{P}_G \times M)/G}$  jest – wprost na mocy Tw.II.4.2 i Cor.II.4.1 – gładki, przeto w świetle Stw.II.1-2.1 także odwzorowania  $\tilde{\tau}_i$  są gładkie. Gładkość (także lokalna) ich odwrotności

$$\tilde{\tau}_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times M \longrightarrow \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, m) \longmapsto [(\tau_i^{-1}(x, e), m)]$$

nie budzi wątpliwości. We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładamy *implicite* sensowność definicji odwzorowań  $\tilde{\tau}_i$  i  $\tilde{\tau}_i^{-1}$ , która wymaga odrębnej weryfikacji – ta usprawiedliwia *a posteriori* dokonaną przez nas identyfikację włókna typowego

$$\pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}^{-1}(\{ \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}([ (p, m) ]) \}) \cong M, \quad [(p, m)] \in \mathbb{P}_G \times_\lambda M$$

rekonstruowanej tu wiązki włóknistej. Bez trudu dowodzimy pożądaných tożsamości: oto więc dla  $(x, m) \in \mathcal{O}_i \times M$  zachodzi

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_i^{-1}(x, m) &= \tilde{\tau}_i([(\tau_i^{-1}(x, e), m)]) = (\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_i^{-1}(x, e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, e), m)) \\ &= (x, \lambda(e, m)) = (x, m), \end{aligned}$$

a dla  $[(p, m)] \in \mathbb{P}_G \times_\lambda M$ ,  $p = \tau_i^{-1}(x, g)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i^{-1} \circ \tilde{\tau}_i([ (p, m) ]) &= \tilde{\tau}_i^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m)) = [(\tau_i^{-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e), \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i(p), m))] \\ &= [(\tau_i^{-1}(x, e), \lambda(g, m))] = [(\tau_i^{-1}(x, e) \triangleleft g, m)] = [(\tau_i^{-1}(x, g), m)] \equiv [(p, m)]. \end{aligned}$$

Wreszcie też na koniec obliczamy

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, m) &\equiv \tilde{\tau}_i([\tau_j^{-1}(x, e), m]) = (x, \lambda(\text{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, e), m)) \\ &= (x, \lambda(\text{pr}_2(x, g_{ij}(x)), m)) \equiv (x, \lambda(g_{ij}(x), m)). \end{aligned}$$

Konstrukcja wiązki stowarzyszonej jest zatem dobrze określona.

Rozważmy następnie odwzorowanie

$$[p_*]_\lambda^{-1} : (\mathbb{P}_G \times_\lambda M)_x \longrightarrow M : [(p, m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(m), \quad p_* \in (\mathbb{P}_G)_x.$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta  $(\tilde{p}, \tilde{m}) \in [(p, m)]$  obliczamy

$$\lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, \tilde{p})}(\tilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)} \circ \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \tilde{p})}(\tilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p)}(m).$$

Ponadto jest ono bijekcją, albowiem prawdziwą jest implikacja

$$\begin{aligned} [p_*]_\lambda^{-1}([ (p_2, m_2) ]) = [p_*]_\lambda^{-1}([ (p_1, m_1) ]) &\iff m_2 = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(m_1) \\ \implies [ (p_2, m_2) ] = [ (p_2, \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(m_1)) ] &= [ (p_2 \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1), m_1) ] = [ (p_1, m_1) ], \end{aligned}$$

wykorzystująca kocykliczność funkcji ilorazowej i dowodząca iniektywności  $[p_*]_\lambda^{-1}$ , a do tego dowolny punkt  $m \in M$  możemy zapisać w postaci

$$m = [p_*]_\lambda^{-1}([ (p_*, m) ]),$$

co zaświadcza o surjektywności tego odwzorowania, wskazując w jawny sposób jego odwrotność

$$[p_*]_\lambda : M \longrightarrow (\mathbb{P}_G \times_\lambda M)_x : m \longmapsto [(p_*, m)].$$

Istotnie, odwzorowanie  $[p_*]_\lambda$  spełnia tożsamości

$$[p_*]_\lambda^{-1} \circ [p_*]_\lambda(m) = \lambda_{\phi_{P_G}(p_*, p_*)}(m) = \lambda_e(m) = m,$$

$$[p_*]_\lambda \circ [p_*]_\lambda^{-1}([(p, m)]) = [(p_*, \lambda_{\phi_{P_G}(p_*, p)}(m))] \equiv [(p_* \triangleleft \phi_{P_G}(p_*, p), m)] = [(p, m)].$$

Jest ono jawnie gładkie jako superpozycja włożenia  $(p_*, \text{id}_M) : M \rightarrow \{p_*\} \times M \subset (P_G)_{\pi_{P_G}(p_*)} \times M$  i surjektywnej submersji  $\pi_{(P_G \times M)/G} : P_G \times M \rightarrow (P_G \times M)/G$ . Gładkość  $[p_*]_\lambda^{-1}$  wynika natomiast z tezy Stw. II.1-2.1 odniesionej do diagramu przemiennej

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow^{\lambda(\phi_{P_G}(p_*, p_{r_1}), p_{r_2})} & \uparrow [p_*]_\lambda^{-1} \\ (P_G)_x \times M & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times G)/G}|_{(P_G)_x \times M}} & (P_G \times_\lambda M)_x \end{array}$$

o submersyjnej surjekcji na krawędzi poziomej. Konstrukcja dyfeomorfizmu  $[p_*]_\lambda^{-1}$  stanowi zatem niezależny (od wcześniejszej konstrukcji trywializacji lokalnych) dowód słuszności przedłożonej przez nas identyfikacji włókna typowego wiązki stowarzyszonej. Warto przy tym zwrócić uwagę na naturalność tego dyfeomorfizmu, maskowaną przez jego definicję, będącą artefaktem swobody wyboru reprezentanta orbity-argumentu  $[(p, m)]$ . Istotnie, jeśli – korzystając z wykazanej niezależności wyniku od tegoż wyboru – dokonać go w sposób roztropny, tj. w postaci  $(p_*, \tilde{m}) \in [(p, m)]$ , to otrzymujemy oczywistą postać przyporządkowania:

$$[p_*]_\lambda^{-1}([(p, m)]) \equiv [p_*]_\lambda^{-1}([(p_*, \tilde{m})]) = \lambda_{\phi_{P_G}(p_*, p_*)}(\tilde{m}) = \tilde{m}.$$

### Przykłady 1.

- (1) Wiązka wektorowa  $\mathbb{V}$  (rzędu  $n$ ) jest wiązką stowarzyszoną z wiązką (główną) reperów  $F_{GL}\mathbb{V}$  poprzez działanie definiujące (ewaluację),

$$\mathbb{V} \cong F_{GL}\mathbb{V} \times_{\text{ev}} \mathbb{K}^{nr}.$$

- (2) **Wiązka dołączona**

$$(\text{Ad } P_G \equiv P_G \times_{\text{Ad}} G, B, G, \pi_{P_G \times_{\text{Ad}} G} \equiv \pi_{\text{Ad } P_G}).$$

- (3) Wiązka główna  $P_G$  może być zrealizowana jako wiązka stowarzyszona

$$(P_G \times_\ell G, B, G, \pi_{P_G \times_\ell G}).$$

Stosowny izomorfizm wiązek włóknistych to

$$\tilde{\tau} : P_G \times_\ell G \rightarrow P_G : [(p, g)] \mapsto p \triangleleft g,$$

przy czym jego gładkość wynika z tego, że domyka on diagram przemiennej

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow^r & \uparrow \pi_{P_G \times_\ell G} \\ P_G \times G & \xrightarrow{\pi_{(P_G \times G)/G}} & P_G \times_\ell G \end{array}$$

w którym  $\pi_{(P_G \times G)/G}$  jest surjektywną submersją,  $r$  zaś – odwzorowaniem gładkim. Odwrotność  $\tilde{\tau}$  jest dana w (jawnie gładkiej) postaci

$$\tilde{\tau}^{-1} : P_G \rightarrow P_G \times_\ell G : p \mapsto [(p, e)].$$

Na wiązce stowarzyszonej  $P_G \times_\ell G$  jest określone działanie prawostronne grupy  $G$  w postaci

$$\tilde{\tau} : (P_G \times_\ell G) \times G \rightarrow P_G \times_\ell G : [(p, g)], h \mapsto [(p, g \cdot h)],$$

względem którego każde z włókien jest torskorem. Izomorfizm  $\tilde{\tau}$  jest G-ekwiwariantny,

$$\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}([(p, g)], h) = \tilde{\tau}([(p, g \cdot h)]) = p \triangleleft (g \cdot h) = (p \triangleleft g) \triangleleft h = r \circ \tilde{\tau}([(p, g)], h),$$

mamy zatem do czynienia z izomorfizmem wiązek głównych.

W poszukiwaniu automorfizmów wiązki stowarzyszonej  $P_G \times_{\ell} G$  zauważamy, że ze względu na przemienność działania regularnego lewostronnego  $\ell$  z działaniem regularnym prawostronnym  $\wp : G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \cdot h$  to ostatnie indukuje – na mocy Stw. 3, a dla dowolnego  $g \in G$  – niezmiennik wiązek

$$\Phi[r_g] : P_G \times_{\ell} G \circlearrowleft : [(p, h)] \mapsto \Phi[r_g]^{\pi_{P_G}^{(p)}}([(p, h)]),$$

przy czym

$$\begin{aligned} \Phi[r_g]^{\pi_{P_G}^{(p)}}([(p, h)]) &= [p]_{P_G \times_{\ell} G} \circ r_g \circ [p]_{P_G \times_{\ell} G}^{-1}([(p, h)]) = [p]_{P_G \times_{\ell} G} \circ r_g \circ \ell_{\phi_{P_G}(p, p)}(h) \\ &= [p]_{P_G \times_{\ell} G} \circ r_g(h) = [p]_{P_G \times_{\ell} G}(h \cdot g) = [(p, h \cdot g)] \equiv \tilde{r}_g([(p, h)]), \end{aligned}$$

czyli

$$\Phi[r_g] \equiv \tilde{r}_g,$$

a ponieważ

$$[(p, h)] = [(p \triangleleft h, e)] \equiv \tilde{\tau}^{-1}(p \triangleleft h)$$

oraz

$$[(p, h \cdot g)] = [(p \triangleleft h \cdot g, e)] = [((p \triangleleft h) \triangleleft g, e)] = [(r_g(p \triangleleft h), e)] \equiv \tilde{\tau}^{-1} \circ r_g(p \triangleleft h),$$

zatem

$$\tilde{\tau} \circ \Phi[r_g] \circ \tilde{\tau}^{-1} = r_g.$$

W tym więc sensie automorfizmy  $\Phi[r_g]$  są indukowane przez  $r$ , a o tym ostatnim możemy myśleć jako o modelowym niezmienniku wiązek.

Celem praktycznym (np. fizycznym) konstrukcji wiązek stowarzyszonych jest uzyskanie gładkich dystrybucji rozmaitości określonego (izo)typu  $M$  nad zadaną bazą  $B$  (np. czasoprzestrzenią) będących nośnikiem wyróżnionego działania ustalonej grupy Liego  $G$  (np. symetrii teorii fizycznej), które ma charakter lokalny nad bazą. Innymi słowy, jest nim stworzenie rozmaitości lokalnie modelowanej na  $\mathcal{O} \times M$ ,  $\mathcal{O} \subset B$  z działaniem  $G$  lokalnie modelowanym na  $\lambda$ . O tym, że tak zdefiniowany cel został skutecznie zrealizowany zaświadczą dwa poniższe stwierdzenia, z których pierwsze dostarcza zarazem „usprawiedliwienia” *ex post* dokonanego przez nas nieoczywistego wyboru (podklasy) morfizmów wiązek stowarzyszonych.

**Stwierdzenie 3.** Wiązki stowarzyszone z daną wiązką główną  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wraz z odnośnymi niezmiennikami wiązek stowarzyszonych tworzą **kategorię wiązek stowarzyszonych z wiązką główną**  $P_G$ , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{AssBun}(P_G).$$

Kategoria ta jest kanonicznie równoważna kategorii  $\mathbf{Man}_G$  rozmaitości z (lewostronnym) działaniem gładkim o morfizmach danych przez odwzorowania G-ekwiwariantne.

*Dowód:* Pierwsza część tezy stanowi ledwie wskazanie klasy morfizmów przez nas rozpatrywanych i jako taka nie wymaga odrębnego dowodu (niezmienniki wiązek można w oczywisty sposób składać, a ponadto morfizm identycznościowy jest – rzecz jasna – niezmiennikiem wiązek). Także wzajem jednoznaczna odpowiedniość między obiektami kategorii  $\mathbf{AssBun}(P_G)$  i G-rozmaitościami jest oczywista. Jedynym zatem, co wymaga sprawdzenia, jest stosowna bijektywna odpowiedniość między niezmiennikami wiązek stowarzyszonych i odwzorowaniami G-ekwiwariantnymi.

Niechaj  $(\Phi, \text{id}_B) : P_G \times_{\lambda_1} M_1 \rightarrow P_G \times_{\lambda_2} M_2$  będzie niezmiennikiem wiązek, a wtedy możemy zdefiniować – dla pewnego (dowolnego) punktu  $p \in P_G$  – odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\chi[\Phi] := [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} : M_1 \xrightarrow{\cong} (P_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{P_G}(p)} \rightarrow (P_G \times_{\lambda_2} M_2)_{\pi_{P_G}(p)} \xrightarrow{\cong} M_2,$$

które wobec definiującej własności  $\Phi$ ,

$$\Phi \circ [p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1} = [p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi,$$

nie zależy od wyboru punktu  $p$  użytego w jego definicji. G-ekwiwariantność tak określonych odwzorowań,

$$\chi[\Phi] \in \text{Hom}_G(M_1, M_2),$$

wynika wprost z bezpośredniego rachunku, odwołującego się do Równ. (3) i przeprowadzonego poniżej dla dowolnych  $(p, g) \in P_G \times G$ ,

$$\begin{aligned} \chi[\Phi] \circ \lambda_{1g} &\equiv [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ ([p]_{\lambda_1} \circ \lambda_{1g}) = [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} \equiv ([p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \lambda_{2g^{-1}})^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} \\ &= \lambda_{2g} \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1} = \lambda_{2g} \circ [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ \Phi \circ [p]_{\lambda_1} \equiv \lambda_{2g} \circ \chi[\Phi]. \end{aligned}$$

I odwrotnie, z każdym odwzorowaniem  $\chi \in \text{Hom}_G(M_1, M_2)$  możemy stowarzyszyć odwzorowanie (gładkie)

$$\begin{aligned} \Phi[\chi]^{\pi_{P_G(p)}} &:= [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} : (P_G \times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{P_G(p)}} \longrightarrow (P_G \times_{\lambda_1} M_2)_{\pi_{P_G(p)}} \\ &: [(p, m)] \longmapsto [(p, \chi(m))], \end{aligned}$$

zależne jedynie od rzutu  $p \in P_G$  na bazę wiązki  $B$ ,

$$\begin{aligned} \Phi[\chi]^{\pi_{P_G(p \triangleleft g)}} &= [p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ (\lambda_{2g} \circ \chi \circ \lambda_{1g^{-1}}) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ (\lambda_{1g} \circ \lambda_{1g^{-1}}) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \equiv \Phi[\chi]^{\pi_{P_G(p)}}, \end{aligned}$$

i z tej racji określające niezmiennik wiązek dany wzorem

$$\Phi[\chi] : P_G \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow P_G \times_{\lambda_2} M_2 : [(p, m)] \longmapsto \Phi[\chi]^{\pi_{P_G(p)}}([(p, m)]).$$

Istotnie, obliczamy

$$\begin{aligned} \Phi[\chi] \circ [p_2, p_1]_{\lambda_1} &\equiv ([p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_2]_{\lambda_1}^{-1}) \circ ([p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}) = [p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= ([p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1}) \circ ([p_1]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}) \equiv [p_2, p_1]_{\lambda_2} \circ \Phi[\chi]. \end{aligned}$$

Skonstruowane tu przyporządkowania

$$\text{Hom}_{\mathbf{AssBun}(P_G)}(P_G \times_{\lambda_1} M_1, P_G \times_{\lambda_2} M_2) \longrightarrow \text{Hom}_G(M_1, M_2) : (\Phi, \text{id}_B) \longmapsto \chi[\Phi]$$

oraz

$$\text{Hom}_G(M_1, M_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{AssBun}(P_G)}(P_G \times_{\lambda_1} M_1, P_G \times_{\lambda_2} M_2) : \chi \longmapsto (\Phi[\chi], \text{id}_B)$$

są wzajem odwrotne, a każde z nich jest funktorialne. Istotnie, w przypadku rozmaitości  $M$  z działaniem  $\lambda : G \times M \longrightarrow M$  otrzymujemy, w dowolnym punkcie  $p \in P_G$ , równość

$$\Phi[\text{id}_M]^{\pi_{P_G(p)}} = [p]_{\lambda_2} \circ \text{id}_B \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = \text{id}_{(P_G \times_{\lambda} M)_{\pi_{P_G(p)}}},$$

czyli też tożsamość

$$\Phi[\text{id}_M] = \text{id}_{P_G \times_{\lambda} M},$$

a nadto dla dowolnej pary odwzorowań G-ekwiwariantnych  $\chi_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha+1}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  pomiędzy G-rozmaitościami  $M_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2, 3\}$  z odnośnymi działaniami  $\lambda_\beta : G \times M_\beta \longrightarrow M_\beta$  otrzymujemy oczekiwaną tożsamość (wypisaną dla dowolnego  $p \in P_G$ )

$$\Phi[\chi_2 \circ \chi_1] \equiv [p]_{\lambda_3} \circ (\chi_2 \circ \chi_1) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_3} \circ \chi_2 \circ [p]_{\lambda_2}^{-1} \circ [p]_{\lambda_2} \circ \chi_1 \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \equiv \Phi[\chi_2] \circ \Phi[\chi_1].$$

Analogiczny argument przekonuje nas o funktorialności odwzorowania odwrotnego.  $\square$

**Uwaga 2.** Termin „wiązka dołączona” bywa używany w literaturze w odniesieniu do wiązki stowarzyszonej

$$(\text{ad } P_G \equiv P_G \times_{T_e \text{Ad}} \mathfrak{g}, B, \mathfrak{g}, \pi_{P_G \times_{T_e \text{Ad}} \mathfrak{g}}),$$

o włóknie typowym tożsamym z algebrą Liego  $\mathfrak{g}$  grupy Liego  $G$ .

**Uwaga 3.** Zanim postąpimy dalej w naszej dyskusji stowarzyszenia, zatrzymamy się na chwilę nad fizykalnie istotnym zagadnieniem, jakim jest anatomia cięć wiązki stowarzyszonej. Jako że dyskusja cięć lokalnych w swym aspekcie technicznym nie różni się od dyskusji cięć globalnych, skupimy się na tych ostatnich, mając na względzie resztę wykładu (oraz zastosowania fizykalne, jak np. konstrukcja sektora  $G$ -zwichrowanego w teorii pola z wycechowaną symetrią  $\lambda$ , modelującej fizykę o wewnętrznych stopniach swobody  $M//G$  nad punktem czasoprzestrzeni). Niechaj zatem  $\phi \in \Gamma(P_G \times_\lambda M)$  będzie takim cięciem. W ograniczeniu do dziedziny  $\mathcal{O}_i$  ( $i \in I$ ) lokalnego cięcia  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow P_G$  wiązki głównej, więc na bazie odnośnej trywializacji  $\tilde{\tau}_i \equiv \tilde{\tau}_{\sigma_i} : \pi_{P_G \times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times M$ , cięcie  $\phi$  staje się cięciem wiązki  $P_G \times_\lambda M \upharpoonright_{\mathcal{O}_i}$ , przeto w obrazie  $\tilde{\tau}_i$  przyjmuje postać

$$\tilde{\tau}_i \circ \phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} = (\text{id}_{\mathcal{O}_i}, \mu_i)$$

dla pewnego odwzorowania (lokalnie) gładkiego  $\mu_i : \mathcal{O}_i \rightarrow M$ . Przywoławszy postać odwrotności trywializacji  $\tilde{\tau}_i$ , odnajdujemy lokalną prezentację rozpatrywanego cięcia globalnego:

$$\phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} = \tilde{\tau}_i^{-1} \circ (\text{id}_{\mathcal{O}_i}, \mu_i) = [(\tau_i^{-1}(\cdot, e), \mu_i(\cdot))],$$

czyli

$$\phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} = [(\sigma_i(\cdot), \mu_i(\cdot))],$$

gdzie  $\sigma_i \equiv \sigma_{\tau_i}$  jest lokalnym unitalnym cięciem płaskim  $P_G$  (stowarzyszonym z  $\tau_i$ ). Globalność  $\phi$  implikuje równość

$$[(\sigma_i(x), \mu_i(x))] = \phi(x) = [(\sigma_j(x), \mu_j(x))] = [(\sigma_i(x) \triangleleft_{g_{ij}(x)} \mu_j(x))] = [(\sigma_i(x), \lambda_{g_{ij}(x)}(\mu_j(x)))]$$

w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ , z której wywodzimy relację

$$(4) \quad \mu_i(x) = \lambda_{g_{ij}(x)}(\mu_j(x)),$$

spełnianą przez składowe z  $M$  lokalnej prezentacji *globalnego* cięcia wiązki stowarzyszonej. Będziemy odtąd pisać w skrócie

$$\phi = [(\sigma, \mu)].$$

Wybór bazowego cięcia wiązki głównej jest dowolny,

$$[(\sigma_i(\cdot), \mu_i(\cdot))] = [(\sigma_i(\cdot) \triangleleft_{h_i(\cdot)} \lambda_{h_i(\cdot)}(\mu_i(\cdot)))] ,$$

możemy zatem (i będziemy odtąd nieodmiennie) reprezentować *lokalnie* dowolne cięcie globalne w ogólnej postaci

$$\phi \upharpoonright_{\mathcal{O}} = [(\sigma, \mu)],$$

tj. jako  $G$ -orbitę pary złożonej z lokalnego cięcia  $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow P_G$  wiązki głównej  $P_G$  (nad pewnym zbiorem otwartym  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(B)$ ) i lokalnie gładkiego odwzorowania  $\mu : \mathcal{O} \rightarrow M$ , pamiętając o prawie zszycia (4) na przecięciach dziedzin takich prezentacji lokalnych (dla pary cięć  $\sigma, \sigma'$  będzie to po prostu  $\mu(x) = \lambda_{\phi_{P_G}(\sigma(x), \sigma'(x))}(\mu'(x))$ ).

Tak wyposażeni, wracamy do rozważań nad strukturą wiązek stowarzyszonych. Naszym celem jest zrozumienie nietrywialnych relacji pomiędzy wyróżnioną wiązką stowarzyszoną, jaką jest wiązka dołączona  $\text{Ad } P_G$ , i automorfizmami wiązki głównej  $P_G$  zstępującymi – poprzez wiązkę rozszerzoną  $\pi_{P_G} \circ \text{pr}_1 : P_G \times M \rightarrow B$  – do wiązki stowarzyszonej  $P_G \times_\lambda M$ . Zstąpienie to ma fundamentalne znaczenie w zastosowaniach rozważanej konstrukcji w kontekście modelowania teorii pola z cechowaniem, którego to wszakże wątku nie rozwiniemy szerzej (na tym wykładzie). Tymczasem zajmijmy się strukturą wiązki dołączonej. Do jej wygodnego opisu potrzebujemy

**Definicja 2.** **Grupoid** to mała kategoria (patrz: Def. I.1-2.1), w której wszystkie morfizmy są odwracalne. Jest to zatem siódemka  $\mathbf{Gr} = (\text{ObGr} \equiv M, \text{MorGr} \equiv \mathcal{G}, s, t, \text{Id}, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1})$  – zapisywana w skrócie symbolem  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  – złożona z pary zbiorów:

- **zbiór obiektów**  $M$ ;
- **zbiór strzałek**  $\mathcal{G}$ ,

oraz piątki odwzorowań struktury:

- (**odwzorowania**) **źródła** lub **początku**  $s : \mathcal{G} \rightarrow M$ ;
- (**odwzorowania**) **celu** lub **końca**  $t : \mathcal{G} \rightarrow M$ ;
- (**odwzorowania**) **jedności**  $\text{Id} : M \rightarrow \mathcal{G}, m \mapsto \text{Id}_m$ ;
- (**odwzorowania**) **odwrotności**  $\text{Inv} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, g \mapsto \text{Inv}(g) \equiv g^{-1}$ ;
- (**odwzorowania**) **mnożenia**  $m : \mathcal{G}_s \times_t \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, (g, h) \mapsto m(g, h) \equiv g.h$ ,

spełniających warunki (w mocy, ilekroć odnośne wyrażenia są dobrze określone):

- (i)  $s(g.h) = s(h), t(g.h) = t(g)$ ;
- (ii)  $(g.h).k = g.(h.k)$ ;
- (iii)  $\text{Id}_{t(g)}.g = g = g.\text{Id}_{s(g)}$ ;
- (iv)  $s(g^{-1}) = t(g), t(g^{-1}) = s(g), g.g^{-1} = \text{Id}_{t(g)}, g^{-1}.g = \text{Id}_{s(g)}$ .

**Morfizm** między grupoidami  $\mathbf{Gr}_A, A \in \{1, 2\}$  to funktor  $\Phi : \mathbf{Gr}_1 \rightarrow \mathbf{Gr}_2$ .

**Grupoid Liego** to grupoid, którego zbiory: obiektów i strzałek są gładkimi rozmaitościami, którego odwzorowania struktury są gładkie i którego odwzorowania początku i końca są surjektywnymi submersjami. Morfizm między dwoma grupoidami Liegogo funktor pomiędzy nimi o składowych: obiektowej i morfizmowej gładkich.

## Przykłady 2.

- (1) Dowolna grupa Liego  $(G, m_G, \text{Inv}_G, e)$  zadaje grupoid Liego

$$\mathbf{BG} \equiv (\{\bullet\}, G, \bullet, \bullet, e, m_G, \text{Inv}_G),$$

o rozmaitości obiektów danej przez singleton  $\{\bullet\}$ . Grupoid ten określamy mianem (**grupoidu wypętlenia**  $G$  (z jęz. ang. ‘delooping’).

- (2) Dowolna rozmaitość gładka  $M \in \mathbf{Man}$  zadaje grupoid Liego

$$\text{Pair}(M) \equiv (M, M \times M, \text{pr}_2, \text{pr}_1, \Delta, \text{pr}_{1,4}, \tau),$$

o jedności  $\Delta : M \rightarrow M \times M, m \mapsto (m, m)$ , mnożeniu  $\text{pr}_{1,4} : (M \times M) \xrightarrow{\text{pr}_2 \times \text{pr}_1} (M \times M) \rightarrow M \times M, ((m_4, m_2), (m_2, m_1)) \mapsto (m_4, m_1)$  oraz odwrotności  $\tau : M \times M \rightarrow M \times M, (m_1, m_2) \mapsto (m_2, m_1)$ . Grupoid ten jest nazywany **grupoidem par**  $M$ .

- (3) Dla dowolnych rozmaitości gładkich  $M, Y \in \mathbf{Man}$  i surjektywnej submersji  $\pi : Y \twoheadrightarrow M$  dany jest grupoid Liego

$$\text{Pair}_\pi(Y) \equiv (Y, Y \xrightarrow{\pi \times \pi} Y, \text{pr}_2, \text{pr}_1, \Delta, \text{pr}_{1,4}, \tau) \subset \text{Pair}(Y),$$

zdefiniowany w zapisie przykładu poprzedniego. Zwiemy go **grupoidem submersji**  $\pi$ .

- (4) Dla dowolnej grupy Liego  $G$  i rozmaitości gładkiej  $M$ , na której  $G$  działa gładko poprzez  $\lambda : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ , dany jest grupoid Liego

$$G \times_\lambda M \equiv (M, G \times M, \text{pr}_2, \tilde{\lambda} \equiv \text{ev} \circ (\lambda \times \text{id}_M), (e, \cdot), (m_G \circ \text{pr}_{1,3}, \text{pr}_4), (\text{Inv}_G \circ \text{pr}_1, \tilde{\lambda})),$$

zdefiniowany przy użyciu odwzorowania ewaluacji  $\text{ev} : \text{Diff}(M) \times M \rightarrow M, (f, m) \mapsto f(m)$ . Nosi on miano **grupoidu działania**  $\lambda$ . W ramach zwyczajowego nadużycia zapisu utożsamiamy  $\lambda$  z  $\tilde{\lambda}$ .

Możemy już teraz wysłowić

**Stwierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Przykł. 1 (2). Istnieje kanoniczna struktura grupoidu Liego  $\text{AdP}_G \rightrightarrows B$  na  $\text{AdP}_G$  o charakterze wiązki grup, tj. lokalnie modelowana na strukturze grupy na włóknie typowym  $G$ . Grupoid ten określamy mianem **grupoidu dołączonego**  $\text{P}_G$ .

Dowód: Jako odwzorowania początku i końca ustalamy

$$s = \pi_{\text{Ad } \mathbf{P}_G} = t,$$

odwrotność wybieramy w postaci (gładkiej z racji kwazi-universalności rzutu  $\mathbf{P}_G \times \mathbf{G} \rightarrow \text{Ad } \mathbf{P}_G$  na przestrzeń orbit)

$$\text{Inv} : \text{Ad } \mathbf{P}_G \circlearrowleft : [(p, g)] \mapsto [(p, g^{-1})],$$

jedność zaś zadajemy jako odwzorowanie

$$\text{Id} : B \rightarrow \text{Ad } \mathbf{P}_G : x \mapsto [(\sigma_i(x), e)]$$

przy użyciu płaskich cięć unitalnych  $\sigma_i = \tau_i^{-1}(\cdot, e) : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbf{P}_G$  na otoczeniach punktów  $x \in \mathcal{O}_i$  (patrz: Uwaga 3), przy czym lokalne definicje Id sklejają się do odwzorowania gładkiego, gdyż w punktach  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzą równości

$$[(\sigma_j(x), e)] = [(\sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x), e)] = [(\sigma_i(x), \text{Ad}_{g_{ij}(x)}(e))] = [(\sigma_i(x), e)].$$

Wreszcie też mamy mnożenie

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m}] & : \text{Ad } \mathbf{P}_G \times_{s \times t} \text{Ad } \mathbf{P}_G \equiv \text{Ad } \mathbf{P}_G \times_B \text{Ad } \mathbf{P}_G \rightarrow \text{Ad } \mathbf{P}_G \\ & : ([p_1, g_1], [p_2, g_2]) \mapsto [(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2))]. \end{aligned}$$

Określoność Id (w szczególności: niezależność od wyboru cięć lokalnych  $\sigma_i(x)$ ) nie budzi wątpliwości, a to z racji tożsamości

$$[(\sigma_i(x) \triangleleft h_i(x), e)] = [(\sigma_i(x), \text{Ad}_{h_i(x)}(e))] = [(\sigma_i(x), e)],$$

prawdziwej dla dowolnego odwzorowania gładkiego  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbf{G}$ . Przejdziemy zatem do sprawdzenia, że dwa pozostałe odwzorowania:  $[\mathfrak{m}]$  i  $\text{Inv}$  są dobrze określone. Niech zatem  $(p_3, g_3) \in [(p_1, g_1)]$ , tj.  $(p_3, g_3) = (p_1 \triangleleft g_{13}, \text{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$ , oraz  $(p_4, g_4) \in [(p_2, g_2)]$ , tj.  $(p_4, g_4) = (p_2 \triangleleft g_{24}, \text{Ad}_{g_{24}^{-1}}(g_2))$ , gdzie dla skrótów oznaczyliśmy  $g_{ij} \equiv \phi_{\mathbf{P}_G}(p_i, p_j)$ ,  $(i, j) \in \{(1, 3), (2, 4)\}$ , a wówczas – na mocy Stw. 3.1 – otrzymujemy

$$\begin{aligned} [(p_3, g_3 \cdot \text{Ad}_{g_{34}}(g_4))] & = [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3 \cdot \text{Ad}_{g_{34}}(g_4)))] = [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(\text{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1) \cdot \text{Ad}_{g_{34} \cdot g_{24}^{-1}}(g_2)))] \\ & = [(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{g_{13} \cdot g_{34} \cdot g_{42}}(g_2))] = [(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{g_{12}}(g_2))] \end{aligned}$$

oraz

$$[(p_3, g_3^{-1})] = [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3^{-1}))] = [(p_1, \text{Ad}_{g_{13}}(g_3)^{-1})] = [(p_1, g_1^{-1})].$$

Stwierdzenia, że powyższa struktura jest w istocie lokalnie modelowana na strukturze algebraicznej  $\mathbf{G}$ , nadajemy sens przy użyciu izomorfizmów modelujących włókna wiązki dołączonej

$$[p_*]_{\text{Ad}} : (\text{Ad } \mathbf{P}_G)_x \rightarrow \mathbf{G} : [(p, g)] \mapsto \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, p)}(g), \quad x \in B,$$

wykazując, że są one homomorfizmami grup. Otóż więc dostajemy (znów w odwołaniu do Stw. 3.1) – dla dowolnej pary punktów  $(p_1, g_1), (p_2, g_2) \in \mathbf{P}_G \times \mathbf{G}$  o własności  $p_1, p_2 \in (\mathbf{P}_G)_x$  –

$$\begin{aligned} [p_*]_{\text{Ad}} \circ [\mathfrak{m}]([p_1, g_1], [p_2, g_2]) & = [p_*]_{\text{Ad}}([p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)]) \\ & = \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)) = \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_*, p_1) \cdot \phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2) \\ & = \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_*, p_1)}(g_1) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_*, p_2)}(g_2) \equiv \mathfrak{m}_{\mathbf{G}}([p_*]_{\text{Ad}}([p_1, g_1]), [p_*]_{\text{Ad}}([p_2, g_2])). \end{aligned}$$

Niezależność definicji mnożenia  $\mathfrak{m}$  od wyboru reprezentantów klas-argumentów pozwala także wydatnie uprościć jego definicję, eksponując zarazem jego naturalność, zamaskowaną przez nieoczywistość tejże definicji, która jest jedynie artefaktem przyjętego wcześniej schematu opisu (punktów) różnorodności ilorazowych  $\text{Ad } \mathbf{P}_G$  i  $\mathbf{P}_G \times_{\lambda} M$ . Istotnie, gdy np. wykorzystać definicję orbity  $[(p_2, g_2)]$  drugiego argumentu w definicji operacji binarnej  $[\mathfrak{m}]$  i sprowadzić ją do postaci

$$[(p_2, g_2)] \equiv [(r_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(p_1), g_2)] \equiv [(p_1, \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2) \equiv \tilde{g}_2)]$$

(wszak  $(p_1, p_2) \in P_G \times_B P_G$ ), otrzymamy oczekiwaną postać geometrycznego mnożenia:

$$[m]([(p_1, g_1)], [(p_1, \tilde{g}_2)]) = [(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_1, p_1)}(\tilde{g}_2))] = [(p_1, g_1 \cdot \text{Ad}_e(\tilde{g}_2))] = [(p_1, g_1 \cdot \tilde{g}_2)],$$

z której będziemy korzystać w dalszych rozważaniach w odwołaniu do rzeczzonej niezależności.  $\square$

**Uwaga 4.** Grupoid dołączony okazuje się być podgrupoidem Liego grupoidu Ehresmanna–Atiyaha wiązki głównej  $P_G$ , zwanym także grupoidem cechowania z racji odgrywanej przezeń kluczowej roli w modelowaniu symetrii cechowania (w rozumieniu Ehresmanna i Pradinesa). O tym i o uogólnieniach opisywanej tu struktury można usłyszeć na wykładzie monograficznym Autora pt. "Duality, Descent & Defects The Higher Geometry and Category Theory of Charged Dynamics" (in a movie theatre near you SOON!).

W następnej kolejności wprowadzamy

**Definicja 3.** Przyjmijmy zapis Def. 2. **Lewy  $\mathcal{G}$ -moduł** to trójka  $(X, \mu, \lambda)$  złożona z

- gładkiej rozmaitości  $X$ ;
- gładkiego odwzorowania  $\mu : X \rightarrow M$ , zwanego (**lewym**) **odwzorowaniem momentowym**;
- gładkiego odwzorowania

$$\lambda : \mathcal{G} \times_{s \times \mu} X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto \lambda(g, x) \equiv \lambda_g(x) \equiv g \blacktriangleright x,$$

zwanego (**lewym**) **działaniem**,

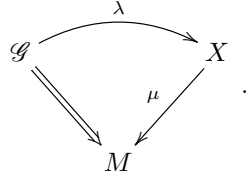
spełniających warunki (w mocy, ilekroć odnośne wyrażenia są dobrze określone):

$$\text{(GIM1)} \quad \mu(g \blacktriangleright x) = t(g);$$

$$\text{(GIM2)} \quad \text{Id}_{\mu(x)} \blacktriangleright x = x;$$

$$\text{(GIM3)} \quad h \blacktriangleright (g \blacktriangleright x) = (h.g) \blacktriangleright x.$$

Stosujemy zapis symboliczny



Analogicznie, **prawy  $\mathcal{G}$ -moduł** to trójka  $(X, \mu, \varrho)$  złożona z

- gładkiej rozmaitości  $X$ ;
- gładkiego odwzorowania  $\mu : X \rightarrow M$ , zwanego (**prawym**) **odwzorowaniem momentowym**;
- gładkiego odwzorowania

$$\varrho : X \times_{\mu \times t} \mathcal{G} \longrightarrow X : (x, g) \longmapsto \varrho(x, g) \equiv \varrho_g(x) \equiv x \blacktriangleleft g,$$

zwanego (**prawym**) **działaniem**,

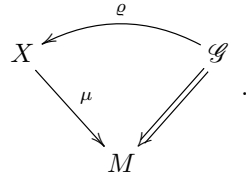
spełniających warunki (w mocy, ilekroć odnośne wyrażenia są dobrze określone):

$$\text{(GrM1)} \quad \mu(x \blacktriangleleft g) = s(g);$$

$$\text{(GrM2)} \quad x \blacktriangleleft \text{Id}_{\mu(x)} = x;$$

$$\text{(GrM3)} \quad (x \blacktriangleleft g) \blacktriangleleft h = x \blacktriangleleft (g.h).$$

Stosujemy zapis symboliczny



**Przykłady 3.**

- (1) Na rozmaitości obiektów  $M$  dowolnego grupoidu Liego  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  istnieją dwie kanoniczne struktury  $\mathcal{G}$ -modułu: lewego

$$(M, \text{id}_M, t \circ \text{pr}_1),$$

z działaniem celowym

$$(t \circ \text{pr}_1)(g, m) = t(g),$$

oraz prawa

$$(M, \text{id}_M, s \circ \text{pr}_2),$$

z działaniem źródłowym

$$(s \circ \text{pr}_2)(m, g) = s(g).$$

- (2) Na rozmaitości strzałek  $\mathcal{G}$  dowolnego grupoidu Liego  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  istnieją dwie wzajem komutujące kanoniczne struktury  $\mathcal{G}$ -modułu: lewa

$$(\mathcal{G}, t, l \equiv \cdot),$$

z działaniem lewo-włóknistym

$$l(h, g) \equiv l_h(g) = h.g,$$

oraz prawa

$$(\mathcal{G}, s, r \equiv \cdot),$$

z działaniem prawo-włóknistym

$$r(g, h) \equiv r_h(g) = g.h.$$

Powyższe przygotowuje nas do wyartykułowania

**Stwierdzenie 5.** Wiązka główna  $P_G$  niesie kanoniczną strukturę lewego modułu grupoidu dołączonego  $\text{Ad } P_G$ ,

$$\begin{array}{ccc} & [r] & \\ \text{Ad } P_G & \xrightarrow{\quad} & P_G \\ & \searrow \mu & \swarrow \\ & B & \end{array},$$

z odwzorowaniem momentowym

$$\mu = \pi_{P_G}$$

i działaniem

$$[r] : \text{Ad } P_G \times_{s \times \mu} P_G \equiv \text{Ad } P_G \times_B P_G \longrightarrow P_G : \left( [(p_2, g_2)], p_1 \right) \longmapsto r_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_1, p_2)}(g_2)}(p_1) \equiv [r]_{[(p_2, g_2)]}(p_1).$$

*Dowód:* Stwierdzamy najpierw, że odwzorowanie  $[r]$  jest w pełni jednoznacznie określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta  $(p_3, g_3) \in [(p_2, g_2)]$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} r_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_1, p_3)}(g_3)}(p_1) &= r_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_1, p_2)} \cdot \phi_{P_G}(p_2, p_3)}(g_3)(p_1) = r_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_1, p_2)}(\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_2, p_3)}(g_3))}(p_1) \\ &= r_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_1, p_2)}(g_2)}(p_1). \end{aligned}$$

Tak zatem jak w przypadku  $m$ , jego definicja jest naturalna, a uczyniona nieoczywistą z przyczyn wcześniej nazwanych, oto bowiem dla  $[(p_2, g_2)] \equiv [(p_1, g_1)]$  mamy

$$[r]_{[(p_2, g_2)]}(p_1) \equiv [r]_{[(p_1, g_1)]}(p_1) = r_{\text{Ad}_{\phi_{P_G}(p_1, p_1)}(g_1)}(p_1) = r_{g_1}(p_1).$$

O gładkości  $[r]$  przesądza Stw.1-2.1 – istotnie,  $[r]$  jest (jedynym) gładkim odwzorowaniem indukowanym przez jawnie gładkie i stałe na poziomicach surjektywnej submersji  $\pi_{(\mathbb{P}_G \times G)/G} \times \text{id}_{\mathbb{P}_G}$  odwzorowanie

$$\tilde{r} : (\mathbb{P}_G \times G) \times_B \mathbb{P}_G \longrightarrow \mathbb{P}_G : ((p_2, g_2), p_1) \longmapsto r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)}(p_1).$$

Bez trudu przekonujemy się, że  $[r]$  spełnia aksjomaty (*lewego*) działania grupoidu  $\text{Ad } \mathbb{P}_G$ : oto zachodzi równość

$$\mu \circ [r]([(p_2, g_2)], p_1) \equiv \pi_{\mathbb{P}_G}(r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_1, p_2)}(g_2)}(p_1)) = \pi_{\mathbb{P}_G}(p_1) = \pi_{\mathbb{P}_G}(p_2) \equiv t([(p_2, g_2)]),$$

jedności działają trywialnie,

$$[r]_{\text{Id}_{\mu(p)}}(p) \equiv [r]_{\text{Id}_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p)}}(p) \equiv [r]_{[(p, e)]}(p) = r_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, p)}(e)}(p) = r_e(p) = p,$$

a odwzorowanie  $[r]$  jest masyplikatywne w pierwszym argumencie, tj. dla dowolnej pary  $[(p_2, g_2)] \equiv [(p_1, g_{1,2})], [(p_3, g_3)] \equiv [(p_1, g_{1,3})] \in (\text{Ad } \mathbb{P}_G)_{\pi_{\mathbb{P}_G}(p_1)}$  zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} [r]_{[\text{m}]([(p_2, g_2)], [(p_3, g_3)])}(p_1) &\equiv [r]_{[\text{m}]([(p_1, g_{1,2}), [(p_1, g_{1,3})])]}(p_1) = [r]_{[(p_1, g_{1,2} \cdot g_{1,3})]}(p_1) = r_{g_{1,2} \cdot g_{1,3}}(p_1) \\ &= r_{g_{1,3} \cdot \text{Ad}_{g_{1,3}^{-1}}(g_{1,2})}(p_1) = r_{\text{Ad}_{g_{1,3}^{-1}}(g_{1,2})} \circ r_{g_{1,3}}(p_1) \equiv [r]_{[(r_{g_{1,3}}(p_1), \text{Ad}_{g_{1,3}^{-1}}(g_{1,2}))]}(r_{g_{1,3}}(p_1)) \\ &= [r]_{[(p_1, g_{1,2})]}(r_{g_{1,3}}(p_1)) \equiv [r]_{[(p_2, g_2)]}([r]_{[(p_3, g_3)]}(p_1)). \end{aligned}$$

□

Nader istotną z perspektywy zastosowań cechę opisanej struktury eksponuje

**Stwierdzenie 6.** Przyjmijmy zapis Stw. 5. Działanie  $[r]$  grupoidu dołączonego na wiązce głównej jest przemienne z działaniem definiującym  $r$  grupy strukturalnej (czyli też wypełnienia tejże).

*Dowód:* Dla dowolnych  $p_1, [(p_2, g_2)] \equiv [(p_1, g_1)] \in \text{Ad } \mathbb{P}_G$  i  $h \in G$  stwierdzamy równość

$$\begin{aligned} [r]_{[(p_2, g_2)]} \circ r_h(p_1) &\equiv [r]_{[(r_h(p_1), \text{Ad}_{h^{-1}}(g_1))]} \circ r_h(p_1) \equiv r_{\text{Ad}_{h^{-1}}(g_1)}(r_h(p_1)) = r_{h \cdot \text{Ad}_{h^{-1}}(g_1)}(p_1) \\ &= r_{g_1 \cdot h}(p_1) \equiv r_h \circ [r]_{[(p_1, g_1)]}(p_1) = r_h \circ [r]_{[(p_2, g_2)]}(p_1). \end{aligned}$$

□

Ażeby postąpić dalej w naszej analizie, musimy wprowadzić kolejną abstrakcyjną strukturę z teorii grupoidów Liego.

**Definicja 4** ([MM03]). Przyjmijmy zapis Def. 2. **Bisekcja (globalna)**  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  to takie cięcie  $\beta : M \longrightarrow \mathcal{G}$  surjektywnej submersji  $s : \mathcal{G} \longrightarrow M$ , dla którego odwzorowanie indukowane

$$t_*\beta \equiv t \circ \beta : M \longrightarrow M$$

jest dyfeomorfizmem. Równoważnie możemy rozpatrywać bisekcję jako podrozmaitość  $S \subset \mathcal{G}$  o tej własności, że oba ograniczenia:  $s \upharpoonright_S$  i  $t \upharpoonright_S$  są dyfeomorfizmami. Oznaczamy zbiór bisekcji symbolem

$$\text{Bisec}(\mathcal{G} \rightrightarrows M) \equiv \mathbb{B}(\mathcal{G}).$$

**Grupa bisekcji** grupoidu Liego  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  to kanoniczna struktura grupy na  $\mathbb{B}(\mathcal{G})$ . Jej operacja binarna przyjmuje postać

$$\cdot : \mathbb{B}(\mathcal{G}) \times \mathbb{B}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{G}) : (\beta_2, \beta_1) \longmapsto \beta_2(t_*\beta_1(\cdot)) \cdot \beta_1(\cdot) \equiv \beta_2 \cdot \beta_1.$$

Elementem neutralnym jest  $\text{Id}$ , zwany także **bisekcją jednościową**, a odwrotność to

$$\text{Inv} : \mathbb{B}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{G}) : \beta \longmapsto \text{Inv} \circ \beta \circ (t_*\beta)^{-1} \equiv \beta^{-1}.$$

**Przykłady 4.**

- (1)  $\text{Bisec}(\text{BG}) \cong G$ .

- (2)  $\text{Bisec}(\text{Pair}(M)) \cong \text{Diff}(M)$ .  
 (3) Grupa  $\text{Bisec}(G \rtimes_{\lambda} M)$  zawiera podgrupę

$$G \cong \iota(G) \subset \text{Bisec}(G \rtimes_{\lambda} M)$$

będącą obrazem monomorfizmu

$$\iota : G \longrightarrow \text{Bisec}(G \rtimes_{\lambda} M) : g \longmapsto (g, \cdot).$$

- (4) Bisekcje grupoidu dołączonego to cięcia globalne wiązki dołączonej,

$$\text{Bisec}(\text{Ad } P_G \rightrightarrows B) \cong \Gamma(\text{Ad } P_G).$$

W zapisie Uwagi 3 odnośna operacja binarna przyjmuje naturalną postać  $(g_{a_i} : \mathcal{O}_i \rightarrow G, a \in \{1, 2\})$

$$\begin{aligned} [(\sigma., g_1.)] \cdot [(\sigma., g_2.)] &\equiv [m] \circ ([(\sigma., g_1.)] \circ t \circ [(\sigma., g_2.)], [(\sigma., g_2.)]) \\ &\equiv [m] \circ ([(\sigma., g_1.)] \circ \pi_{\text{Ad } P_G} \circ [(\sigma., g_2.)], [(\sigma., g_2.)]) \\ &\equiv [m] \circ ([(\sigma., g_1.)] \circ \pi_{P_G} \circ \sigma., [(\sigma., g_2.)]) = [m] \circ ([(\sigma., g_1.)], [(\sigma., g_2.)]) \\ &\equiv [(\sigma., g_1. \cdot g_2.)]. \end{aligned}$$

W dalszych naszych rozważaniach wykorzystamy

**Stwierdzenie 7.** Przyjmijmy zapis Def. 4 i 3. Lewe działanie  $\lambda : \mathcal{G} \times_{s \times \mu} X \rightarrow X$  grupoidu Liego  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  kanonicznie indukuje lewe działanie  $B\lambda : \mathbb{B}(\mathcal{G}) \times X \rightarrow X$  grupy bisekcji  $\mathbb{B}(\mathcal{G})$ , określone przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}(\mathcal{G}) \times M & \xrightarrow{\text{ev} \times \text{id}_X} & \mathcal{G} \times_{s \times \mu} X \\ \uparrow \text{id}_{\mathbb{B}(\mathcal{G})} \times (\mu, \text{id}_X) & & \downarrow \lambda \\ \mathbb{B}(\mathcal{G}) \times X & \xrightarrow{B\lambda} & X \end{array},$$

na którym  $\text{ev} : \mathbb{B}(\mathcal{G}) \times M \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $(\beta, m) \mapsto \beta(m)$  jest **odwzorowaniem ewaluacji**. Analogiczne stwierdzenie dotyczy prawych  $\mathcal{G}$ -modułów.

*Dowód:* Teza jest oczywistą konsekwencją własności  $\lambda$ . Udowodnimy jedynie mnożliwość  $B\lambda$  w pierwszym argumencie. W tym celu wypiszmy jawną postać działania indukowanego:

$$B\lambda(\beta, x) = \beta(\mu(x)) \blacktriangleright x.$$

Stąd też

$$\begin{aligned} B\lambda(\beta_2 \cdot \beta_1, x) &= (\beta_2 \cdot \beta_1)(\mu(x)) \blacktriangleright x \equiv \beta_2(t_* \beta_1(\mu(x))) \cdot \beta_1(\mu(x)) \blacktriangleright x \\ &= \beta_2(t_* \beta_1(\mu(x))) \blacktriangleright (\beta_1(\mu(x)) \blacktriangleright x) \equiv \beta_2(\mu(\beta_1(\mu(x)) \blacktriangleright x)) \blacktriangleright (\beta_1(\mu(x)) \blacktriangleright x) \\ &\equiv B\lambda(\beta_2, \beta_1(\mu(x)) \blacktriangleright x) \equiv B\lambda(\beta_2, B\lambda(\beta_1, x)). \end{aligned}$$

□

W interesującym nas przypadku szczególnym zachodzi

**Corollarium 1.** Przyjmijmy zapis Stw. 5 i 7. Działanie  $[r]$  grupoidu dołączonego  $\text{Ad } P_G \rightrightarrows B$  na wiązce głównej  $P_G$  indukuje działanie na  $P_G$  jego grupy bisekcji  $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ , wedle formuły

$$B[r] : \Gamma(\text{Ad } P_G) \times P_G \longrightarrow P_G : (\gamma, p) \longmapsto [r]_{\gamma \circ \pi_{P_G}(p)}(p).$$

W oczywisty sposób działanie indukowane zadaje homomorfizm (oznaczony tym samym symbolem)

$$B[r] : \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \longrightarrow \text{Aut}_{\text{Bun}_G(B)/B}(\mathbb{P}_G),$$

gdzie

$$\text{Aut}_{\text{Bun}_G(B)/B}(\mathbb{P}_G) = \{ (\Phi, \text{id}_B) \in \text{Aut}_{\text{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G) \mid \forall_{g \in G} : \Phi \circ r_g = r_g \circ \Phi \}.$$

Tę część naszych rozważań wieńczy

**Twierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def.1 oraz Stw.5 i 7. Działanie  $[r]$  grupoidu dołączonego

$\text{Ad } \mathbb{P}_G \rightrightarrows B$  na wiązce głównej  $\mathbb{P}_G$  w kanoniczny sposób indukuje działanie jego grupy bisekcji  $\Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G)$  na wiązce stowarzyszonej  $\mathbb{P}_G \times_\lambda M$  poprzez jej automorfizmy, jak również – na przestrzeni jej cięć globalnych  $\Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M)$ . Działanie indukowane jest lokalnie modelowane na  $\lambda$ .

*Dowód:* W oczywisty sposób struktura lewego  $\text{Ad } \mathbb{P}_G$ -modułu obecna na  $\mathbb{P}_G$  indukują strukturę tego samego rodzaju na wiązce rozszerzonej  $\mathbb{P}_G \times M$ ,

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{[\tilde{r}]} & \\ \text{Ad } \mathbb{P}_G & & \mathbb{P}_G \times M \\ & \searrow & \swarrow \tilde{\mu} \\ & B & \end{array},$$

z odwzorowaniem momentowym

$$\tilde{\mu} = \pi_{\mathbb{P}_G} \circ \text{pr}_1$$

i działaniem

$$[\tilde{r}] = [r] \times \text{id}_M : \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_{s \times \tilde{\mu}} (\mathbb{P}_G \times M) \equiv \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_B (\mathbb{P}_G \times M) \longrightarrow \mathbb{P}_G \times M.$$

W świetle Stw.6, struktura indukowana zstępuje do rozmaitości ilorazowej  $\mathbb{P}_G \times_\lambda M \equiv (\mathbb{P}_G \times M)/G$  – wszak ta ostatnia jest przestrzenią orbit działania  $G$ , które w czynniku kartezjańskim  $\mathbb{P}_G$  wiązki rozszerzonej  $\mathbb{P}_G \times M$  sprowadza się do działania definiującego  $r$ . Mamy przeto lewy  $\text{Ad } \mathbb{P}_G$ -moduł

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\lambda} & \\ \text{Ad } \mathbb{P}_G & & \mathbb{P}_G \times_\alpha M \\ & \searrow & \swarrow \underline{\mu} \\ & B & \end{array},$$

z odwzorowaniem momentowym

$$\underline{\mu} = \pi_{\mathbb{P}_G \times_\lambda M}$$

i działaniem

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} & : \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_{s \times \underline{\mu}} (\mathbb{P}_G \times_\lambda M) \equiv \text{Ad } \mathbb{P}_G \times_B (\mathbb{P}_G \times_\lambda M) \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_\alpha M \\ & : \left( [(p_1, g)], [(p_2, m)] \right) \longmapsto \left[ (p_2, \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g)}(m)) \right], \end{aligned}$$

gładkim z racji kwazi-universalności odwzorowania ilorazowego  $\mathbb{P}_G \times M \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_\lambda M$ . O istnieniu indukowanego działania

$$B\underline{\lambda} : \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \times \mathbb{P}_G \times_\lambda M \longrightarrow \mathbb{P}_G \times_\lambda M : (\gamma, [(p, m)]) \longmapsto \left( [r]_{\gamma \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)}(p), m \right)$$

grupy bisekcji  $\Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G)$  grupoidu dołączonego na wiązce stowarzyszonej przesądza Stw.7. Jego przeniesienie na zbiór cięć wiązki stowarzyszonej jest natychmiastowe i przyjmuje postać

$$\Gamma B\underline{\lambda} : \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \times \Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_G \times_\lambda M)$$

$$(5) \quad : \quad (\gamma, [(\sigma, \mu)]) \longmapsto \left( [r]_{\gamma \circ \pi_{\mathbb{P}_G} \circ \sigma(\cdot)} \circ \sigma(\cdot), \mu(\cdot) \right) = \left( [r]_{\gamma(\cdot)} \circ \sigma(\cdot), \mu(\cdot) \right).$$

To, że – zgodnie z tezą stwierdzenia – działanie  $\underline{\lambda}$  jest lokalnie modelowane na  $\lambda$ , stwierdzamy używając wskazanych wcześniej izomorfizmów modelujących włókna  $[p_*]_{\text{Ad}}$  oraz  $[p_*]_{\lambda}$  (patrz: Def. 1). Wykonujemy zatem prosty rachunek:

$$\begin{aligned} & \lambda_{[p_*]_{\text{Ad}}}([p_*]_{\lambda}([p_2, m])) = \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_1)}(g)} \circ \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_2)}(m) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_2) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g)}(m) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_*, p_2)}(\lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g)}(m)) \\ & \equiv [p_*]_{\lambda}([p_2, \lambda_{\text{Ad}_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p_2, p_1)}(g)}(m)]) \equiv [p_*]_{\lambda} \circ \underline{\lambda}_{[(p_1, g)]}([p_2, m]). \end{aligned}$$

□

Nasza dyskusja wskazuje na istnienie intymnego związku pomiędzy bisekcjami grupoidu dołączonego i automorfizmami wiązki głównej, naturalnie zstępującymi do automorfizmów wiązki stowarzyszonej. W ostatniej części wykładu przyjrzymy mu się uważniej. Zaczniemy od ogólnego

**Stwierdzenie 8.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i Przykł. 1 (2). Istnieje bijekcja

$$\Gamma(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M) \cong \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M),$$

w której zapisie  $\text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M)$  jest zbiorem odwzorowań  $G$ -ekwiwariantnych z Def. 3.3.

*Dowód:* Niechaj  $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)$  będzie cięciem określonym lokalnie w postaci  $[(\sigma_i, \mu_i)]$  przez płaskie cięcia unitalne  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{P}_G$ ,  $i \in I$  nad pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  wiązki  $\mathbb{P}_G$  oraz odwzorowania  $\mu_i : \mathcal{O}_i \rightarrow M$ , zgodnie z Uwagą 3. Korzystając z odwzorowania ilorazowego i rzutu na bazę wiązki  $\mathbb{P}_G$ , możemy zdefiniować odwzorowanie

$$\Phi_{\lambda}[\phi] : \mathbb{P}_G \rightarrow M : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ni p \mapsto \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\mu_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)).$$

Bez trudu upewniamy się, że powyższa definicja ma sens, oto bowiem w dowolnym punkcie  $p \in \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_{i_j})$  zachodzi – wobec relacji (4), Stw. 3.2 oraz mnożliwości  $\lambda$  w pierwszym argumentcie

$$\begin{aligned} & \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \sigma_j \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\mu_j \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p) \triangleleft g_{ij} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))} \circ \lambda_{g_{ij} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)}^{-1}(\mu_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \cdot g_{ij} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \circ \lambda_{g_{ij} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)}^{-1}(\mu_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \cdot g_{ij} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)} \cdot g_{ij} \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)}^{-1}(\mu_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\mu_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)). \end{aligned}$$

$G$ -ekwiwariantność  $\Phi_{\lambda}[\phi]$  wynika wprost z rachunku:

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda}[\phi] \circ r_g(p) & = \lambda_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g, \sigma_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g))}(\mu_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p \triangleleft g)) = \lambda_{g^{-1} \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p))}(\mu_i \circ \pi_{\mathbb{P}_G}(p)) \\ & = \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\lambda}[\phi](p), \end{aligned}$$

przeprowadzonego dla dowolnych  $(p, g) \in \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times G$ , a używającego Stw. 3.2 oraz aksjomatyki działania.

Ażeby skonstruować odwrotność powyższego przyporządkowania, użyjemy tych samych płaskich cięć unitalnych  $\sigma_i$  wiązki  $\mathbb{P}_G$  co wyżej, a następnie dowolnemu odwzorowaniu  $G$ -ekwiwariantnemu  $f : \mathbb{P}_G \rightarrow M$  przyporządkujemy rodzinę cięć lokalnych

$$S_{\lambda}[f]_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{P}_G \times_{\lambda} M : x \mapsto [(\sigma_i(x), f \circ \sigma_i(x))], \quad i \in I.$$

Każde z nich jest (lokalnie) gładkie jako superpozycja odnośnych odwzorowań gładkich  $(\sigma_i, f \circ \sigma_i) : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{P}_G \times M$  i surjektywnej submersji  $\pi_{(\mathbb{P}_G \times_{\lambda} M)/G}$ . Z łatwością przekonujemy się, że cięcia te są ograniczeniami (do odnośnych zbiorów  $\mathcal{O}_i$ ) cięcia globalnego, stwierdzając w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{i_j}$  równość

$$S_{\lambda}[f]_j(x) = [(\sigma_j(x), f \circ \sigma_j(x))] = [(\sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x), f(\sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x)))]$$

$$= [(\sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x), \lambda_{g_{ij}(x)^{-1}} \circ f \circ \sigma_i(x))] = [(\sigma_i(x), f \circ \sigma_i(x))] \equiv S_\lambda[f]_i(x).$$

Bezpośredni rachunek obu superpozycji:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda[S_\lambda[f]] &: \mathbf{P}_G \longrightarrow M \\ &: \pi_{\mathbf{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ni p \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p))}(f \circ \sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)) \\ &= f(\sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p) \triangleleft \phi_{\mathbf{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p))^{-1}) = f(p) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} S_\lambda[\Phi_\lambda[[\sigma, \mu]]] &: B \longrightarrow \mathbf{P}_G \times_\lambda M \\ &: \mathcal{O}_i \ni x \longmapsto [(\sigma_i(x), \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(\sigma_i(x), \sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G} \circ \sigma_i(x))}(\mu_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G} \circ \sigma_i(x)))] \\ &\equiv [(\sigma_i(x), \lambda_{\phi_{\mathbf{P}_G}(\sigma_i(x), \sigma_i(x))}(\mu_i(x)))] = [(\sigma_i, \mu_i)](x) \equiv [(\sigma, \mu)](x) \end{aligned}$$

pokazuje dowodnie, że prawdziwe są tożsamości

$$\Phi_\lambda \circ S_\lambda = \text{id}_{\text{Hom}_G(\mathbf{P}_G, M)}, \quad S_\lambda \circ \Phi_\lambda = \text{id}_{\Gamma(\mathbf{P}_G \times_\lambda M)}.$$

□

Specjalizacja powyższego wyniku do przypadku wiązki dołączonej okazuje się mieć charakter strukturalny, o czym orzeka

**Stwierdzenie 9.** Bijekcja

$$\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \cong \text{Hom}_G(\mathbf{P}_G, \mathbf{G}),$$

o której mówi Stw.8, jest izomorfizmem między grupą bisekcji grupoidu dołączonego i grupą odwzorowań  $\mathbf{P}_G \longrightarrow \mathbf{G}$  ekwiwariantnych względem odnośnych działań (lewostronnych)  $r_{\text{Inv}(\cdot)}$  i  $\text{Ad}_\cdot$ , o naturalnej strukturze punktowej (obecnej na zbiorze odwzorowań, których przeciwdziedzina jest grupa).

*Dowód:* W dotychczasowej notacji i z uwzględnieniem Przykł.4(4) sprawdzamy – dla dowolnej pary cięć  $\gamma_a = [(\sigma, g_a \cdot)] \in \Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$  o składowych lokalnych  $g_{ai} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbf{G}$ ,  $a \in \{1, 2\}$  oraz punktu  $p \in \pi_{\mathbf{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  –

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{Ad}}[\gamma_1 \cdot \gamma_2](p) &= \Phi_{\text{Ad}}[[\sigma, g_1 \cdot g_2 \cdot]](p) = \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p))}(g_{1i}(\pi_{\mathbf{P}_G}(p)) \cdot g_{2i}(\pi_{\mathbf{P}_G}(p))) \\ &= \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p))}(g_{1i} \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)) \cdot \text{Ad}_{\phi_{\mathbf{P}_G}(p, \sigma_i \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p))}(g_{2i} \circ \pi_{\mathbf{P}_G}(p)) \equiv (\Phi_{\text{Ad}}(\gamma_1) \cdot \Phi_{\text{Ad}}(\gamma_2))(p). \end{aligned}$$

□

Nasze rozważania ukazały  $\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$  w roli grupy działającej naturalnie na wiązce  $\mathbf{P}_G \times_\lambda M$   $\mathbf{G}$ -rozmaitości  $M$  poprzez wyróżnione automorfizmy tej ostatniej, indukowane z automorfizmów  $\mathbf{P}_G$ , także modelowanych przez bisekcje  $\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G)$ . Poniższe stwierdzenie istotnie wzbogaca tę obserwację i strukturyzuje całą konstrukcję, odsłaniając w pełni *bijektywną* relację pomiędzy bisekcjami grupoidu dołączonego i wertykalnymi automorfizmami wiązki głównej.

**Stwierdzenie 10.** Przyjmijmy zapis Stw.4 i jego dowodu oraz Cor.1. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup

$$\Gamma(\text{Ad } \mathbf{P}_G) \cong \text{Aut}_{\mathbf{Bun}_G(B)/B}(\mathbf{P}_G).$$

*Dowód:* W świetle Stw.9 wystarczy wskazać izomorfizm grup

$$\text{Hom}_G(\mathbf{P}_G, \mathbf{G}) \cong \text{Aut}_{\mathbf{Bun}_G(B)/B}(\mathbf{P}_G).$$

Wybierzmy (dowolnie)  $\gamma \in \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, G)$  i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\Psi[\gamma] : \mathbb{P}_G \curvearrowright : p \mapsto r_{\gamma(p)}(p).$$

Jest ono jawnie  $G$ -ekwiwariantne,

$$\begin{aligned} \forall_{(p,g) \in \mathbb{P}_G \times G} : \Psi[\gamma] \circ r_g(p) &\equiv r_{\gamma \circ r_g(p)}(r_g(p)) = r_{\text{Ad}_{g^{-1}} \circ \gamma(p)}(r_g(p)) = r_{g \cdot \text{Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))}(p) = r_{\gamma(p) \cdot g}(p) \\ &= r_g \circ \Psi[\gamma](p), \end{aligned}$$

i zachowuje włókna  $\pi_{\mathbb{P}_G}$ , a zatem definiuje automorfizm

$$(\Psi[\gamma], \text{id}_B, \text{id}_G) \in \text{Aut}_{\mathbf{Bun}_G(B)/B}(\mathbb{P}_G)$$

w rozumieniu Def.3-4. Jest przy tym homomorfizmem grup, o czym przekonuje bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned} \Psi[\gamma_1 \cdot \gamma_2](p) &= r_{\gamma_1(p) \cdot \gamma_2(p)}(p) \equiv r_{\gamma_2(p) \cdot \text{Ad}_{\gamma_1(p)^{-1}}(\gamma_1(p))}(p) = r_{\text{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p) \\ &= r_{\gamma_1(p \triangleleft \gamma_2(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p) \equiv \Psi[\gamma_1] \circ \Psi[\gamma_2](p), \end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnych  $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, G)$ . Na tym etapie wystarczy przywołać Stw. 9, aby uzyskać homomorfizm grup

$$(\Psi[\cdot], \text{id}_B, \text{id}_G) \circ \Phi_{\text{Ad}} : \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_G(B)}(\mathbb{P}_G | B).$$

Idąc w kierunku odwrotnym, przyporządkujmy dowolnemu automorfizmowi  $(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G) \in \text{Aut}_{\mathbf{Bun}_G(B)/B}(\mathbb{P}_G)$  odwzorowanie

$$\chi[(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G)] : \mathbb{P}_G \longrightarrow G : p \mapsto \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi(p)),$$

którego  $G$ -ekwiwariantności dowodzimy w odwołaniu do Stw. 3.1, a dla dowolnych  $(p, g) \in \mathbb{P}_G \times G$ ,

$$\begin{aligned} \chi[(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G)] \circ r_g(p) &\equiv \phi_{\mathbb{P}_G}(r_g(p), \Phi \circ r_g(p)) = \phi_{\mathbb{P}_G}(r_g(p), r_g \circ \Phi(p)) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi(p))) \\ &\equiv \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \chi[(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G)](p). \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane tym sposobem odwzorowanie

$$\chi : \text{Aut}_{\mathbf{Bun}_G(B)/B}(\mathbb{P}_G) \longrightarrow \text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, G)$$

jest homomorfizmem grup – w rzeczy samej, dla dowolnej pary automorfizmów  $(\Phi_a, \text{id}_B, \text{id}_G) \in \text{Aut}_{\mathbf{Bun}_G(B)/B}(\mathbb{P}_G)$ ,  $a \in \{1, 2\}$  obliczamy (po raz kolejny przywołując po drodze Stw. 3.1)

$$\begin{aligned} \chi[(\Phi_1, \text{id}_B, \text{id}_G) \circ (\Phi_2, \text{id}_B, \text{id}_G)](p) &= \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_1 \circ \Phi_2(p)) = \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_1(p \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_2(p)))) \\ &= \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_1(p) \triangleleft \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_2(p))) = \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_1(p)) \cdot \phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi_2(p)) \\ &\equiv (\chi[(\Phi_1, \text{id}_B, \text{id}_G)] \cdot \chi[(\Phi_2, \text{id}_B, \text{id}_G)])(p), \end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami. Ostatecznie otrzymujemy homomorfizm grup

$$S_{\text{Ad}} \circ \chi : \text{Aut}_{\mathbf{Bun}_G(B)/B}(\mathbb{P}_G) \longrightarrow \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G).$$

Ażeby stwierdzić, że jest to odwrotność wskazanego wcześniej homomorfizmu  $\Psi \circ \Phi_{\text{Ad}}$ , wystarczy sprawdzić, że  $\chi$  jest odwrotnością automorfizmu  $(\Psi[\cdot], \text{id}_B, \text{id}_G)$ , co czynimy wprost licząc – dla dowolnych  $(p, x, g) \in \mathbb{P}_G \times B \times G$  –

$$(\Psi[\cdot] \circ \chi[(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G)])(p) = r_{\phi_{\mathbb{P}_G}(p, \Phi(p))}(p) = \Phi(p)$$

oraz

$$\chi \circ (\Psi[\cdot], \text{id}_B, \text{id}_G)[\gamma](p) = \phi_{\mathbb{P}_G}(p, r_{\gamma(p)}(p)) = \gamma(p).$$

□

LITERATURA

- [Car50] H. Cartan, “*La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*”, Colloque de Topologie (espaces fibré) Bruxelles 1950, Centre Belge de Recherches Mathématiques, 1950, pp. 57–71.
- [MM03] I. Moerdijk and J. Mrčun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 91, Cambridge University Press, 2003.
- [Tu20] L.W. Tu, *Introductory Lectures on Equivariant Cohomology*, Annals of Mathematics Studies, vol. 204, Princeton University Press, 2020.