

**REDUKCJA, DEZORIENTACJA, OBSTRUKCJA I PROLONGACJA,  
CZYLI W CO SIĘ BAWIĆ, GDY PADA DESZCZ  
(MAWF '25/26 2.VII, 2.VIII & 2.IX [RRS])**



FIG. 1. Obstrukcja po burzy, poddawana inspekcji przez Szeryfa z Nottingham (Nottingham, Wielka Brytania).

SPIS TREŚCI

1. Redukcja – ogólnie i po czesku	2
2. Redukcja metryczna	5
3. Redukcja orientacyjna – I klasa Stiefela–Whitneya	9
4. Prolongacja wzdłuż rozszerzenia centralnego – obstrukcji i klasyfikacja	15
Dodatek A. Krótkie i trochę dłuższe ciągi dokładne grup	22

Omówiona przez nas ze szczegółami koncepcja geometryzacji w formie wiązki stowarzyszonej bytów w istocie swej algebraicznych, jakimi są zbiory z działaniem grupy, podpowiada naturalny schemat konstrukcji wiązki spinorowej, rozumianej jako geometryzacja nad daną rozmainością metryczną  $(M, g)$  spinorowego modułu cliffordowskiego właśnie: Oto „wystarczy” stowarzyszyć rzeczony moduł za pośrednictwem spinorowej nań realizacji grupy  $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$  nakrywającej grupę obrotów modelowego reprezentanta  $\mathbb{R}^{p,q}$  danej globalnie izoklasy włókna wiązki stycznej nad daną rozmainością metryczną  $(M, g)$  z wiązką główną nad  $M$  o grupie strukturalnej  $\text{Spin}(p, q; \mathbb{R})$  pozostającą – co kluczowe z interpretacyjnego punktu widzenia – w takiej relacji z wiązką styczną  $TM$  (występującą tu w roli referencyjnej geometryzacji przestrzeni kwadratowej), która pozwoli nam myśleć o utworzonej tym sposobem wiązce stowarzyszonej  $\mathcal{S}(M, g)$  jako o gładko indeksowanej przez  $M \ni x$  rodzinie modułów spinorowych  $\mathcal{S}(M, g)_x$  dla („pierwiastków kwadratowych”

$z$ ) przestrzeni kwadratowych  $(T_x M, g(x))$ . Identyfikacja stosownej wiązki głównej wymaga przywołania z Rozdz. 5-6.1 poprzedniego cyklu wykładów izomorfizmu wiązek wektorowych

$$(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}}) \cong (\mathbb{F}_{\text{GL}} \mathbb{V} \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{K}^{\times N}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}} \mathbb{V} \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{K}^{\times N}})$$

Istotnie, odniósłszy powyższe do wiązki stycznej nad rozmaitością metryczną  $(M, g)$  wymiaru  $\dim M \equiv D$ ,

$$(TM, M, \mathbb{R}^{\times D}, \pi_{TM}) \cong (\mathbb{F}_{\text{GL}} TM \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{R}^{\times D}, M, \mathbb{R}^{\times D}, \pi_{\mathbb{F}_{\text{GL}} TM \times_{\rho_{\text{def}}} \mathbb{R}^{\times D}}),$$

i dostrzegłszy w tych okolicznościach (w obecności metryki na  $M$ ) w rozmaitości stowarzyszonej  $\mathbb{R}^{\times D}$  w modelu po prawej stronie znaku  $\cong$  nośnik struktury przestrzeni kwadratowej modelującej  $(T_x M, g(x))$ , której „pierwiastek” kwadratowy (w rozumieniu konstrukcji spinora czystego Cartana uogólniającej tę z Rozdz. 2.1 Wykładów 17.-18. z I+ semestru) jest wzmiankowanym wcześniej modułem spinorowym stowarzyszonym z poszukiwaną przez nas wiązką główną

$$(\mathbb{F}_{\text{Spin}} TM, M, \text{Spin}(p, D - p; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{Spin}} TM})$$

o grupie strukturalnej  $\text{Spin}(p, D - p; \mathbb{R})$ , dostrzegamy bez trudu możliwość naturalnej realizacji pożądanego schematu konstrukcyjnego: Należy „wyodrębnić”, o ile jest to możliwe, z wiązki baz  $\mathbb{F}_{\text{GL}} TM$  wiązki stycznej podwiązkę  $\mathbb{F}_{\text{SO}} TM \subset \mathbb{F}_{\text{GL}} TM$  zorientowanych baz pseudoortonormalnych (czyli wiązkę główną o grupie strukturalnej  $\text{SO}(p, D - p; \mathbb{R})$ ), a następnie skonstruować wiązkę torsorów grupy  $\text{Spin}(p, D - p; \mathbb{R})$  pozostającą w relacji *strukturalnej* z ową podwiązką będącej geometryzacją nakrycia uniwersalnego

$$(1) \quad \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Spin}(p, D - p; \mathbb{R}) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}(p, D - p; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{1}$$

z Tw. 1 z Wykładów 13.-14. z I+ semestru. Szczęśliwie podana przez nas definicja morfizmu wiązek głównych (Def. 3.4) jest na tyle pojemna, że pozwala nam sformalizować kryterium „strukturalności” dyskutowanej relacji – chodzi mianowicie o epimorfizm wiązek głównych

$$(\Xi, \text{id}_B, \widetilde{\text{Ad}}) : (\mathbb{F}_{\text{Spin}} TM, M, \text{Spin}(p, D - p; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{Spin}} TM}) \longrightarrow (\mathbb{F}_{\text{SO}} TM, M, \text{SO}(p, D - p; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{SO}} TM})$$

Konstrukcja „wiązki nakrywającej” dla zadanej „bazowej” wiązki głównej (wraz z odnośnym epimorfizmem wiązek głównych) jest jedną z klasycznych konstrukcji w teorii wiązek głównych i zostanie omówiona w dalszej części wykładu, który zawiera również studium topologicznej obstrukcji, jaką może ona napotkać. Pozostaje zatem odpowiedzieć sobie na pytanie o istnienie podwiązki  $\mathbb{F}_{\text{SO}} TM \subset \mathbb{F}_{\text{GL}} TM$ . Także i ono należy do kanonu zagadnień teorii wiązek głównych i jako takie zostanie zanalizowane poniżej w relacji do pojęć algebraicznych: struktury metrycznej i orientacji na przestrzeni wektorowej, a zarazem ze zwróceniem uwagi na ewentualną obstrukcję topologiczną, która w tym wypadku, tak jak i w poprzednim, poddaje się wygodnej kwantyfikacji w terminach stosownej kohomologii (snopej).

## 1. REDUKCJA – OGÓLNIE I PO CZESKU

Pierwszą z konstrukcji, które musimy zrozumieć na drodze ku geometryzacji modułów spinorowych, jest „wyodrębnianie” z danej wiązki głównej (w naszym przypadku – wiązki baz wiązki stycznej) podwiązki o zredukowanej grupie strukturalnej (w naszym przypadku – podwiązki zorientowanych baz pseudoortonormalnych).

**Definicja 1.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj  $G, H$  będą grupami Liego, dla których określony jest monomorfizm grup Liego

$$\tilde{\varphi} : H \longrightarrow G.$$

**Redukcja wiązki głównej** wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  (zwana także **redukcją grupy strukturalnej**) **wzdłuż monomorfizmu**  $\tilde{\varphi}$  to para

$$((P_H, B, H, \pi_{P_H}), (\Phi, \text{id}_B, \tilde{\varphi}))$$

złożona z

- wiązki głównej  $(P_H, B, H, \pi_{P_H})$ ;

- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \text{id}_B, \check{\varphi}) : (\mathbb{P}_H, B, H, \pi_{\mathbb{P}_H}) \longrightarrow (\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G}),$$

którego wszystkie składowe są gładkimi włożeniami w rozumieniu Def. 0.18.

Wyznaczaną przezeń podwiązkę

$$(\Phi(\mathbb{P}_H), B, \check{\varphi}(H), \pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)} \equiv \pi_{\mathbb{P}_G} \upharpoonright_{\Phi(\mathbb{P}_H)})$$

określamy mianem **wiązki głównej zredukowanej**.

Alternatywnego a równoważnego spojrzenia na zagadnienie redukcji wiązki głównej dostarcza

**Twierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Redukcja wiązki głównej  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  wzdłuż monomorfizmu  $\check{\varphi}$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące tejsz wiązki i stowarzyszone z nim jej trywializacje lokalne, dla których odwzorowania przejścia przyjmują wartości w podgrupie  $\check{\varphi}(H) \subset G$ . W takiej sytuacji mówimy, że grupa strukturalna wiązki  $(\mathbb{P}_G, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$  jest **redukowalna** do  $\check{\varphi}(H)$ .

*Dowód:* Załóżmy na początku, że istnieje wiązka  $(\mathbb{P}_H, B, H, \pi_{\mathbb{P}_H})$  i wyznaczona przez nią podwiązka  $(\Phi(\mathbb{P}_H), B, \check{\varphi}(H), \pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)})$ . Wybierzmy pokrycie trywializujące tej ostatniej,  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , a wraz z nim – odnośne trywializacje lokalne  $\tau_i^{\check{\varphi}(H)} : \pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \check{\varphi}(H)$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^{\check{\varphi}(H)} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \check{\varphi}(H)$ . Następnie zdefiniujmy odwzorowania (jawnie ciągłe wzgl. gładkie)

$$\tau_i^G : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times G : p \longmapsto (\pi_{\mathbb{P}_G}(p), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e_G), p)).$$

W świetle Stw. 5-6.1 odwzorowania te są  $G$ -ekwiwariantne. Bez trudu konstruujemy ich odwrotności:

$$\tau_i^{G-1} : \mathcal{O}_i \times G \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) : (x, g) \longmapsto \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g,$$

upewniwszy się, że wobec relacji  $\pi_{\Phi(\mathbb{P}_H)}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  zachodzą równości:

$$\tau_i^{G-1} \circ \tau_i^G(p) = \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(p), e_G), p) \equiv p$$

oraz

$$\begin{aligned} \tau_i^G \circ \tau_i^{G-1}(x, g) &= \tau_i^G(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), e_G), \\ &\quad \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G} \circ \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), e_G), \\ &\quad \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\ &= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \equiv (x, g). \end{aligned}$$

Są to zatem trywializacje lokalne wiązki  $\mathbb{P}_G$ , a przy tym odnośne odwzorowania przejścia, wyznaczone w rachunku bezpośrednim:

$$\begin{aligned} \tau_i^G \circ \tau_j^{G-1}(x, g) &= \tau_i^G(\tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g) \\ &= (\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(\pi_{\mathbb{P}_G}(\tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g), e_G), \\ &\quad \tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\ &= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G), \tau_j^{\check{\varphi}(H)-1}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathbb{H})}(x)) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} g)) \\
 &= (x, \phi_{\mathbb{P}_G}(\tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G), \tau_i^{\check{\varphi}(\mathbb{H})^{-1}}(x, e_G) \triangleleft_{\mathbb{P}_G} (g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathbb{H})}(x) \cdot_G g))) \\
 &= (x, g_{ij}^{\check{\varphi}(\mathbb{H})}(x) \cdot_G g),
 \end{aligned}$$

należą do  $\check{\varphi}(\mathbb{H}) \subset G$ .

I odwrotnie, niechaj  $\tau_i^G : \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  będą trywializacjami lokalnymi wiązki  $\mathbb{P}_G$ , stowarzyszonymi z pokryciem  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}^{(\mathbb{H})} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \check{\varphi}(\mathbb{H}) \subset G$ . Jako że każdy monomorfizm jest izomorfizmem na swój obraz, możemy jednoznacznie zdefiniować odwzorowania

$$h_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{H}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

narzucając warunki

$$\check{\varphi} \circ h_{ij} = g_{ij}^{(\mathbb{H})}.$$

Dla dowolnych  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$  zachodzi tożsamość

$$\check{\varphi} \circ (h_{jk} \cdot \text{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (g_{jk}^{(\mathbb{H})} \cdot \text{Inv} \circ g_{ik}^{(\mathbb{H})} \cdot g_{ij}^{(\mathbb{H})}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_G,$$

z której wobec monomorficznego charakteru  $\check{\varphi}$  wynika warunek 1-kocyklu

$$(h_{jk} \cdot \text{Inv} \circ h_{ik} \cdot h_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\mathbb{H}}.$$

Możemy zatem przywołać Tw. 1-2.2 i zrekonstruować nad  $\mathcal{O}$  wiązkę główną  $(\mathbb{P}_{\mathbb{H}}, B, \mathbb{H}, [\text{pr}_1])$  o grupie strukturalnej  $\mathbb{H}$ , przestrzeni totalnej

$$\mathbb{P}_{\mathbb{H}} \equiv \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \mathbb{H}) \right) / \sim_h$$

i odwzorowaniach przejścia  $h_{ij}$  stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi  $[\tau_i]$  zdefiniowanymi w dowodzie rzeczonego twierdzenia. Wykorzystując te homeomorfizmy (wzgl. dyfeomorfizmy) oraz ich odpowiedniki  $\tau_i^G$  na  $\mathbb{P}_G$  w połączeniu z zanurzeniami topologicznymi (wzgl. włożeniami)  $\check{\varphi}$ , określamy lokalne zanurzenia topologiczne (wzgl. włożenia)

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \mathbb{H} \xrightarrow{\text{id}_B \times \check{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G^{-1}}} \pi_{\mathbb{P}_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna  $\mathbb{P}_{\mathbb{H}}$  we włókna  $\mathbb{P}_G$  w sposób ewidentnie  $\mathbb{H}$ -ekwiwariantny (wszak  $\check{\varphi}$  jest homomorfizmem grup). Pozostaje zatem upewnić się, że zanurzenia te są ograniczeniami (do elementów pokrycia trywializującego) zadanego globalnie morfizmu wiązek głównych, co czynimy w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym nad dowolnym punktem  $[(x, i, h)] \in [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_{ij})$ ,

$$\begin{aligned}
 &\Phi_j([(x, i, h)]) \equiv \tau_j^{G^{-1}} \circ (\text{id}_B \times \check{\varphi}) \circ [\tau_j]([(x, i, h)]) \\
 &= \tau_j^{G^{-1}} \circ (\text{id}_B \times \check{\varphi}) \circ [\tau_j]([(x, j, h_{ji}(x) \cdot_{\mathbb{H}} h)]) = \tau_j^{G^{-1}}(x, \check{\varphi}(h_{ji}(x) \cdot_{\mathbb{H}} h)) \\
 &= \tau_j^{G^{-1}}(x, \check{\varphi} \circ h_{ji}(x) \cdot_G \check{\varphi}(h)) = \tau_j^{G^{-1}}(x, g_{ji}^{(\mathbb{H})}(x) \cdot_G \check{\varphi}(h)) = \tau_i^{G^{-1}}(x, \check{\varphi}(h)) \\
 &\equiv \Phi_i([(x, i, h)]).
 \end{aligned}$$

□

Warto zauważyć, że redukcja wiązki głównej wzdłuż monomorfizmu  $\mathbb{H} \hookrightarrow G$  grup strukturalnych jest w naturalny sposób powiązana z „efektem Higgsa”, czyli istnieniem globalnie gładkiego cięcia („pola Higgsa”) wiązki stowarzyszonej z wiązką zredukowaną poprzez działanie indukowane, jak w Tw. 4.3, na przestrzeni jednorodnej  $G/\mathbb{H}$  z lewego działania regularnego na grupie  $G$ . To jednak temat na osobny wykład w ramach zupełnie innego kursu. . . (Stichwort: DDD).

## 2. REDUKCJA METRYCZNA

Wprowadzenie iloczynu skalarnego na przestrzeni liniowej pozwala wyróżnić klasę baz diagonalizujących tenże iloczyn skalarny i pozostających względem siebie w relacji (pseudo)ortogonalności, czyli otrzymywanych jedna z drugiej przez zastosowanie izometrii. W kontekście naszych rozważań nad geometryzacją modułów spinorowych pojawia się zatem naturalne pytanie o możliwość wyodrębnienia z wiązki baz wiązki wektorowej podwiązki jej baz (pseudo)ortonormalnych w obecności struktury metrycznej. Pozotywniej (zasadniczo) odpowiedzi na tak postawione pytanie dostarcza poniższa dyskusja, którą zaczynamy od stosownej geometryzacji algebraicznego iloczynu skalarnego.

**Definicja 2.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Struktura metryczna na wiązce wektorowej**  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) to gładkie cięcie<sup>1</sup> (globalne)

$$g : B \longrightarrow \mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*$$

kwadratu tensorowego wiązki dualnej  $\mathbb{V}^*$ , rozumianego jak w Def. 1-2.6 i 1-2.8, którego ograniczenie do dowolnego włókna  $\mathbb{V}_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{V}_x$  wiązki  $\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}$  jest niezwyrodniałą symetryczną formą  $\mathbb{R}$ -liniową o stałej (nad bazą  $B$ ) sygnaturze, zadającą formę kwadratową

$$Q_{g(x)} : \mathbb{V}_x \longrightarrow \mathbb{R} : v \longmapsto g(x)(v \otimes_{\mathbb{R}} v).$$

Sygnaturę tej ostatniej nazywamy **sygnaturą struktury metrycznej**. W przypadku sygnatury postaci  $(p, 0)$ ,  $p \in \mathbb{N}^{\times}$  mówimy o **riemannowskiej strukturze metrycznej**.

Specjalizacja powyższej definicji do interesujących nas okoliczności geometrycznych przybiera postać

**Definicja 3. Struktura metryczna na rozmaitości różniczkowalnej** to struktura metryczna na wiązce stycznej nad tą rozmaitością. Parę  $(M, g)$  utworzoną przez rozmaitość różniczkowalną  $(M, \mathcal{A})$  oraz strukturę metryczną  $g$  na niej określamy mianem **rozmaitości metrycznej**.

Mamy uspokajające (choć tylko, gdy nie mamy czasu, by pomyśleć o czasie i związanej z nim sygnaturze)

**Twierdzenie 2.** Na każdej wiązce wektorowej istnieje struktura metryczna riemannowska. W szczególności więc struktura taka istnieje na każdej rozmaitości różniczkowalnej.

*Dowód:* Niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową i niech  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie jej pokryciem trywializującym. Trywializacje lokalne  $\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$  pozwalają zaindukować lokalne struktury metryczne riemannowskie na  $\mathbb{V}$  postaci

$$g_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathbb{R} : (v_1, v_2) \longmapsto \Phi_{\delta_{\mathbb{E}}^{(N)}}(\text{pr}_2 \circ \tau_i(v_1), \text{pr}_2 \circ \tau_i(v_2)),$$

tym samym promując odwzorowania  $\text{pr}_2 \circ \tau_i$  do rangi izometrii (lokalnych). Następnie wykorzystujemy rozkład jedności  $\{\rho_i\}_{i \in I}$  podporządkowany  $\mathcal{O}$  do utworzenia ze struktur lokalnych struktury globalnej

$$g := \sum_{i \in I} \rho_i \circ \pi_{\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}}(\cdot) \triangleright \tilde{g}_i,$$

w której zapisie  $\tilde{g}_i$  są odwzorowaniami  $\mathbb{R}$ -liniowymi na włóknach  $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}, B} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$  określonymi (jednoznacznie) przez  $g_i$ .  $\square$

Mając do dyspozycji wszystkie nieodzowne definicje i będąc pewnymi istnienia opisywanych przez nie obiektów geometrycznych, możemy już wysłowić

<sup>1</sup>Możemy też wziąć za punkt wyjścia podwiązkę symetryczną  $S^2\mathbb{V}^* \subset \mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*$  – wszak nad każdym punktem bazy mamy tu do czynienia z podprzestrzenią, a odwzorowania przejścia  $\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*$  zachowują symetrię utożsamianych przez nie tensorów.

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem  $\mathbb{R}$ ). Dowolna struktura metryczna  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, N - p)$ ,  $p \in \overline{0, N}$  na  $\mathbb{V}$  określa redukcję wiązki reperów  $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  wzdłuż włożenia kanonicznego

$$J_{\mathcal{O}(p, N-p; \mathbb{R})} : \mathcal{O}(p, N-p; \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(N; \mathbb{R}).$$

Otrzymana tym sposobem wiązka główna zredukowana nosi miano **wiązki reperów ortonormalnych** (lub **wiązki baz ortonormalnych**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$ .

*Dowód:* W świetle Tw.1 wystarczy wskazać trywializacje lokalne wiązki głównej  $F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  o odwzorowaniach przejścia przyjmujących wartości w podgrupie  $\mathcal{O}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \text{GL}(N; \mathbb{R})$ . Teza Stw.3.4 czyni to zadanie równoważnym zadaniu znalezienia rodziny cięć lokalnych  $\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ , które w punktach  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  pozostają w relacji

$$(2) \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft g_{ij}(x) \equiv \sigma_i(x) \circ g_{ij}(x)$$

określonej przez odwzorowania przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ . Rozważmy zatem dowolne cięcia lokalne  $s_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{\text{GL}}\mathbb{V}$  stowarzyszone z pewnym pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ . Wykorzystując konstrukcję przedstawioną w treści Rozdz. 5-6.1, każdej z par  $(s_i(x), e_a)$ ,  $a \in \overline{1, N}$  o drugim składniku będącym elementem bazy standardowej przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  możemy przyporządkować element bazy włókna  $\mathbb{V}_x$  dany wzorem

$$[\widehat{e\mathbb{V}}](\left[ (s_i(x), x, e_a) \right]) = s_i(x)(e_a) =: s_{ia}(x) =: \eta_{ab}.$$

Przywoławszy następnie Twierdzenia Sylwestera–Jacobiego (w odniesieniu do form kwadratowych  $Q_{g(x)}$ ,  $x \in \mathcal{O}_i$ , względem których odnośne układy bazowe  $\{s_{ia}(x)\}_{a \in \overline{1, N}}$  są w oczywisty sposób niezwyrodniałe), możemy następnie przeprowadzić ortogonalizację Grama–Schmidta, która dostarcza nam nowych układów bazowych  $\{\sigma_{ia}(x)\}_{a \in \overline{1, N}}$  o gładkiej zależności od punktu w bazie  $x \in \mathcal{O}_i$ . Istotnie, przejście od bazy wyjściowej  $\{s_{ia}(x)\}_{a \in \overline{1, N}}$  do bazy  $Q_{g(x)}$ -ortogonalnej  $\{\sigma_{ia}(x)\}_{a \in \overline{1, N}}$  jest superpozycją operacji algebraicznych (więc gładkich) o argumentach zależących od  $x$  poprzez  $s_{ia}$  oraz  $g$ , co na mocy poczynionych założeń gwarantuje rzeczoną gładkość  $\sigma_{ia}$ . Nowy układ bazowy spełnia – wprost z konstrukcji, a dla dowolnych  $a, b \in \overline{1, N}$  oraz  $x \in \mathcal{O}_i$ ,  $i \in I$  – tożsamości

$$g(x)(\sigma_{ia}(x), \sigma_{ib}(x)) \equiv \Phi_{Q_{g(x)}}(\sigma_{ia}(x), \sigma_{ib}(x)) = \varepsilon_a \delta_{ab}$$

wyrażone przez układ skalarów  $\varepsilon_a \in \{-1, 1\}$  zdeterminowany przez sygnaturę struktury metrycznej. Bez straty ogólności rozważań (po dokonaniu stosownej permutacji indeksów bazy) możemy przy tym założyć, że

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_p = 1 = -\varepsilon_{p+1} = -\varepsilon_{p+2} = \dots = -\varepsilon_N.$$

Układu tego możemy użyć do określenia izomorfizmów

$$\sigma_i(x) : \mathbb{R}^{\times N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$$

będących jedynymi  $\mathbb{R}$ -liniowymi rozszerzeniami przyporządkowań

$$\sigma_i(x)(e_a) := \sigma_{ia}(x), \quad a \in \overline{1, N},$$

a zatem – w szczególności – zależącymi gładko od punktu w bazie. Tym samym uzyskujemy nowe cięcia lokalne

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \rightarrow F_{\text{GL}}\mathbb{V} : x \mapsto \sigma_i(x) \equiv (x, \sigma_{ia}(x) \triangleright \varphi^a), \quad \varphi^a(e_b) = \delta_b^a,$$

które na mocy Stw. 5-6.3 wyznaczają trywializacje lokalne

$$\tau_{\sigma_i} : \sqcup_{x \in \mathcal{O}_i} \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N}, \mathbb{V}_x) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \text{GL}(N; \mathbb{R}),$$

a nadto określają bazy we włóknach  $\mathbb{V}$  postaci

$$[\widehat{e\mathbb{V}}](\left[ (\sigma_i(x), e_a) \right]) = \sigma_i(x)(e_a) \equiv \sigma_{ia}(x), \quad a \in \overline{1, N}, \quad x \in \mathcal{O}_i, \quad i \in I.$$

Wyznaczwszy odnośne odwzorowania przejścia,

$$\tau_{\sigma_i} \circ \tau_{\sigma_j}^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times \text{GL}(n; \mathbb{R}) \circlearrowleft : (x, A) \mapsto \tau_{\sigma_i}(\sigma_j(x) \boxtimes A) \equiv (x, \phi_{F_{\text{GL}}\mathbb{V}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x) \boxtimes A)) = (x, g_{ij}(x) \boxtimes A),$$

o reprezentacji macierzowej

$$g_{ij}(x) = g_{ijab}(x) \triangleright e_a^* \otimes_{\mathbb{R}} e_b,$$

otrzymujemy relacje (2), których obrazem względem izomorfizmu  $[\widehat{e}\mathbb{V}]$  są relacje

$$\begin{aligned} \sigma_{j_a}(x) &\equiv [\widehat{e}\mathbb{V}]([\sigma_j(x), e_a]) = [\widehat{e}\mathbb{V}]([\sigma_i(x) \circ g_{ij}(x), e_a]) \\ &\equiv [\widehat{e}\mathbb{V}]([\sigma_i(x), g_{ij}(x)(e_a)]) = [\widehat{e}\mathbb{V}](g_{ijab}(x)[\triangleright][[\sigma_i(x), e_b]]) \\ &= g_{ijab}(x) \triangleright [\widehat{e}\mathbb{V}]([\sigma_i(x), e_b]) \equiv g_{ijab}(x) \triangleright \sigma_{i_b}(x). \end{aligned}$$

Te pozwalają nam ustalić, na podstawie wcześniejszych rezultatów, tożsamości

$$\begin{aligned} \eta_{ab} &\equiv g(x)(\sigma_{i_a}(x), \sigma_{i_b}(x)) = \varepsilon_a \delta_{ab} \equiv g(x)(\sigma_{j_a}(x), \sigma_{j_b}(x)) \\ &= g_{ijac}(x) \cdot g_{ijbd}(x) \cdot g(x)(\sigma_{i_c}(x), \sigma_{i_d}(x)) \equiv g_{ijac}(x) \cdot \eta_{cd} \cdot g_{ijdb}(x)^T, \end{aligned}$$

które wyrażają pożądaną własność skonstruowanych przez nas odwzorowań przejścia względem metryki  $g$ .  $\square$

**Uwaga 1.** Wiązka reperów ortonormalnych wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną  $g$  o sygnaturze  $(p, N-p)$  jest wiązką główną

$$(\mathbb{F}_O\mathbb{V}, B, O(p, N-p; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{GL}\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{F}_O\mathbb{V}})$$

o grupie strukturalnej  $O(p, N-p; \mathbb{R})$ . Naturalnym modelem dla  $\mathbb{F}_O\mathbb{V}$  jest przestrzeń

$$\mathbb{F}_O\mathbb{V} := \bigsqcup_{x \in B} \text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N}, \mathbb{V}_x)^g,$$

w której zapisie włókno  $\text{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N}, \mathbb{V}_x)^g \ni \beta_x$  jest zbiorem bijektywnych izometrii

$$\beta_x : \mathbb{R}^{p, N-p} \xrightarrow{\cong} (\mathbb{V}_x, Q_{g(x)}),$$

przy czym topologia i struktura różniczkowalna na tak określonej przestrzeni totalnej wiązki są określone analogicznie jak w przypadku wiązki reperów  $\mathbb{F}_{GL}\mathbb{V}$  z Def. 3.1.

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem  $\mathbb{R}$ ). Dowolna redukcja wiązki reperów  $\mathbb{F}_{GL}\mathbb{V}$  wzdłuż włożenia kanonicznego

$$\mathcal{J}_{O(p, N-p; \mathbb{R})} : O(p, N-p; \mathbb{R}) \rightarrow GL(N; \mathbb{R})$$

dla pewnego  $p \in \overline{0, N}$  wyznacza na  $\mathbb{V}$  strukturę metryczną  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, N-p)$ .

*Dowód:* Metrykę na włóknach wiązki  $\mathbb{V}$  definiujemy punkt po punkcie nad jej bazą, używając w tym celu cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych  $\mathbb{F}_O\mathbb{V}$  zrekonstruowanej z odwzorowań przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow O(p, N-p; \mathbb{R})$  wiązki  $\mathbb{F}_{GL}\mathbb{V}$  zredukowanych do  $O(p, N-p; \mathbb{R}) \subset GL(N; \mathbb{R})$ . Niechaj zatem  $\beta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{F}_O\mathbb{V}$  będzie dowolnym takim cięciem nad zbiorem  $\mathcal{O}_i \ni x$  należącym do pokrycia trywializującego  $\mathbb{V}$  (nad którym rekonstruujemy  $\mathbb{F}_O\mathbb{V}$ ), określającym trywializację lokalną wiązki  $\mathbb{F}_O\mathbb{V}$ . Iloczyn skalarny na  $\mathbb{V}_x$  ustanawiamy formułą

$$g_i : \mathbb{V}_x \times \mathbb{V}_x \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \delta_E^{(p, N-p)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)),$$

której struktura przesądza o gładkiej zależności odwzorowań  $g_i$  od punktu w  $\mathcal{O}_i$ , jak również o ich niezwyrodnieniu i symetrii względem transpozycji argumentów wektorowych. Przy tym dowolne dwa cięcia lokalne  $\beta_i, \tilde{\beta}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{F}_O\mathbb{V}$  są powiązane przez pewne odwzorowanie (gładkie)  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow O(p, N-p; \mathbb{R})$  zgodnie z formułą

$$\tilde{\beta}_i(x) = \beta_i(x) \circ h_i(x), \quad x \in \mathcal{O}_i,$$

co zapewnia niezależność definicji  $g_i$  od wyboru cięcia lokalnego,

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{E}}^{(p, N-p)}(\tilde{\beta}_i(x)^{-1}(v), \tilde{\beta}_i(x)^{-1}(w)) &= \delta_{\mathbb{E}}^{(p, N-p)}(h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), h_i(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(p, N-p)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)). \end{aligned}$$

Pozostaje upewnić się, że tak zadane (pseudo)riemannowskie metryki lokalne wyznaczają metrykę globalną. W tym celu rozważmy punkt  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ , nad którym cięcia lokalne  $\beta_i$  i  $\beta_j$  pozostają w relacji

$$\beta_j(x) = \beta_i(x) \circ g_{ij}(x).$$

Ortogonalny charakter odwzorowań przejścia pozwala stwierdzić, że

$$\begin{aligned} g_j(v, w) &\equiv \delta_{\mathbb{E}}^{(p, N-p)}(\beta_j(x)^{-1}(v), \beta_j(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(p, N-p)}(g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(v), g_{ij}(x)^{-1} \circ \beta_i(x)^{-1}(w)) \\ &= \delta_{\mathbb{E}}^{(p, N-p)}(\beta_i(x)^{-1}(v), \beta_i(x)^{-1}(w)) \equiv g_i(v, w). \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskować o istnieniu odwzorowania globalnie gładkiego

$$g : B \longrightarrow \mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*, \quad g \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv g_i$$

o pożądaných własnościach. □

W fizykalnie istotnych okolicznościach występowania sygnatury mieszanej intuicja wywiedziona z kursu algebry liniowej (w jego części poświęconej studium przestrzeni kwadratowych, czy ogólniej – hermitowskich) znajduje potwierdzenie w

**Twierdzenie 3.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ). Struktura metryczna  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, N - p)$ ,  $p \in \overline{1, N - 1}$  istnieje na  $\mathbb{V}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbb{V}$  można przedstawić jako sumę Whitneya

$$(3) \quad \mathbb{V} = \mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^-$$

podwiązek wektorowych:

$$(\mathbb{V}^+, B, \mathbb{R}^{\times p}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^+})$$

oraz

$$(\mathbb{V}^-, B, \mathbb{R}^{\times N-p}, \pi_{\mathbb{V}} \upharpoonright_{\mathbb{V}^-}),$$

przy czym odnośne włókna zadają wówczas rozkład włókna wiązki  $\mathbb{V}$  na sumę ortogonalną

$$\forall_{x \in B} : \mathbb{V}_x = \mathbb{V}_x^+ \oplus_{Q_{g(x)}} \mathbb{V}_x^-$$

zgodny z tezą Twierdzenia Sylwestera o bezwładności, tj. taki, przy którym

$$\pm Q_{g(x)} \upharpoonright_{\mathbb{V}_{\pm}} > 0,$$

i podwiązki  $\mathbb{V}^{\pm}$  są maksymalne w tym sensie, że nie istnieje podwiązka wektorowa  $\mathbb{W}^+ \subset \mathbb{V}$  o własnościach

$$\mathbb{W}^+ \not\supseteq \mathbb{V}^+ \quad \wedge \quad Q_{g \upharpoonright_{\mathbb{W}^+}} > 0 \quad \wedge \quad \mathbb{W}^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^- = \mathbb{V},$$

ani też podwiązka wektorowa  $\mathbb{W}^- \subset \mathbb{V}$  o własnościach

$$\mathbb{W}^- \not\supseteq \mathbb{V}^- \quad \wedge \quad Q_{g \upharpoonright_{\mathbb{W}^-}} < 0 \quad \wedge \quad \mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathbb{W}^- = \mathbb{V}.$$

W takim przypadku podwiązkę  $\mathbb{V}^+$  nazywamy **maksymalną podwiązką przestrzenną wiązki**  $\mathbb{V}$ , podwiązkę  $\mathbb{V}^-$  zaś – **maksymalną podwiązką czasową wiązki**  $\mathbb{V}$ .

*Dowód:* Załóżmy najpierw, że dany jest rozkład (3) i niechaj  $g_R \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  będzie riemannowską strukturą metryczną na  $\mathbb{V}$  skonstruowaną w dowodzie Tw. 2, orzekającego o jej istnieniu. Postulowaną strukturą metryczną  $g$  o nietrywialnej sygnaturze otrzymujemy, położywszy

$$g := g_R \upharpoonright_{\mathbb{V}^+ \times_B \mathbb{V}^+} \oplus (-g_R \upharpoonright_{\mathbb{V}^- \times_B \mathbb{V}^-}).$$

Dowód implikacji odwrotnej wymaga znajomości „efektu Higgsa” i dyskusji maksymalnych podgrup zwartych grupy Lorentza (alternatywne dowody, jak ten pochodzący od Gilkeya, mają poważne luki logiczne), więc pojawi się w innych okolicznościach dydaktycznych.  $\square$

W kontekście geometryzacji algebry Clifforda i stowarzyszonych z nią modułów spinorowych metryka na wiązce stycznnej odgrywa rolę konstytutywną – determinuje, punkt po punkcie, strukturę przestrzeni kwadratowej będącą punktem wyjścia do konstrukcji odnośnych algebr Clifforda. Jest przeto nieodzownym *założyć* jej istnienie na danej rozmaitości, to zaś implikuje pierwszą z pożądaných redukcji wiązki baz wiązki stycznnej:

$$(\mathbb{F}_{\text{GLTM}}, B, \text{GL}(D; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{GLTM}}}) \quad \rightsquigarrow \quad (\mathbb{F}_{\text{OTM}}, B, \text{O}(p, D-p; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{GLTM}}} \upharpoonright_{\mathbb{F}_{\text{OTM}}}).$$

W następnej kolejności prześledzimy redukcję odpowiadającą wyborowi orientacji w  $\text{TM}$ .

### 3. REDUKCJA ORIENTACYJNA – I KLASA STIEFELA–WHITNEYA

Dokonyamy obecnie geometryzacji algebraicznego pojęcia orientacji przestrzeni wektorowej (rzeczywistej), rozumianego jako wybór jednego z dwóch rozłącznych podzbiorów w zbiorze baz tejże przestrzeni utworzonego przez bazy powiązane (wzajemnie) odwracalnymi odwzorowaniami liniowymi o wyznaczniku dodatnim, przy czym w obecności formy kwadratowej, więc w ograniczeniu do automorfizmów ortogonalnych, ten ostatni staje się równy jedności. W tym celu rozważymy rodzinę cięć (lokalnych) wiązki reperów ortonormalnych  $\mathbb{F}_{\text{OV}}$  (rzeczywistej) wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, N-p)$ ,  $p \in \overline{0, N}$ ,

$$\sigma_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{F}_{\text{OV}}$$

stowarzyszonych z pewnym pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy  $B$ , czyli indeksowaną przez  $I$  rodzinę gładkich dystrybucji baz  $\mathbb{V}$ . Ciągłość cięć  $\sigma_i$  oznacza, że wszystkie bazy w  $\mathbb{R}^{\times N}$  otrzymane w obrazie trywializacji lokalnej  $\tau_i : \pi_{\mathbb{F}_{\text{OV}}}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}}_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{O}}_i \times \text{O}(p, N-p; \mathbb{R})$  z obrazu cięcia  $\sigma_i(\mathcal{O}_i)$  (trywializacja  $\tau_i$  nad  $\tilde{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}_i$  nie jest *a priori* indukowana przez  $\sigma_i$ ) leżą w tej samej spójnej składowej grupy ortogonalnej  $\text{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ , każde zatem dwa punkty obrazu łączy odwzorowanie ze składowej spójnej jedności tejże grupy, czyli z grupy specjalnej ortogonalnej  $\text{SO}(p, N-p; \mathbb{R})$  przy  $p(N-p) = 0$ , wzgl. z grupy specjalnej ortogonalnej ortochronicznej  $\text{SO}_{\mathbb{R}}^+(p, N-p)$  przy  $p(N-p) \neq 0$ . W punktach  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  cięcia lokalne pozostają w relacji

$$\sigma_j(x) = \sigma_i(x) \triangleleft \phi_{\mathbb{F}_{\text{OV}}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)),$$

przy czym

$$\phi_{\mathbb{F}_{\text{OV}}}(\sigma_i(x), \sigma_j(x)) \equiv g_{ij}(x) \in \text{O}(p, N-p; \mathbb{R})$$

są tożsame z odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi wyznaczanymi przez cięcia lokalne  $\sigma_i$  w duchu Stw. 3.3. W świetle powyższych uwag naturalną adaptacją pojęcia orientacji staje się

**Definicja 4.** Przyjmijmy zapis Stw. 1. Wiazkę wektorową  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażoną w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, N-p)$ ,  $p \in \overline{0, N}$  określamy mianem **orientowanej**, ilekroć istnieje taki wybór pokrycia trywializującego dla wiązki reperów ortonormalnych  $\mathbb{F}_{\text{OV}}$ , przy którym odwzorowania przejścia  $\mathbb{F}_{\text{OV}}$  przyjmują wartości w podgrupie specjalnej ortogonalnej  $\text{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \text{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ . W takim przypadku wiazkę zredukowaną (wzdłuż iniekcji kanonicznej) nazywamy **wiazką reperów ortonormalnych z orientacją** (albo też **wiazką baz ortonormalnych z orientacją**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$  i zapisujemy jako

$$(\mathbb{F}_{\text{SOV}}, B, \text{SO}(p, N-p; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{\text{SOV}}})$$

W przypadku  $p(N-p) \neq 0$  mówimy o wiązce **orientowalnej przestrzennej** (wzgl. **czasowo**), jeśli możliwa jest jej redukcja wzdłuż iniekcji kanonicznej  $\mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \sqcup \mathbb{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$  (wzgl.  $\mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \sqcup \mathbb{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ ), wprowadzając zarazem pochodne pojęcie **wiązki reperów ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) lub też **wiązki baz ortonormalnych z orientacją przestrzenną** (wzgl. **czasową**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$ . Wreszcie też jeśli możliwa jest redukcja wiązki reperów wzdłuż iniekcji kanonicznej  $\mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ , mamy do czynienia z wiązką **orientowalną czasowo i przestrzenią**, a odnośną wiązkę zredukowaną nazywamy **wiązką reperów ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną** (albo też **wiązką baz ortonormalnych z orientacją czasową i przestrzenną**) **wiązki wektorowej**  $\mathbb{V}$  i oznaczamy symbolem

$$(\mathbb{F}_{\mathrm{SO}^+ \mathbb{V}}, B, \mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}), \pi_{\mathbb{F}_{\mathrm{SO}^+ \mathbb{V}}}).$$

Ileokroć wymienione powyżej własności strukturalne charakteryzują wiązkę wektorową styczną nad rozmaitością różniczkowalną, odnośne określenia stosują się do tejże rozmaitości. Mamy zatem **rozmaitość różniczkowalną orientowalną**, **rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo** wzgl. **przestrzenią** oraz **rozmaitość różniczkowalną orientowalną czasowo i przestrzenią**.

Ogólnego opisu ilościowego zagadnienia orientowalności dostarcza

**Twierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Wiązka wektorowa  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażona w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, N-p)$ ,  $p \in \overline{0, N}$  jest orientowalna (względem tejże struktury) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy wiązki reperów ortonormalnych  $\mathbb{F}_{\mathbb{O} \mathbb{V}}$  i odnośne trywializacje lokalne  $\tau_i : \pi_{\mathbb{F}_{\mathbb{O} \mathbb{V}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ ,  $i \in I$  o stowarzyszonych z nimi odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ , dla których odwzorowania (lokalnie) stałe

$$\gamma_{ij} := \det_{(N)} \circ g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

przyjmują postać

$$(4) \quad \gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$$

dla pewnych odwzorowań (lokalnie) stałych

$$\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

*Dowód:* W świetle Def.5-6.1 (patrz: postać odwzorowań przejścia wiązki stowarzyszonej) oraz Rozdz.5-6.1 orientowalność  $\mathbb{V}$  oznacza istnienie pokrycia trywializującego  $\mathcal{O}$  i odnośnych trywializacji  $\tau_i$ , dla których odwzorowania przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ , a wówczas  $\det_{(N)} g_{ij} = 1$  i możemy położyć  $\eta_i \equiv 1$ .

I odwrotnie, mając dane odwzorowania  $\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $i \in I$ , wybierzmy dowolnie odwzorowania

$$h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R}), \quad i \in I$$

o własności

$$\det_{(N)} \circ h_i = \eta_i,$$

która pozwala stwierdzić, że odwzorowania

$$\tilde{g}_{ij} := h_i \cdot g_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ h_j : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R}), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

spełniają warunek

$$\det_{(N)} \circ \tilde{g}_{ij} = \eta_i \cdot \gamma_{ij} \cdot \mathrm{Inv} \circ \eta_j \equiv 1,$$

czyli w istocie

$$\tilde{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathrm{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R}).$$

Stwierdzamy, że stosowna redefinicja trywializacji lokalnych  $F_{\mathbb{O}\mathbb{V}}$  pozwala dokonać redukcji grupy strukturalnej wzdłuż włożenia kanonicznego

$$J_{\text{SO}(p, N-p; \mathbb{R})} : \text{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \rightarrow \text{O}(p, N-p; \mathbb{R}),$$

w rozumieniu Tw. 1. Istotnie, jeśli wyjściowe trywializacje lokalne  $\tau_i$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij}$  zastąpić odwzorowaniami

$$\tilde{\tau}_i : \pi_{F_{\mathbb{O}\mathbb{V}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i \times \text{O}(p, N-p; \mathbb{R}) : \tau_i^{-1}(x, g) \mapsto (x, h_i(x) \cdot g), \quad i \in I,$$

to w bezpośrednim rachunku – przeprowadzonym dla dowolnych  $(x, g) \in \mathcal{O}_i \times \text{O}(p, N-p; \mathbb{R})$  –

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, g) &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tilde{\tau}_j^{-1}(x, h_j(x) \cdot (h_j(x)^{-1} \cdot g)) = \tilde{\tau}_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)^{-1} \cdot g) \\ &\equiv \tilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)^{-1} \cdot g) = \tilde{\tau}_i \circ \tau_i^{-1}(x, g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot g) \\ &= (x, h_i(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \cdot g) \end{aligned}$$

wyznamy nowe odwzorowania przejścia

$$h_i(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x)^{-1} \equiv \tilde{g}_{ij}(x) \in \text{SO}(p, N-p; \mathbb{R}).$$

□

W fizykalnie istotnym przypadku sygnatury mieszanej napotykamy specjalizację powyższego wyniku ogólnego w formie

**Twierdzenie 5.** (\*) Przyjmijmy zapis Def. 4 oraz Tw. 3 i niechaj  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  będzie wiązką wektorową (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażoną w strukturę metryczną  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, N-p)$ ,  $p \in \overline{1, N-1}$ . Wiązka  $\mathbb{V}$  jest orientowalna przestrzennie (wzgl. czasowo) wtedy i tylko wtedy, gdy jej maksymalna podwiązka przestrzenna  $\mathbb{V}^+$  (wzgl. czasowa  $\mathbb{V}^-$ ) jest orientowalna, w szczególności więc gdy  $\mathbb{V}^+$  (wzgl.  $\mathbb{V}^-$ ) spełnia warunki wymienione w tezie Tw. 4.

*Dowód:* W świetle dowodu Tw. 3 istnienie struktury metrycznej  $g$  o sygnaturze  $(p, N-p)$  implikuje redukowalność wiązki reperów wzdłuż monomorfizmu

$$J_{\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})} : \text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R}) \rightarrow \text{O}(p, N-p; \mathbb{R}) : (A, B) \mapsto A \oplus B,$$

w którego zapisie  $A \oplus B$  jest endomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times p} \oplus \mathbb{R}^{\times N-p} \equiv \mathbb{R}^{\times N}$ . W świetle Stw. 9-10-11.2 przesądza to o istnieniu trywializacji lokalnych

$$\tau_i : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{\times p} \oplus \mathbb{R}^{\times N-p}) \equiv \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times N}$$

wiązki  $\mathbb{V}$  o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow J_{\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})}(\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})).$$

Maksymalna podwiązka przestrzenna  $\mathbb{V}^+ \subset \mathbb{V}$  dziedziczy tym samym trywializację o odwzorowaniach przejścia

$$g_{ij}^+ : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow J_{\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})}(\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \{\mathbf{1}_{N-p}\}) \cong \text{O}(p; \mathbb{R}).$$

Orientowalność  $\mathbb{V}^+$  jest równoznaczna z dalszą redukcją jej grupy strukturalnej  $J_{\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})}(\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \{\mathbf{1}_{N-p}\})$  do podgrupy izomorficznej z  $\text{SO}(p; \mathbb{R})$ , co ostatecznie pozwala ograniczyć grupę strukturalną sumy Whitneya  $\mathbb{V}^+ \oplus_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^- \equiv \mathbb{V}$  do postaci

$$\begin{aligned} &J_{\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})}(\text{SO}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})) \\ &\equiv J_{\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})}(\text{SO}(p; \mathbb{R}) \times (\text{SO}(N-p; \mathbb{R}) \sqcup P_{e_1} \cdot \text{SO}(N-p; \mathbb{R}))) \\ &= J_{\text{O}(p; \mathbb{R}) \times \text{O}(N-p; \mathbb{R})}((\text{SO}(p; \mathbb{R}) \times \text{SO}(N-p; \mathbb{R})) \sqcup (\text{SO}(p; \mathbb{R}) \times P_{e_1} \cdot \text{SO}(N-p; \mathbb{R}))) \\ &\subset \text{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot \text{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie bez trudu odwracamy na gruncie Twierdzenia o redukcji grupy strukturalnej do maksymalnej podgrupy zwartej (pojawi się w innym kontekście dydaktycznym), zauważając, że maksymalna podgrupa zwarta grupy  $\mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \sqcup \mathrm{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$  to (obraz względem włożenia kanonicznego w grupę  $\mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$  jej podgrupy)  $\mathrm{SO}(p; \mathbb{R}) \times \mathrm{O}(N-p; \mathbb{R})$ .

Dowód w przypadku maksymalnej podwiązki czasowej przebiega w pełni analogicznie.  $\square$

**Uwaga 2.** Należy podkreślić, że rodzina odwzorowań lokalnie stałych  $\{\gamma_{ij} = \det_{(N)} \circ g_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$  zdefiniowanych w treści Tw. 4 spełnia – dla dowolnych  $(i, j, k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}$  – tożsamość

$$\check{\delta}\gamma_{ijk} := (\gamma_{jk} \cdot \mathrm{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \equiv \det_{(N)}(g_{jk} \cdot g_{ki} \cdot g_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = \det_{(N)} \mathbf{1}_N = 1,$$

nazywaną **warunkiem 1-kocyklu**. Jest przy tym zupełnie jasnym, że dla dowolnych odwzorowań lokalnie stałych

$$\psi_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

tożsamość powyższa jest niezmiennicza ze względu na podstawienia

$$\gamma_{ij} \longmapsto \gamma_{ij} \cdot (\psi_j \cdot \mathrm{Inv} \circ \psi_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} =: \gamma_{ij} \cdot \check{\delta}\psi_{ij},$$

które odpowiadają (automorficznym) transformacjom

$$g_{ij} \longmapsto h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j^{-1}, \quad \det_{(N)} \circ h_i = \psi_i$$

o danych lokalnych  $h_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathrm{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ . Otrzymujemy zatem

**Wnioski 1.** *Ilościową miarą obstrukcji topologicznej dla orientowalności wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobionym pokryciu trywializującym  $\mathcal{O}$  klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych  $\{\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$ , spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}} : \check{\delta}\gamma_{ijk} = 1,$$

względem relacji równoważności

$$\gamma_{..}^2 \sim_{\check{\delta}} \gamma_{..}^1 \iff \exists_{\{\psi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}_{i \in I}} \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}} : \gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}^1 \cdot \check{\delta}\psi_{ij}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia oznaczamy symbolem

$$w_1(\mathbb{V})$$

i określamy mianem **pierwszej klasy Stiefela–Whitneya wiązki wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$** .

W przypadku wiązki wektorowej stycznej nad rozmaitością różniczkowalną, mówimy o **pierwszej klasie Stiefela–Whitneya rozmaitości różniczkowalnej**.

Powyższy wniosek może (a wręcz powinien) być źródłem głębokiego niedosytu, oto bowiem z jednej strony zrekapitulowany w nim schemat formalnego opisu obstrukcji dla orientacji (orientowalności) wiązki wektorowej wydaje się nader adekwatny i precyzyjny, z drugiej jednak – jest to schemat na pierwszy rzut oka całkowicie niepraktyczny, jak bowiem policzyć interesującą nas klasę obstrukcji  $w_1(\mathbb{V})$  „w granicy dowolnie drobnego pokrycia”? Z niedosytem tym zmierzmy się w wykładzie następnym, po zgromadzeniu w ramach naszych studiów nad redukcjami i prolongacjami wiązek głównych wzdłuż homomorfizmów grup strukturalnych bogatszej próbki podobnych struktur, z której będziemy mogli wywieść ujawniający się tu na prawach inspirującego przykładu ogólny schemat kwantyfikacji obstrukcji dla istnienia rozmaitych geometryzacji i klasyfikacji geometryzacji nierównoważnych w okolicznościach znikania tejże obstrukcji. Schematu tego dostarczy tzw. kohomologia Čecha stowarzyszona z pokryciem otwartym rozmaitości. Relacje wiążące ją z innymi znanymi typami homologii (np. kohomologią de Rhama i homologią singularną) oraz pewne podstawowe twierdzenia z dziedziny algebry homologicznej dostarczą nam jeśli nie przekonania, to z pewnością silnej nadziei na policzalność fizycznie istotnych klas i grup w kohomologii, a zatem także – na konstruktywność zaproponowanego tu opisu. Tymczasem zajmiemy się wygodnym przeformułowaniem dotychczasowych wyników.

Pojawienie się wyznacznika odwzorowań przejścia w naszej dyskusji zagadnienia orientowalności wiązki wektorowej sugeruje bezpośredni związek tego pojęcia z geometryzacją innego (równoważnego) algebraicznego modelu orientacji, jakiego dostarcza konstrukcja wyznacznika na przestrzeni wektorowej  $\mathbb{K}^{\times N}$ , modelującej włókno wiązki  $\mathbb{V}$ , czyli (dowolnego niezerowego) elementu  $\Delta \in \wedge^N (\mathbb{K}^{\times N})^*$ . Jeśli teraz przywołać procedurę – opisaną w Rozdz. 5-6.1 – rekonstrukcji wiązki wektorowej jako wiązki stowarzyszonej z wiązką reperów, a procedura ta działa także w przypadku zredukowanej grupy strukturalnej (patrz: Tw. 1), to widzimy, że możliwość ograniczenia się do odwzorowań przejścia z  $\text{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \text{O}(p, N-p; \mathbb{R}) \subset \text{GL}(N; \mathbb{R})$  dotyczy w jednakim stopniu wiązki wektorowej  $\mathbb{V}$  i jej wiązek reperów:  $\text{F}_\text{O}\mathbb{V}$  oraz  $\text{F}_\text{GL}\mathbb{V}$ . Zaczniemy od wprowadzenia potrzebnego obiektu geometrycznego.

**Definicja 5.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. **Wiązka wyznacznikowa wiązki wektorowej**  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times N}, \pi_\mathbb{V})$  (nad  $\mathbb{K}$ ) o bazie  $B$  i odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \text{GL}(N; \mathbb{K})$  stowarzyszonych z pokryciem trywializującym  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  to dowolna wiązka wektorowa

$$(\det \mathbb{V}, B, \mathbb{K}, \pi_{\det \mathbb{V}})$$

izomorficzna z wiązką zrekonstruowaną, w rozumieniu Tw. 2-3-4.2, z danych lokalnych

$$g_{ij}^{\det} := \det_{(N)} \circ g_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{K}.$$

Wiązkę wyznacznikową otrzymujemy chociażby w procedurze topologizacji sumy rozłącznej nad bazą  $B \ni x$  włókien postaci

$$(\det \mathbb{V})_x \equiv \wedge^N \mathbb{V}_x^*,$$

w zgodzie z interpretacją tejże wiązki jako geometryzacji konstrukcji wyznacznika na przestrzeni wektorowej.

Mając niezbędny obiekt geometryczny, możemy już wysłowić oczekiwane

**Stwierdzenie 3.** Przyjmijmy zapis Def. 5 i 4. Wiązka wektorowa  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_\mathbb{V})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażona w strukturę metryczną  $g$  jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiązka wyznacznikowa  $\det \mathbb{V}$  ma nigdzie nieznikające globalne cięcia.

*Dowód:* Wynika wprost z definicji wiązki wyznacznikowej przedstawionej i wcześniejszej dyskusji. Istotnie, na wstępie zauważmy, że obecność metryki na  $\mathbb{V}$  pozwala nam na utożsamienie (lokalnych) baz przestrzeni cięć  $\mathbb{V}$  i  $\mathbb{V}^*$ . To rzekłszy, stwierdzamy, że orientowalność, w rozumieniu Def. 4, jest równoznaczna z istnieniem takiej rodziny  $\{\sigma_i^a\}_{a \in \overline{1, N}}$ ,  $i \in I$  lokalnych baz przestrzeni cięć  $\mathbb{V}$  (indeksowanej przez zbiór indeksujący  $I$  pokrycia trywializującego  $\mathbb{V}$ ), dla której odwzorowania przejścia są określone przez rodziny odwzorowań (przejścia) z  $\text{SO}(p, N-1; \mathbb{R})$  gładko indeksowane przez niepuste przecięcia  $\mathcal{O}_{ij}$ . Równoważnie, lokalne cięcia  $\sigma_i^1 \wedge \sigma_i^2 \wedge \dots \wedge \sigma_i^N$  wiązki  $\wedge^N \mathbb{V}$  są przez rzeczzone odwzorowania przejścia zszywane wedle schematu

$$\sigma_i^1 \wedge \sigma_i^2 \wedge \dots \wedge \sigma_i^N \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \det \circ g_{ij} \triangleright \sigma_j^1 \wedge \sigma_j^2 \wedge \dots \wedge \sigma_j^N \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \sigma_j^1 \wedge \sigma_j^2 \wedge \dots \wedge \sigma_j^N \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}},$$

okazują się zatem być ograniczeniami (do odnośnych dziedzin trywializacji  $\mathcal{O}_i$ ) cięcia globalnego tejże wiązki, którego istnienie jest tożsame z istnieniem cięcia globalnego wiązki  $\det \mathbb{V}$ .  $\square$

**Definicja 6.** Przyjmijmy zapis Def. 5 i 4. **Orientacja na wiązce wektorowej**  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_\mathbb{V})$  (nad ciałem bazowym  $\mathbb{R}$ ) wyposażonej w strukturę metryczną o sygnaturze  $(p, N-p)$  i względem tej struktury orientowalnej to wybór podwiązki zredukowanej (w rozumieniu Def. 1)

$$\text{F}_\text{SO}\mathbb{V} \subset \text{F}_\text{O}\mathbb{V}$$

wzdłuż włożenia kanonicznego

$$j_{\text{SO}(p, N-p; \mathbb{R})} : \text{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \rightarrow \text{O}(p, N-p; \mathbb{R})$$

lub – równoważnie – wybór nigdzie nie znikającego globalnego cięcia wiązki wyznacznikowej  $\det \mathbb{V}$ . Wiązkę orientowalną z wybraną orientacją określamy mianem **wiązki wektorowej zorientowanej**.

W szczególności **orientacja na rozmaiłości różniczkowalnej** orientowalnej to orientacja na jej wiązce stycznej, a rozmaiłość z wyborem orientacji to **rozmaiłość zorientowana**.

Analogicznie określamy **orientację przestrzenną** oraz **orientację czasową** na wiązce wektorowej i na rozmaiłości.

**Uwaga 3.** Wiązka wyznacznikowa  $\det \mathbb{V}$  jest wiązką liniową, przeto warunek orientowalności wiązki wektorowej  $\mathbb{V}$  wysłowiony w Stw. 3 jest w świetle Stw. 1-2.3 tożsamy z warunkiem globalnej trywialności  $\det \mathbb{V}$ . Przy tym pojawiają się naturalnie dwie rozłączne klasy abstrakcji *nigdzie nieznikających* cięć  $\det \mathbb{V}$  (tj. orientacji) względem relacji dyfeotopijnej równoważności, którą definiujemy, jak następuje: nigdzie nieznikające cięcia  $\sigma_\alpha : B \rightarrow \det \mathbb{V} \setminus \mathbf{0}_{\det \mathbb{V}}(B) \subset \det \mathbb{V}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  są równoważne, jeśli istnieje gładkie odwzorowanie

$$h : [0, 1] \times B \rightarrow \det \mathbb{V} \setminus \mathbf{0}_{\det \mathbb{V}}(B) : (t, x) \mapsto h_t(x)$$

o własnościach

$$\pi_{\det \mathbb{V}} \circ h_t = \text{id}_B \quad \wedge \quad h_0 = \sigma_1 \quad \wedge \quad h_1 = \sigma_2.$$

Należy podkreślić, że przeciwdziedzina  $h$  jest wiązką wyznacznikowa z *wyjętym cięciem zerowym*, każde więc z odwzorowań  $h_t : B \rightarrow \det \mathbb{V} \setminus \mathbf{0}_{\det \mathbb{V}}(B)$ ,  $t \in [0, 1]$  jest nigdzie nieznikającym cięciem (globalnym)  $\det \mathbb{V}$ . Obecność dwóch nierównoważnych klas orientacji na  $\mathbb{V}$  objawia się także bezpośrednio w opisie lokalnym przedstawionym w tezie i dowodzie Tw. 4, o czym przekonamy się obecnie. Niechaj  $\tau_i : \pi_{\det \mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}$ ,  $i \in I$  będzie rodziną trywializacji lokalnych wiązki wyznacznikowej stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi wiązki reperów ortonormalnych o (zredukowanych) odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{O}(p, N-p; \mathbb{R})$ . Odwzorowania przejścia dla tej rodziny trywializacji przyjmują znajomą postać

$$\tau_i \circ \tau_j^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O} : (x, r) \mapsto (x, \gamma_{ij}(x) \cdot r),$$

przy czym – zgodnie z wprowadzoną wcześniej notacją –

$$\gamma_{ij} = \det_{(N)} \circ g_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

W świetle Stw. 3.4 istnienie trywializacji  $\tau_i$  jest równoznaczne z istnieniem cięć lokalnych, które konstruujemy według przepisu podanego w dowodzie tegoż stwierdzenia,

$$\sigma_{\tau_i} : \mathcal{O}_i \rightarrow \det \mathbb{V} : x \mapsto \tau_i^{-1}(x, 1).$$

Założenie o orientowalności  $\mathbb{V}$  daje nam do ręki rodzinę odwzorowań lokalnie stałych  $\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $i \in I$  o własności (4), których możemy użyć do zdefiniowania nowych cięć lokalnych

$$\tilde{\sigma}_{\tau_i} := \sigma_{\tau_i} \cdot \text{Inv} \circ \eta_i, \quad i \in I.$$

Bez trudu przekonujemy się, że te ostatnie są ograniczeniami cięcia globalnego, o którym jest mowa wyżej, oto bowiem w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\tau_j}(x) &= \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_j^{-1}(x, 1) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}(x, \gamma_{ij}(x)) = \eta_j(x)^{-1} \cdot \gamma_{ij}(x) \cdot \tau_i^{-1}(x, 1) \\ &= \eta_i(x)^{-1} \cdot \tau_i^{-1}(x, 1) \equiv \tilde{\sigma}_{\tau_i}(x). \end{aligned}$$

W wyborze danych trywializujących (globalnie)  $\{\eta_i\}_{i \in I}$  ogranicza nas jedynie warunek (4), przeto dowolne dwie rodziny takich danych:  $\{\eta_i^\alpha\}_{i \in I}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  spełniają warunki

$$(\eta_j^2 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^2) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \gamma_{ij} = (\eta_j^1 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^1) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\emptyset,$$

z których dla odwzorowań

$$\Delta_i := \eta_i^2 \cdot \text{Inv} \circ \eta_i^1 : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

wyprowadzamy równoważny im **warunek 0-kocyklu**

$$\forall_{(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_\emptyset} : \delta \Delta_{ij} = (\Delta_j \cdot \text{Inv} \circ \Delta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = 1.$$

Odwzorowania te są zatem ograniczeniami odwzorowania gładkiego

$$\Delta : B \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \Delta \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv \Delta_i,$$

czyli stałego na spójnych składowych bazy (tj. w istocie należącego do  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{|\pi_0(B)|}$ , gdzie  $|\pi_0(B)|$  jest liczbą spójnych składowych  $B$ ). Zauważmy, że przejściu

$$\eta_i \mapsto \Delta \cdot \eta_i^1, \quad i \in I$$

towarzyszy (globalna) transformacja znaku skonstruowanego powyżej cięcia globalnego,

$$\tilde{\sigma}_{\tau_i} \mapsto \Delta^{-1} \cdot \tilde{\sigma}_{\tau_i} \equiv \Delta \cdot \tilde{\sigma}_{\tau_i},$$

przy czym ilekroć  $\Delta = -1$  otrzymujemy tym sposobem cięcie dyfeotopijnie nierównoważne (w sensie sprecyzowanym wcześniej) z wyjściowym, reprezentujące nierównoważną wyjściowej orientację na  $\mathbb{V}$ .

Nasze rozumowanie podsumowujemy w poniższym

**Wnioski 2.** *Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów orientacji na (orientowalnej) wiązce wektorowej  $(\mathbb{V}, B, \mathbb{R}^{\times N}, \pi_{\mathbb{V}})$  wyposażonej w strukturę metryczną  $g \in \Gamma(\mathbb{V}^* \otimes_{\mathbb{R}, B} \mathbb{V}^*)$  o sygnaturze  $(p, N-p)$ ,  $p \in \overline{0}, \overline{N}$  jest określona nad dowolnie rozdrobionym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O}$  rodzina danych lokalnych  $\{\Delta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}_{i \in I}$  spełniających warunek 0-kocyklu*

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_e} : \tilde{\delta} \Delta_{ij} = 1.$$

*Relacja między dowolnymi dwiema orientacjami na  $\mathbb{V}$ , rozumianymi jako redukcje wiązki reperów ortogonalnych  $F_{\mathbb{O}}\mathbb{V}$  wzdłuż włożenia kanonicznego  $\mathcal{J}_{\text{SO}(p, N-p; \mathbb{R})} : \text{SO}(p, N-p; \mathbb{R}) \rightarrow \text{O}(p, N-p; \mathbb{R})$  o zdefiniowanych w dowodzie Tw. 4 danych lokalnych  $\{h_i^\alpha : \mathcal{O}_i \rightarrow \text{O}(p, N-p; \mathbb{R})\}_{i \in I}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , jest ustalana przez (stosowne) dane lokalne  $\Delta_i$  według schematu*

$$\det_{(N)} \circ h^2 = \Delta \cdot \det_{(N)} \circ h^1,$$

przy czym **klasy orientacji** wiązki  $\mathbb{V}$  są określone jako klasy abstrakcji relacji równoważności

$$h^2 \sim_{\tilde{\delta}} h^1 \iff \Delta := \det_{(N)} \circ h^2 \cdot \text{Inv} \circ \det_{(N)} \circ h^1 \equiv 1.$$

Nasze rozważania doprowadziły nas do momentu, w którym – o ile tylko pierwsza klasa Stiefela–Whitneya  $w_1(TM)$  danej rozmaitości metrycznej  $(M, g)$  znika – możemy dokonać redukcji wiązki baz wiązki stycznnej wedle schematu

$$(F_{\text{GL}}TM, B, \text{GL}(D; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{GL}}TM}) \quad \searrow \quad (F_{\text{SO}}TM, B, \text{SO}(p, D-p; \mathbb{R}), \pi_{F_{\text{GL}}TM} \upharpoonright_{F_{\text{SO}}TM}).$$

Stajemy przed ostatnim wyzwaniem: „przedłużenia” otrzymanej tym sposobem wiązki baz zorientowanych ortonormalnych wiązki stycznnej wzdłuż nakrycia uniwersalnego (1).

#### 4. PROLONGACJA WZDŁUŻ ROZSZERZENIA CENTRALNEGO – OBSTRUKCJI I KLASYFIKACJA

Stosownej formalizacji koncepcji „przedłużenia” wiązki głównej wzdłuż nakrycia (uniwersalnego) dostarcza nam

**Definicja 7.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy i niechaj  $\Gamma$  będzie *przemienną* grupą dyskretną,  $G, \widehat{G}$  zaś – grupami Liego, dla których określony jest krótki ciąg dokładny grup

$$\mathbf{1} \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\mathcal{J}_\Gamma} \widehat{G} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} G \longrightarrow \mathbf{1}$$

czyniący z trójki  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \widehat{\varphi})$  dyskretne rozszerzenie centralne grupy  $G$  przez grupę  $\Gamma$ , przy czym zakładamy, że epimorfizm  $\widehat{\varphi}$  jest submersywnym nakryciem topologicznym. **Prolongacją wiązki głównej**  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  **wzdłuż rozszerzenia centralnego**  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$  (albo  $\widehat{G}$ -strukturą na wiązce głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$ ) nazywamy parę

$$((P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}), (\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$$

złożoną z

- wiązki głównej  $(P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}})$ ;
- morfizmu wiązek głównych

$$(\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}) : (P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}) \longrightarrow (P_G, B, G, \pi_{P_G}).$$

Prolongacje  $((P_{\widehat{G}}^\alpha, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^\alpha}), (\Phi_\alpha, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nazywamy **równoważnymi**, ilekroć istnieje izomorfizm wiązek głównych

$$(\Psi, \text{id}_B, \text{id}_{\widehat{G}}) : (P_{\widehat{G}}^1, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^1}) \xrightarrow{\cong} (P_{\widehat{G}}^2, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^2}).$$

Stosownej kwantyfikacji obstrukcji dla prolongacji dostarcza

**Twierdzenie 6.** Przyjmijmy zapis Def. 7. Prolongacja wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie trywializujące  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  bazy tejsze wiązki, z którym stowarzyszona jest rodzina odwzorowań lokalnie gładkich

$$\widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

o własnościach – zapisanych dla dowolnych  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  –

$$\widehat{\gamma}_{ji} = \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}$$

i

$$\forall i \in I : \widehat{\gamma}_{ii} = e_{\widehat{G}}$$

oraz

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij},$$

gdzie  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$  są odwzorowaniami przejścia wiązki  $P_G$  stowarzyszonymi z pokryciem  $\mathcal{O}$ , i takich, dla których są określone odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

spełniające warunki:

$$\forall i \in I : \gamma_{ii} = e_{\widehat{G}}, \quad \forall (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}} : \gamma_{ji} = \text{Inv} \circ \gamma_{ij}$$

oraz

$$\forall (i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}} : (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}}.$$

*Dowód:* Załóżmy, że istnieje prolongacja  $((P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}}), (\Phi, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$  wiązki  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  i oznaczmy jako  $\widehat{r}$ . (wzgl.  $r$ ) działanie definiujące grupy strukturalnej  $\widehat{G}$  (wzgl.  $G$ ) na pierwszej (wzgl. drugiej) z tych wiązek. Wybrawszy trywializacje lokalne:  $\widehat{\tau}_i : \pi_{P_{\widehat{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \widehat{G}$  o odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \widehat{G}$  (dla wiązki  $P_{\widehat{G}}$ ) oraz  $\tau_i : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow G$  (dla wiązki  $P_G$ ), stowarzyszamy z morfizmem  $\Phi$  jego dane lokalne

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow G, \quad i \in I,$$

które w analogii do (dowodu) Tw. 5-6.2 definiujemy, jak następuje:

$$\tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) =: (x, h_i(x)), \quad x \in \mathcal{O}_i.$$

Powyższa definicja prowadzi do tożsamości, zapisanej dla dowolnego elementu  $g \in \widehat{G}$ , a wynikającej z  $\widehat{G}$ -ekwiwariantności  $\widehat{\tau}_i$  i  $\Phi$  oraz  $G$ -ekwiwariantności  $\tau_i$ ,

$$\begin{aligned} \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, g) &\equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}} \cdot g) = \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{r}_g \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) = \tau_i \circ r_{\widehat{\varphi}(g)} \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) \\ &= (\text{id}_B \times \wp_{\widehat{\varphi}(g)}^G) \circ \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, e_{\widehat{G}}) \equiv (\text{id}_B \times \wp_{\widehat{\varphi}(g)}^G)(x, h_i(x)) \\ &= (x, h_i(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(g)), \end{aligned}$$

na podstawie której bez trudu wyprowadzamy związek pomiędzy odwzorowaniami przejścia obu wiązek (nad  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ ),

$$(x, h_i(x) \cdot_G \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x)) \equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1}(x, \widehat{g}_{ij}(x)) \equiv \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_i^{-1} \circ (\widehat{\tau}_i \circ \widehat{\tau}_j^{-1})(x, e_{\widehat{G}})$$

$$\begin{aligned}
 &= \tau_i \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{G}}) = (\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ \tau_j \circ \Phi \circ \widehat{\tau}_j(x, e_{\widehat{G}}) \\
 &= \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, h_j(x)) = (x, g_{ij}(x) \cdot_G h_j(x)),
 \end{aligned}$$

czyli

$$(5) \quad \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}(x) = h_i(x)^{-1} \cdot_G g_{ij}(x) \cdot_G h_j(x).$$

Ustalmy dowolne ciągle (wzgl. gładkie) przeciwobrazy  $\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}$  odwzorowań  $h_i$ ,

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i = h_i, \quad i \in I.$$

Ich istnienie gwarantuje Tw.1-2.1, które zapewnia, że każdy punkt w  $G$  ma pewne (spójne) otoczenie otwarte, na którym jest określone gładkie cięcie lokalne, zatem możemy zawsze tak dobrać (rozdrobnic) pokrycie trywializujące  $\mathcal{O}$ , iżby ciągle obrazy jego elementów względem odwzorowań  $h_i$  zawierały się w rzeczonych otoczeniach elementów grupy  $G$ . Wybór przeciwobrazów  $\widehat{h}_i$  pozwala nam przepisać wyprowadzoną wcześniej relację w postaci

$$\widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_j(x)^{-1}) = g_{ij}(x),$$

z której jasno wynika, że odwzorowania (lokalnie) ciągle (wzgl. gładkie)

$$(6) \quad \widehat{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G} : x \mapsto \widehat{h}_i(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_j(x)^{-1}$$

spełniają warunki wymienione w tezie dowodzonego twierdzenia przy wyborze

$$\forall (i,j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}} : \gamma_{ij} = e_{\widehat{G}} \in \mathcal{J}\Gamma(\Gamma).$$

Odwracając tok rozumowania, przyjmijmy, że dane są trywializacje lokalne  $\tau_i^G : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$ ,  $i \in I$  wiązki  $P_G$  o odwzorowaniach przejścia  $g_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow G$ ,  $(i,j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}$  wraz ze stowarzyszonymi z nimi odwzorowaniami  $\widehat{\gamma}_{ij}$  oraz  $\gamma_{ij}$  jak w tezie twierdzenia, a wtedy możemy zdefiniować odwzorowania

$$(7) \quad \widetilde{\gamma}_{ij} := \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ij} \equiv \widehat{\gamma}_{ij} \cdot \gamma_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}, \quad (i,j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}$$

które wobec relacji  $\text{Ker } \widehat{\varphi} = \mathcal{J}\Gamma(\Gamma)$  spełniają tożsamości

$$\widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{ij} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij} = g_{ij},$$

a nadto – w konsekwencji inkluzji  $\mathcal{J}\Gamma(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\widehat{G})$  – także

$$\begin{aligned}
 (\widetilde{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} &= (\widehat{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ik} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \cdot \text{Inv} \circ (\gamma_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \gamma_{ik} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \\
 &= e_{\widehat{G}},
 \end{aligned}$$

Rodzina  $\{\widetilde{\gamma}_{ij}\}_{(i,j) \in \langle I \times 2 \rangle_{\mathcal{O}}}$  definiuje przeto – na mocy Tw.1-2.2 – wiązkę główną  $(P_{\widehat{G}}, B, \widehat{G}, [\text{pr}_1])$  o grupie strukturalnej  $\widehat{G}$ , przestrzeni totalnej

$$P_{\widehat{G}} \equiv \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{G}) \right) / \sim_{\widetilde{\gamma}}.$$

i odwzorowaniach przejścia  $\widetilde{\gamma}_{ij}$  stowarzyszonych z trywializacjami lokalnymi  $[\tau_i]$  zdefiniowanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Na rozmaitości  $P_{\widehat{G}}$  możemy przy tym określić odwzorowania lokalnie gładkie

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{G} \xrightarrow{\text{id}_B \times \widehat{\varphi}} \mathcal{O}_i \times G \xrightarrow{\tau_i^{G-1}} \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna  $P_{\widehat{G}}$  we włókna  $P_G$  w sposób jawnie  $\widehat{G}$ -ekwiwariantny, o czym przekonujemy się nad dowolnym punktem  $x \in \mathcal{O}_i$  i dla dowolnych elementów  $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{G}$ ,

$$\begin{aligned}
 \Phi_i([(x, i, \widehat{g})] \llcorner_{P_{\widehat{G}}} \widehat{h}) &= \Phi_i([(x, i, \widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})]) = \tau_i^{G-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h})) \\
 &= \tau_i^{G-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h})) = \tau_i^{G-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \llcorner_{P_G} \widehat{\varphi}(\widehat{h}) \\
 &\equiv \Phi_i([(x, i, \widehat{g})]) \llcorner_{P_G} \widehat{\varphi}(\widehat{h}).
 \end{aligned}$$

Łatwo przekonujemy się, że odwzorowania te określają odwzorowanie globalnie gładkie

$$\Phi : P_{\widehat{G}} \longrightarrow P_G$$

o ograniczeniach

$$\Phi \upharpoonright_{[\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i,$$

albowiem dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  i  $\widehat{g} \in \widehat{G}$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \Phi_j([(x, i, \widehat{g})]) &= \Phi_j([(x, j, \widetilde{\gamma}_{ji}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g})]) \equiv \tau_j^G{}^{-1}(x, \widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{ji}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\ &= \tau_j^G{}^{-1}(x, g_{ji}(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})) = \tau_i^G{}^{-1}(x, \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \equiv \Phi_i([(x, i, \widehat{g})]). \end{aligned}$$

Jest zatem  $\Phi$  postulowanym morfizmem wiązek głównych.  $\square$

**Uwaga 4.** Zauważmy, że każda rodzina odwzorowań  $\{\widehat{\gamma}_{ij}\}_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}}$  o własnościach

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} : \left( \widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{ij} = g_{ij} \quad \wedge \quad \widetilde{\gamma}_{ji} = \text{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ij} \right)$$

oraz

$$\forall_{i \in I} : \widehat{\gamma}_{ii} = e_{\widehat{G}}$$

spełnia – dla dowolnych  $(i, j, k) \in (I \times 3)_{\mathcal{O}}$  – warunki

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} \circ (\widetilde{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} &= (\widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{jk}) \cdot (\widehat{\varphi} \circ \text{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ik}) \cdot (\widehat{\varphi} \circ \widetilde{\gamma}_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} \\ &= g_{jk} \cdot \text{Inv} \circ g_{ik} \cdot g_{ij} = e_G, \end{aligned}$$

które wobec założeń poczynionych w odniesieniu do epimorfizmu  $\widehat{\varphi}$  implikują

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_{\mathcal{O}}} : \widehat{w}_{ijk} := \widetilde{\gamma}_{jk} \cdot \text{Inv} \circ \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij} : \mathcal{O}_{ijk} \longrightarrow \text{Ker } \widehat{\varphi} = \text{Image } \mathcal{J}_{\Gamma} \equiv \mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma).$$

Z racji inkluzji  $\mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma) \subset \mathcal{Z}(\widehat{G})$  otrzymujemy zatem – dla dowolnych  $(i, j, k, l) \in (I \times 4)_{\mathcal{O}}$  – tożsamość

$$\begin{aligned} \check{\delta} \widehat{w}_{ijkl} &:= (\widehat{w}_{jkl} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{w}_{ikl}) \cdot \widehat{w}_{ijl} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{w}_{ijk})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &\equiv ((\widetilde{\gamma}_{kl} \cdot \widetilde{\gamma}_{lj} \cdot \widetilde{\gamma}_{jk}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{ki} \cdot \widetilde{\gamma}_{il} \cdot \widetilde{\gamma}_{lk}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{jl} \cdot \widetilde{\gamma}_{li} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{ji} \cdot \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{kj})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= ((\widetilde{\gamma}_{ki} \cdot \widetilde{\gamma}_{il} \cdot \widetilde{\gamma}_{lk}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{kl} \cdot \widetilde{\gamma}_{lj} \cdot \widetilde{\gamma}_{jk}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{jl} \cdot \widetilde{\gamma}_{li} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{ji} \cdot \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{kj})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= (\widetilde{\gamma}_{ki} \cdot \widetilde{\gamma}_{il} \cdot \widetilde{\gamma}_{lj} \cdot \widetilde{\gamma}_{jk} \cdot (\widetilde{\gamma}_{jl} \cdot \widetilde{\gamma}_{li} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{ji} \cdot \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{kj})) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \\ &= (\widetilde{\gamma}_{ki} \cdot \widetilde{\gamma}_{il} \cdot \widetilde{\gamma}_{lj} \cdot (\widetilde{\gamma}_{jl} \cdot \widetilde{\gamma}_{li} \cdot \widetilde{\gamma}_{ij}) \cdot (\widetilde{\gamma}_{ji} \cdot \widetilde{\gamma}_{ik} \cdot \widetilde{\gamma}_{kj}) \cdot \widetilde{\gamma}_{jk}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijkl}} \equiv e_{\widehat{G}}, \end{aligned}$$

określaną mianem **warunku 2-kocyklu**. Stwierdzamy bez trudu, że tożsamość powyższa nie zmienia się, jeśli wybraliśmy dowolne odwzorowania lokalnie stałe

$$\psi_{ij} \equiv \text{Inv} \circ \psi_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma),$$

dokonamy w niej podstawienia

$$\widehat{w}_{ijk} \longmapsto \widehat{w}_{ijk} \cdot (\psi_{ji} \cdot (\text{Inv} \circ \psi_{ki}) \cdot \psi_{kj}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} =: \widehat{w}_{ijk} \cdot \check{\delta} \psi_{ijk}.$$

Topologia nakrycia  $\widehat{\varphi}$  zapewnia istnienie lokalnie gładkich podniesień  $\widetilde{\gamma}_{ij}$  odwzorowań przejścia  $g_{ij}$ , przy czym (pełna) swoboda wyboru podniesienia jest opisywana przez powyższe podstawienia (dowolne dwa podniesienia  $\widetilde{\gamma}_{ij}$  i  $\widetilde{\gamma}'_{ij}$  są w relacji  $\widetilde{\gamma}'_{ij} = \widetilde{\gamma}_{ij} \cdot \psi_{ij}$  dla pewnego  $\psi_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \text{Ker } \widehat{\varphi} = \mathcal{J}_{\Gamma}(\Gamma)$ ), możemy więc – w świetle Tw. 6 – wyciągnąć z naszych dotychczasowych rozważań następujące

**Wnioski 3.** *Płociową miarą obstrukcji topologicznej dla istnienia prolongacji wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$  jest nieznikająca przy dowolnie rozdrobionym pokryciu trywializującym  $\mathcal{O}$  klasa zdefiniowanych powyżej danych lokalnych  $\{\widehat{w}_{ijk} : \mathcal{O}_{ijk} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)\}_{(i,j,k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}}$ , spełniających warunek 2-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k,l) \in \langle I^{\times 4} \rangle_{\mathcal{O}}} : \delta \widehat{w}_{ijkl} = e_{\widehat{G}},$$

względem relacji równoważności

$$\widehat{w}_{\dots}^2 \sim_{\delta} \widehat{w}_{\dots}^1 \iff$$

$$\exists \{ \psi_{ij} = \text{Inv} \circ \psi_{ji} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma) \}_{(i,j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}} \forall_{(i,j,k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}} : \widehat{w}_{ijk}^2 = \widehat{w}_{ijk}^1 \cdot \delta \psi_{ijk}.$$

Klasę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia) określamy mianem **klasy obstrukcji dla istnienia prolongacji** wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$ .

Ilekość wprowadzona powyżej klasa obstrukcji dla istnienia prolongacji jest zerowa, precyzyjnej kwantyfikacji dostępnej swobody wyboru prolongacji dostarcza

**Twierdzenie 7.** Przyjmijmy zapis Def.7. Niechaj  $((P_{\widehat{G}}^\alpha, B, \widehat{G}, \pi_{P_{\widehat{G}}^\alpha}), (\Phi_\alpha, \text{id}_B, \widehat{\varphi}))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą prolongacjami wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$  i niech  $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  będą odnośnymi odwzorowaniami przejścia stowarzyszonymi z trywializacjami lokalnymi  $\tau_i^\alpha : \pi_{P_{\widehat{G}}^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \widehat{G}$ ,  $i \in I$  nad wspólnym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ . Wówczas istnieją odwzorowania lokalnie gładkie

$$\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}, \quad i \in I$$

i odwzorowania lokalnie stałe

$$\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)$$

spełniające dla dowolnych indeksów  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$  warunek 1-kocyklu

$$(\gamma_{jk} \cdot \gamma_{ik}^{-1} \cdot \gamma_{ij}) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{G}},$$

które ustalają relację pomiędzy odwzorowaniami przejścia w postaci

$$(8) \quad \widehat{g}_{ij}^2 = \gamma_{ij} \cdot (\widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}.$$

I odwrotnie, każda rodzina odwzorowań gładkich  $\widehat{g}_{ij}^2$  pozostająca w powyższej relacji z odwzorowaniami przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  ustalonej prolongacji dla pewnych odwzorowań  $\widehat{h}_i$  i  $\gamma_{ij}$  spełniających wymienione wcześniej warunki określa prolongację o odwzorowaniach przejścia tożsamy z  $\widehat{g}_{ij}^2$ .

Prolongacje o odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  i  $\widehat{g}_{ij}^2$  są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie pokrycie  $\mathcal{O}$  (współ)trywializujące odnośne wiązki  $P_{\widehat{G}}^1$  i  $P_{\widehat{G}}^2$ , w którym relacja (8) jest spełniona dla

$$\gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}},$$

gdzie

$$\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad i \in I$$

są pewnymi odwzorowaniami lokalnie stałymi.

*Dowód:* Niechaj  $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą odwzorowaniami przejścia wiązek głównych  $P_{\widehat{G}}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wyznaczających prolongacje wiązki głównej  $P_G$  i niech

$$(9) \quad \widehat{\gamma}_{ij}^\alpha = \widehat{h}_i^\alpha \cdot \widehat{g}_{ij}^\alpha \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$$

będą odwzorowaniami, o których mowa w Tw.6, stowarzyszonymi z nimi zgodnie z Równ. (6). Jako że

$$\widehat{\varphi} \circ (\widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1) = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \widehat{\varphi} \circ \text{Inv} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1 = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{\gamma}_{ij}^1 = g_{ij} \cdot \text{Inv} \circ g_{ij} = e_G,$$

a przy tym  $\text{Ker } \widehat{\varphi} = \text{Image } \mathcal{J}_\Gamma$ , przeto z powyższej równości wynika istnienie odwzorowań lokalnie stałych

$$\gamma_{ij}^{12} : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma), \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

o własności

$$\widehat{\gamma}_{ij}^2 = \gamma_{ij}^{12} \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^1.$$

Na jej podstawie wyprowadzamy – w zapisie Uwagi 4 – tożsamość (por.: dowód Tw. 6)

$$\check{\delta}\gamma_{ijk}^{12} = e_{\widehat{\mathbb{G}}}.$$

Przywoławszy definicje (9), ustalamy postulowaną relację

$$\widehat{g}_{ij}^2 = \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^2 \cdot \widehat{h}_j^2 = \gamma_{ij}^{12} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{\gamma}_{ij}^1 \cdot \widehat{h}_j^2 \equiv \gamma_{ij}^{12} \cdot (\text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1) \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \widehat{h}_j^2 \cdot \widehat{h}_j^1),$$

w której identyfikujemy odwzorowania

$$\widehat{h}_i = \text{Inv} \circ \widehat{h}_i^2 \cdot \widehat{h}_i^1, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{12}$$

o pożądaných własnościach.

Następnie przypuścmy, odwrotnie, że są dane odwzorowania  $\widehat{h}_i$  i  $\gamma_{ij}$  o własnościach wypisanych w treści dowodzonego twierdzenia, które w połączeniu z odwzorowaniami przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  wiązki głównej  $\mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}^1$  zadającej prolongację wiązki  $\mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}$  definiują odwzorowania  $\widehat{g}_{ij}^2 := \gamma_{ij} \cdot (\widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j)$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ . Te ostatnie spełniają warunek 1-kocyklu – dla dowolnych  $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$  –

$$\check{\delta}\widehat{g}_{ijk}^2 = \check{\delta}\gamma_{ijk} \cdot (\widehat{h}_j \cdot \check{\delta}\widehat{g}_{ijk}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{\mathbb{G}}} \cdot (\widehat{h}_j \cdot e_{\widehat{\mathbb{G}}} \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ijk}} = e_{\widehat{\mathbb{G}}},$$

zatem określają – na mocy Tw. 2-3-4.2 – wiązkę główną  $(\mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}^2, B, \widehat{\mathbb{G}}, [\text{pr}_1])$  o grupie strukturalnej  $\widehat{\mathbb{G}}$ , przestrzeni totalnej

$$\mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}^2 \equiv \left( \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i \times \widehat{\mathbb{G}}) \right) / \sim_{\widehat{g}^2}$$

i odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij}^2$  pomiędzy trywializacjami lokalnymi  $[\tau_i]$  wskazanymi w dowodzie tegoż twierdzenia. Niechaj  $h_i^1 : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{G}$ ,  $i \in I$  będą danymi lokalnymi morfizmami prolongacji  $\Phi_1 : \mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}^1 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{G}}$  określonymi w ścisłej analogii do Równ. (5), tj. poprzez równości

$$\widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ij}^1 = (\text{Inv} \circ h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}},$$

a wtedy używamy odwzorowań

$$h_i^{12} := h_i^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{\varphi} \circ \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{G}, \quad i \in I,$$

aby na przestrzeni totalnej  $\mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}^2$  zadać odwzorowania lokalnie gładkie

$$\Phi_i : [\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{[\tau_i]} \mathcal{O}_i \times \widehat{\mathbb{G}} \xrightarrow{\text{id}_B \times \ell_{h_i^{12} \circ \widehat{\varphi}}} \mathcal{O}_i \times \mathbb{G} \xrightarrow{\tau_i^{\mathbb{G}-1}} \pi_{\mathbb{P}_{\mathbb{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i), \quad i \in I,$$

odwzorowujące włókna  $\mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}^2$  we włókna  $\mathbb{P}_{\mathbb{G}}$  w sposób jawnie  $\widehat{\mathbb{G}}$ -ekwiwariantny, czego dowodzi bezpośredni rachunek, wykonany nad dowolnym punktem  $x \in \mathcal{O}_i$  i dla dowolnych elementów  $\widehat{g}, \widehat{h} \in \widehat{\mathbb{G}}$ ,

$$\begin{aligned} & \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})] \triangleleft_{\mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}}^2} \widehat{h}]) = \Phi_i([[(x, i, \widehat{g} \cdot_{\widehat{\mathbb{G}}} \widehat{h})]]) = \tau_i^{\mathbb{G}-1}(x, h_i^{12}(x) \cdot_{\mathbb{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g} \cdot_{\widehat{\mathbb{G}}} \widehat{h})) \\ & = \tau_i^{\mathbb{G}-1}(x, h_i^{12}(x) \cdot_{\mathbb{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g}) \cdot_{\mathbb{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{h})) = \tau_i^{\mathbb{G}-1}(x, h_i^{12}(x) \cdot_{\mathbb{G}} \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \triangleleft_{\mathbb{P}_{\mathbb{G}}} \widehat{\varphi}(\widehat{h}) \\ & \equiv \Phi_i([[(x, i, \widehat{g})]]) \triangleleft_{\mathbb{P}_{\mathbb{G}}} \widehat{\varphi}(\widehat{h}). \end{aligned}$$

O istnieniu odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi : \mathbb{P}_{\widehat{\mathbb{G}}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{G}}$$

spełniającego warunki

$$\Phi \upharpoonright_{[\text{pr}_1]^{-1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i$$

przesądza bezpośredni rachunek, przeprowadzony dla dowolnych  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  i  $\widehat{g} \in \widehat{G}$ :

$$\begin{aligned}
 \Phi_j([(x, i, \widehat{g})]) &= \Phi_j([(x, j, \widehat{g}_{ji}^2(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g})]) \\
 &\equiv \tau_j^{G^{-1}}(x, h_j^{12}(x) \cdot_G \widehat{\varphi} \circ \widehat{g}_{ji}^2(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\
 &= \tau_j^{G^{-1}}(x, h_j^1(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_j(x)^{-1} \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_j(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ji}^1(x) \cdot_{\widehat{G}} \widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\
 &= \tau_j^{G^{-1}}(x, h_j^1(x) \cdot_G h_j^1(x)^{-1} \cdot_G g_{ji}(x) \cdot_G h_i^1(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\
 &= \tau_i^{G^{-1}}(x, h_i^1(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{h}_i(x)^{-1}) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \equiv \tau_i^{G^{-1}}(x, h_i^{12}(x) \cdot_G \widehat{\varphi}(\widehat{g})) \\
 &\equiv \Phi_i([(x, i, \widehat{g})]).
 \end{aligned}$$

Wraz z podaną wcześniej definicją wiązki głównej  $P_{\widehat{G}}$  morfizm ten określa poszukiwaną prolongację wiązki  $P_G$ .

Na zakończenie zajmiemy się opisem lokalnym prolongacji (nie)równoważnych. Niechaj więc  $P_{\widehat{G}}^\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema wiązkami głównymi współdefiniującymi prolongację wiązki  $P_G$ , o odnośnych odwzorowaniach przejścia  $\widehat{g}_{ij}^\alpha : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \widehat{G}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ , przy czym założymy, że istnieje morfizm wiązek głównych  $\Psi : P_{\widehat{G}}^1 \rightarrow P_{\widehat{G}}^2$  pokrywający identyczność na bazie. W świetle Tw. 3.2 dane lokalne  $\widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}$ ,  $i \in I$  takiego morfizmu zadają relację między odwzorowaniami przejścia w postaci

$$\widehat{g}_{ij}^2 = (\widehat{h}_i \cdot_{\widehat{G}} \widehat{g}_{ij}^1 \cdot_{\widehat{G}} \text{Inv} \circ \widehat{h}_j) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}, \quad (i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

to jednak oznacza, że dla dowolnej pary  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  mamy

$$\gamma_{ij} \equiv e_{\widehat{G}}$$

i możemy położyć

$$\eta_i = e_{\widehat{G}} \in \mathcal{J}\Gamma(\Gamma), \quad i \in I.$$

Odwracając bieg rozumowania, rozpatrzmy parę prolongacji o odwzorowaniach przejścia powiązanych relacją (8), w której odwzorowania lokalnie stałe  $\gamma_{ij} = (\eta_j \cdot \text{Inv} \circ \eta_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}}$ ,  $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$  są wyznaczane przez także odwzorowania  $\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{J}\Gamma(\Gamma)$ ,  $i \in I$ . Wykorzystując inkluzję  $\mathcal{J}\Gamma(\Gamma) \subset \mathcal{Z}(\widehat{G})$ , przepisujemy Równ. (8) w postaci

$$\widehat{g}_{ij}^2 = ((\text{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i) \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ (\text{Inv} \circ \eta_j \cdot \widehat{h}_j)) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}},$$

z której odczytujemy – ponownie w odwołaniu do Tw. 5-6.2 – dane lokalne morfizmu wiązek głównych

$$\widetilde{h}_i := \text{Inv} \circ \eta_i \cdot \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G}, \quad i \in I.$$

Teza Stw. 3.5 przesądza, że jest to w istocie izomorfizm, i tym samym zamyka dowód.  $\square$

**Uwaga 5.** Należy odnotować, że skwantyfikowana w powyższym twierdzeniu w Równ. (8) swoboda redefinicji odwzorowań przejścia  $\widehat{g}_{ij}^1$  w wiązce głównej  $P_{\widehat{G}}$  określającej prolongację wiązki wyjściowej  $P_G$  obejmuje wszelkie wybory dowolne, przed jakimi stawia nas procedura prolongacji. Istotnie, uwzględnia ona możliwość przetransformowania wiązki  $P_{\widehat{G}}$  wzdłuż dowolnego morfizmu wiązek głównych o grupie strukturalnej  $\widehat{G}$ ,

$$\widehat{g}_{ij}^1 \mapsto \widehat{h}_i \cdot \widehat{g}_{ij}^1 \cdot \text{Inv} \circ \widehat{h}_j, \quad \widehat{h}_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \widehat{G},$$

zmiany wyboru podniesienia odwzorowań przejścia na  $P_G$  zgodnej ze strukturą rozszerzenia centralnego,

$$\widehat{g}_{ij}^1 \mapsto \gamma_{ij} \cdot \widehat{g}_{ij}^1, \quad \gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}\Gamma(\Gamma),$$

a nawet – spójnie ze Stw. 3.2 – możliwość przekształcenia wzdłuż dowolnego morfizmu wyjściowej wiązki głównej  $P_G$ .

Wreszcie też na zakończenie warto podsumować wyniki naszych dociekań w formie

**Wnioski 4.** *Ilościową miarą swobody nierównoważnych wyborów prolongacji wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$  jest określona nad dowolnie rozdrobionym pokryciem trywializującym  $\mathcal{O}$  grupa przemieniana klas zdefiniowanych w Tw. 7 danych lokalnych  $\{\gamma_{ij} : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)\}_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}}$ , spełniających warunek 1-kocyklu*

$$\forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_\mathcal{O}} : \delta \tilde{\gamma}_{ijk} = e_{\widehat{G}},$$

względem relacji równoważności

$$\gamma_{..}^2 \sim_{\delta} \gamma_{..}^1 \iff \exists \{\eta_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{J}_\Gamma(\Gamma)\}_{i \in I} \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_\mathcal{O}} : \gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}^1 \cdot \delta \eta_{ij}.$$

Grupę tę (w granicy dowolnie drobnego pokrycia) określamy mianem **grupy klasyfikującej prolongacji** wiązki głównej  $(P_G, B, G, \pi_{P_G})$  wzdłuż rozszerzenia centralnego  $(\widehat{G}, \mathcal{J}_\Gamma, \varphi)$ . Zbiór klas równoważności prolongacji jest grupy tej torsorem.

#### DODATEK A. KRÓTKIE I TROCHĘ DŁUŻSZE CIĄGI DOKŁADNE GRUP

Niechaj  $G$  będzie grupą,  $H \subset G$  zaś – jej podgrupą normalną (tj. taką, która spełnia warunek  $\forall_{g \in G} : \text{Ad}_g(H) \subset H$ ), i niech  $\mathcal{J}_H : H \rightarrow G$  będzie włożeniem kanonicznym, a  $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$  – rzutem kanonicznym na grupę ilorazową. Para homomorfizmów  $(\mathcal{J}_H, \pi_{G/H})$ , którą zapiszemy w postaci

$$H \xrightarrow{\mathcal{J}_H} G \xrightarrow{\pi_{G/H}} G/H$$

spełnia oczywistą relację

$$\text{Ker } \pi_{G/H} = \text{Image } \mathcal{J}_H,$$

wyrażającą klasyczne utożsamienie pomiędzy dzielnikami normalnymi grup a jądrami homomorfizmów tychże. Jej naturalną abstrakcją opisuje

**Definicja 8.** Niechaj  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będzie trójką grup i niech  $\chi_\beta : G_\beta \rightarrow G_{\beta+1}$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  będzie parą homomorfizmów grup. Piątkę

$$G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3$$

nazywamy **ciągami dokładnymi (grup)**, jeżeli

$$\text{Ker } \chi_2 = \text{Image } \chi_1.$$

Ogólniej, rodzina grup i stowarzyszonych homomorfizmów opisana diagramem

$$G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} \dots \xrightarrow{\chi_{n-1}} G_n$$

nosi miano ciągu dokładnego, jeśli

$$\forall_{k \in \overline{1, n-2}} : \text{Ker } \chi_{k+1} = \text{Image } \chi_k.$$

**Krótki ciąg dokładny** to ciąg dokładny szczególnej postaci

$$\mathbf{1} \rightarrow G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3 \rightarrow \mathbf{1},$$

w którym ( $\mathbf{1}$  jest grupą trywialną i) spełniona jest koniunkcja warunków:

- (1)  $\chi_1$  jest monomorfizmem;
- (2)  $\chi_2$  jest epimorfizmem;
- (3)  $\text{Ker } \chi_2 = \text{Image } \chi_1$ .

Trójkę  $(G_2, \chi_1, \chi_2)$  nazywamy wtedy **rozszerzeniem grupy  $G_3$  przez grupę  $G_1$** . Przy tym ilekroć  $\text{Image } \chi_1 \subset \mathcal{Z}(G_2)$ , mówimy o **rozszerzeniu centralnym**<sup>2</sup> (możliwym wtedy tylko, gdy  $G_1$  jest przemieniana).

<sup>2</sup>Rozszerzenia centralne grup odgrywają istotną rolę w (kwantowo)mechanicznych i teoriopolożnych realizacjach symetrii.

**Przykłady 1.** Niechaj  $G$  będzie dowolną grupą,  $H \subset G$  zaś – jej dzielnikiem normalnym. Wówczas diagram

$$(10) \quad \mathbf{1} \longrightarrow H \xrightarrow{j_H} G \xrightarrow{\pi_{G/H}} G/H \longrightarrow \mathbf{1}$$

zadaje krótki ciąg dokładny, zwany **normalnym ciągiem dokładnym**. Ważnym przykładem takiego ciągu jest

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{j_{2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Wobec oczywistej relacji

$$\text{Ker } e^i = 2\pi\mathbb{Z}$$

wypisanej dla epimorfizmu grup  $e^i : \mathbb{R} \longrightarrow U(1) : r \longmapsto e^{ir}$ , otrzymujemy izomorfizm

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong U(1),$$

którego istnienie pozwala przepisać powyższy normalny ciąg dokładny w postaci powszechnie spotykanej w literaturze, tj.

$$\mathbf{1} \longrightarrow 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow U(1) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Ciągi dokładne grup odgrywają istotną rolę w algebrze homologicznej. Poniżej zademonstrujemy ich przydatność i naturalność w opisie struktury nader powszechnie stosowanej w matematycznym modelowaniu zjawisk (w szczególności w kontekście opisu symetrii układów fizykalnych), a stanowiącej naturalne uogólnienie struktury produktu grup. Ażeby zrozumieć właściwie sens owego uogólnienia, przeformułujemy definicję produktu pary grup  $(G_1, G_2)$  przy użyciu stosownego krótkiego ciągu dokładnego, a mianowicie:

$$\mathbf{1} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{j_1} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} G_2 \longrightarrow \mathbf{1},$$

w którego zapisie  $j_1 : G_1 \longrightarrow G_1 \times G_2 : g_1 \longmapsto (g_1, e_2)$  jest zanurzeniem kanonicznym. Zauważmy, że w tym przypadku istnieją homomorfizmy grup  $\rho \in \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G_1 \times G_2, G_1)$  oraz  $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G_2, G_1 \times G_2)$  o własnościach

$$\rho \circ j_1 = \text{id}_{G_1}, \quad \text{pr}_2 \circ \sigma = \text{id}_{G_2}.$$

Są nimi odwzorowania

$$\rho \equiv \text{pr}_1 : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 : (g_1, g_2) \longmapsto g_1$$

oraz

$$\sigma \equiv j_2 : G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2 : g_2 \longmapsto (e_1, g_2).$$

Powstaje naturalne pytanie o pojemność strukturalną tego ostatniego warunku w oderwaniu od jego powyższej szczególnej (i dość trywialnej) instancjacji. Droga do precyzyjnej odpowiedzi na to pytanie wiedzie przez poniższą

**Definicja 9.** Niechaj  $(G_\alpha, \cdot_\alpha, \text{Inv}_\alpha, \bullet \longmapsto e_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą grupami,  $\varphi : G_2 \longrightarrow \text{Aut}(G_1)$  zaś – homomorfizmem grup. **Iloczyn półprosty grup  $G_1$  i  $G_2$  prawo-stowarzyszony z automorfizmem  $\varphi$**  to grupa

$$(G_1 \times G_2, m_\varphi, \cdot_\varphi, \text{Inv}_\varphi, \bullet \longmapsto (e_1, e_2)),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} m_\varphi : (G_1 \times G_2)^{\times 2} &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\ &: ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \longmapsto (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$$\text{Inv}_\varphi : G_1 \times G_2 \curvearrowright (g_1, g_2) \longmapsto (\varphi_{\text{Inv}_2(g_2)} \circ \text{Inv}_1(g_1), \text{Inv}_2(g_2)).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$G_1 \rtimes_\varphi G_2.$$

Iloczyn półprosty grup  $G_1$  i  $G_2$  lewo-stowarzyszony z automorfizmem  $\varphi$  to grupa

$$(G_2 \times G_1, \varphi m \equiv \varphi \cdot, \varphi \cdot \text{Inv}, \bullet \mapsto (e_1, e_2)),$$

z mnożeniem

$$\begin{aligned} \varphi m &: (G_2 \times G_1)^{\times 2} \longrightarrow G_2 \times G_1 \\ &: ((g_2, g_1), (h_2, h_1)) \mapsto (g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{\text{Inv}_2(h_2)}(g_1) \cdot_1 h_1) \end{aligned}$$

i odwrotnością

$$\varphi \cdot \text{Inv} : G_2 \times G_1 \circlearrowleft : (g_2, g_1) \mapsto (\text{Inv}_2(g_2), \varphi_{g_2} \circ \text{Inv}_1(g_1)).$$

Iloczyn kartezjański grup z tak zadaną strukturą grupy oznaczamy symbolem

$$G_2 \varphi \rtimes G_1.$$

**Uwaga 6.** O tym, że w istocie mamy do czynienia ze strukturą grupową, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku – tutaj tylko dla iloczynu prawo-stowarzyszonego (dla przykładu) – wykorzystującym zarówno homomorficzny charakter  $\varphi$ ,

$$\forall_{g,h \in G_2} : \varphi_{g \cdot_2 h} = \varphi_g \circ \varphi_h,$$

jak i automorficzny charakter obrazu względem tego odwzorowania dowolnego elementu  $g \in G_2$ ,

$$\forall_{(g,h_1,h_2) \in G_2 \times G_1 \times G_1} : \varphi_g(h_1 \cdot_1 h_2) = \varphi_g(h_1) \cdot_1 \varphi_g(h_2).$$

Te warunki pozwalają nam sprawdzić – dla dowolnych  $(g_1, g_2), (h_1, h_2), (k_1, k_2) \in G_1 \times G_2$  – wszystkie aksjomaty grupy, więc łączność mnożenia,

$$\begin{aligned} &((g_1, g_2) \cdot_\varphi (h_1, h_2)) \cdot_\varphi (k_1, k_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \cdot_\varphi (k_1, k_2) \\ &= (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1) \cdot_1 \varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}(k_1), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1)), g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 k_2) \\ &\equiv (g_1, g_2) \cdot_\varphi (h_1 \cdot_1 \varphi_{h_2}(k_1), h_2 \cdot_2 k_2) \equiv (g_1, g_2) \cdot_\varphi ((h_1, h_2) \cdot_\varphi (k_1, k_2)), \end{aligned}$$

neutralność pary  $(e_1, e_2)$ ,

$$(g_1, g_2) \cdot_\varphi (e_1, e_2) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2}(e_1), g_2 \cdot_2 e_2) = (g_1 \cdot_1 e_1, g_2 \cdot_2 e_2) = (g_1, g_2),$$

$$(e_1, e_2) \cdot_\varphi (g_1, g_2) = (e_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2) = (e_1 \cdot_1 \text{id}_{G_1}(g_1), e_2 \cdot_2 g_2)$$

$$= (e_1 \cdot_1 g_1, e_2 \cdot_2 g_2) = (g_1, g_2)$$

oraz fundamentalną własność odwrotności,

$$\begin{aligned} &(g_1, g_2) \cdot_\varphi (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2^{-1}) = (g_1 \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) \\ &= (g_1 \cdot_1 \varphi_{e_2}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) = ((g_1 \cdot_1 \text{id}_{G_1}(g_1^{-1}), g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) = (g_1 \cdot_1 g_1^{-1}, g_2 \cdot_2 g_2^{-1}) \\ &= (e_1, e_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}), g_2^{-1}) \cdot_\varphi (g_1, g_2) = (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1}) \cdot_1 \varphi_{g_2^{-1}}(g_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2) \\ &= (\varphi_{g_2^{-1}}(g_1^{-1} \cdot_1 g_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2) = (\varphi_{g_2^{-1}}(e_1), g_2^{-1} \cdot_2 g_2) = (e_1, e_2). \end{aligned}$$

Obie formy iloczynu półprostego pozostają w prostej relacji wzajemnej, o czym przekonuje

**Stwierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis Def. 9. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup między iloczynami półprostymi: prawo- i lewo-stowarzyszonymi danej pary grup (przy ustalonym homomorfizmie  $\varphi$ ), który przybiera postać

$$\tau_\varphi : G_2 \varphi \rtimes G_1 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_\varphi G_2 : (g_2, g_1) \mapsto (\varphi_{g_2}(g_1), g_2).$$

*Dowód:* Zapostulowane odwzorowanie jest jawnie odwracalne, oto bowiem odwzorowanie odwrotne do niego to

$$\tau_\varphi^{-1} : G_1 \rtimes_\varphi G_2 \longrightarrow G_2 \cdot_\varphi G_1 : (g_1, g_2) \longmapsto (g_2, \varphi_{\text{Inv}_2(g_2)}(g_1)).$$

Wystarczy zatem sprawdzić warunek definiujący homomorfizm, co czynimy w bezpośrednim rachunku, dla dowolnych  $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$ ,

$$\begin{aligned} \tau_\varphi(g_2, g_1) \cdot_\varphi \tau_\varphi(h_2, h_1) &= (\varphi_{g_2}(g_1), g_2) \cdot_\varphi (\varphi_{h_2}(h_1), h_2) \\ &= (\varphi_{g_2}(g_1) \cdot_1 \varphi_{g_2} \circ \varphi_{h_2}(h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \\ &= (\varphi_{g_2 \cdot_2 h_2}(\varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1), g_2 \cdot_2 h_2) \\ &\equiv \tau_\varphi(g_2 \cdot_2 h_2, \varphi_{h_2^{-1}}(g_1) \cdot_1 h_1) \\ &\equiv \tau_\varphi((g_2, g_1)_\varphi \cdot (h_2, h_1)). \end{aligned}$$

□

Powyższe stwierdzenie pozwala nam skupić się w dalszej części dyskusji na jednej z form, np. na formie prawo-stowarzyszonej, a obserwacje poczynione w odniesieniu do niej przetłumaczyć się prosto na obserwacje dotyczące drugiej z form za pośrednictwem znalezionej izomorfizmu. Definicja iloczynu półprostego pozwala sformułować oczekiwane

**Twierdzenie 8.** Przyjmijmy zapis Def. 8 oraz 9 i niechaj  $(G_\alpha, \cdot_\alpha, \text{Inv}_\alpha, \bullet \longmapsto e_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą grupami. Istnienie krótkiego ciągu dokładnego grup

$$(11) \quad \mathbf{1} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\chi_1} G_2 \xrightarrow{\chi_2} G_3 \longrightarrow \mathbf{1},$$

wraz z parą homomorfizmów grup

$$\rho : G_2 \longrightarrow G_1, \quad \sigma : G_3 \longrightarrow G_2$$

o własnościach

$$(12) \quad \rho \circ \chi_1 = \text{id}_{G_1}$$

i

$$(13) \quad \chi_2 \circ \sigma = \text{id}_{G_3}$$

jest równoważne istnieniu homomorfizmu grup  $\varphi : G_3 \longrightarrow \text{Aut}(G_1)$  oraz izomorfizmu grup

$$\iota : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_\varphi G_3.$$

Homomorfizm  $\rho$  nazywamy **retrakcją**  $\chi_1$ , a  $\sigma$  – **cięciem**  $\chi_2$ .

*Dowód:* Niechaj będzie dany krótki ciąg dokładny (11) z retrakcją  $\rho$  i cięciem  $\sigma$ . Wykorzystując warunek (13), obliczamy – dla dowolnego elementu  $g_2 \in G_2$  –

$$\begin{aligned} \chi_2(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2)) &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \\ &= \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) = \chi_2(g_2 \cdot_2 \text{Inv}_2(g_2)) = \chi_2(e_2) \\ &= e_3, \end{aligned}$$

a stąd wniosek, że

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \in \text{Ker } \chi_2,$$

czyli też – z racji założonej dokładności ciągu (w  $G_2$ ) –

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2) \in \text{Image } \chi_1.$$

Wobec injektywności  $\chi_1$  możemy zatem zdefiniować odwzorowanie

$$\begin{aligned} \iota : G_2 &\longrightarrow G_1 \times G_3 : g_2 \longmapsto (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2 \circ \text{Inv}_2(g_2)), \chi_2(g_2)) \\ &\equiv (\xi(g_2), \chi_2(g_2)). \end{aligned}$$

Przekonamy się najpierw, że jest ono postulowanym homomorfizmem grup, przy czym dyskusja tej ewentualności doprowadzi nas wprost do definicji stosownego homomorfizmu  $\varphi$ . Dla dowolnych  $g_2, h_2 \in G_2$  wyznaczamy

$$\begin{aligned} \iota(g_2 \cdot_2 h_2) &= (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(h_2^{-1} \cdot_2 g_2^{-1})), \chi_2(g_2 \cdot_2 h_2)) \\ &= (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1}(g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2^{-1}) \cdot_2 \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2(g_2)}(h_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(h_2^{-1}))), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)) \\ &\equiv (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1}(\chi_1 \circ \xi(g_2) \cdot_2 \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2(g_2)} \circ \chi_1 \circ \xi(h_2)), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)), \end{aligned}$$

a ponieważ dla każdych  $(g_1, g_3) \in G_1 \times G_3$  zachodzi

$$\chi_2(\text{Ad}_{\sigma(g_3)} \circ \chi_1(g_1)) = \chi_2 \circ \sigma(g_3) \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1(g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma(g_3^{-1}) = g_3 \cdot_3 e_3 \cdot_3 g_3^{-1} = e_3,$$

przeto możemy przepisać powyższe w sugestywnej postaci

$$\iota(g_2 \cdot_2 h_2) = (\xi(g_2) \cdot_1 (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma \circ \chi_2(g_2)} \circ \chi_1) \circ \xi(h_2), \chi_2(g_2) \cdot_3 \chi_2(h_2)).$$

Zważywszy, że obraz  $G_3$  względem odwzorowania

$$\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1 : G_3 \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1) : g_3 \longmapsto \chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(g_3)} \circ \chi_1$$

w oczywisty sposób zawiera się w podzbiorze  $\text{Aut}(G_1) \subset \text{End}_{\mathbf{Grp}}(G_1)$ , możemy ostatecznie – na podstawie porównania wyniku naszych rachunków z formułą na  $m_\varphi$  w Def. 9 – zapisać

$$\iota(g_2 \cdot_2 h_2) = \iota(g_2) \cdot_{\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1} \circ \text{Ad}_{\sigma(\cdot)} \circ \chi_1} \iota(h_2).$$

Odwzorowanie  $\iota$  zostało skonstruowane jako homomorfizm grup, na obecnym etapie pozostaje przeto jedynie przekonać się o bijektywnym charakterze  $\iota$ . Po pierwsze więc równość

$$\iota(g_2) = (e_1, e_3)$$

oznacza parę równości

$$g_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2^{-1}) = \chi_1(e_1) = e_2 \quad \wedge \quad \chi_2(g_2) = e_3,$$

które możemy przepisać w postaci równoważnej

$$g_2 = \sigma(\chi_2(g_2)) \quad \wedge \quad \chi_2(g_2) = e_3,$$

otrzymując tym sposobem równość

$$g_2 = \sigma(e_3) = e_2,$$

przesądającą o injektywności  $\iota$ . Dla dowolnej pary  $(g_1, g_3) \in G_1 \times G_3$  wybierzmy dowolne  $g_2 \in G_2$  o własności  $\chi_2(g_2) = g_3$  (co jest możliwe z racji surjektywności  $\chi_2$ ), po czym z jego warstwy  $g_2 \text{Ker } \chi_2 = g_2 \text{Image } \chi_1$  wybierzmy reprezentanta  $g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1)$ ,  $h_1 \in G_1$ , który spełnia dodatkowy warunek

$$g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(\chi_1(h_1^{-1}) \cdot_2 g_2^{-1}) \stackrel{!}{=} \chi_1(g_1).$$

Ażeby przekonać się o tym, że reprezentant taki istnieje, upraszczamy powyższy warunek – wykonywując po drodze dokładność ciągu (11) w  $G_2$  – do postaci

$$g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2)^{-1} \stackrel{!}{=} \chi_1(g_1)$$

albo równoważnej

$$\chi_1(h_1) \stackrel{!}{=} g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2).$$

Bezpośredni rachunek

$$\chi_2(g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2)) = \chi_2(g_2)^{-1} \cdot_3 \chi_2 \circ \chi_1(g_1) \cdot_3 \chi_2 \circ \sigma \circ \chi_2(g_2)$$

$$= \chi_2(g_2)^{-1} \cdot_3 e_3 \cdot_3 \chi_2(g_2) = e_3,$$

w którym raz jeszcze przywołujemy dokładność ciągu (11) w  $G_2$  oraz warunek definiujący  $\sigma$ , przesądza o istnieniu  $h_1$ , oto bowiem pozwala on stwierdzić, że

$$g_2^{-1} \cdot_2 \chi_1(g_1) \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(g_2) \in \text{Ker } \chi_2 = \text{Image } \chi_1.$$

Znaleziony przez nas element  $\tilde{g}_2 := g_2 \cdot_2 \chi_1(h_1)$  spełnia koniunkcję warunków

$$\chi_2(\tilde{g}_2) = g_3 \quad \wedge \quad \tilde{g}_2 \cdot_2 \sigma \circ \chi_2(\tilde{g}_2^{-1}) = \chi_1(g_1),$$

więc też jego obrazem względem  $\iota$  jest

$$\iota(\tilde{g}_2) = (\chi_1 \upharpoonright_{\text{Image } \chi_1}^{-1} \circ \chi_1(g_1), g_3) = (g_1, g_3).$$

To kończy dowód pierwszej implikacji.

I odwrotnie, niechaj  $\varphi : G_3 \rightarrow \text{Aut}(G_1)$  będzie homomorfizmem grup zadającym strukturę iloczynu półprostego na  $G_1 \rtimes_{\varphi} G_3$  i niech  $\iota : G_2 \xrightarrow{\cong} G_1 \rtimes_{\varphi} G_3$  będzie izomorfizmem grup. Wówczas definiujemy odwzorowania:

$$\chi_1 : G_1 \rightarrow G_2 : g_1 \mapsto \iota^{-1}(g_1, e_3),$$

$$\chi_2 : G_2 \rightarrow G_3 : g_2 \mapsto \text{pr}_2 \circ \iota(g_2),$$

które w oczywisty sposób są homomorfizmami grup. Injektywność  $\chi_1$  wynika wprost z ciągu równoważności

$$\chi_1(g_1) = e_2 \iff (g_1, e_3) = \iota(e_2) = (e_1, e_3) \iff g_1 = e_1,$$

a równość

$$\chi_2(\iota^{-1}(e_1, g_3)) \equiv \text{pr}_2 \circ \iota \circ \iota^{-1}(e_1, g_3) = \text{pr}_2(e_1, g_3) = g_3,$$

słuszna dla dowolnego  $g_3 \in G_3$ , przesądza o surjektywności  $\chi_2$ . Pozostaje wskazać retrakcję  $\rho$  dla  $\chi_1$  oraz cięcie  $\sigma$  dla  $\chi_2$ . Bez trudu przekonujemy się, że homomorfizmy

$$\rho : G_2 \rightarrow G_1 : g_2 \mapsto \text{pr}_1 \circ \iota(g_2)$$

oraz

$$\sigma : G_3 \rightarrow G_2 : g_3 \mapsto \iota^{-1}(e_1, g_3)$$

mają pożądane własności. □