

HEUREZA DIRACA–FEYNMANA (MAWF '25/26 XTRAS [RRS])

Przedmiotem naszej analizy będzie mechanika punktu materialnego obdarzonego masą spoczynkową $m \in \mathbb{R}_{>0}$ oraz ładunkiem elektrycznym $q \in \mathbb{R}$ w rozmaiłości różniczkowalnej $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ będącej nośnikiem pola grawitacyjnego reprezentowanego przez metrykę $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ o sygnaturze $(D, 1)$ oraz pola elektromagnetycznego reprezentowanego przez tensor Maxwella¹ $F \in \Omega^2(M)$. Mamy tu zatem do czynienia z teorią pola nad jednowymiarową czasoprzestrzenią $\Lambda =]t_0, t_1[\subset \mathbb{R}$ (tzw. linią świata) z metryką o sygnaturze $(0, 1)$.

Celem naszym będzie zrozumienie struktury różniczkowo-geometrycznej koniecznej do zdefiniowania funkcjonału działania

$$S : \Gamma(\Lambda \times M) \equiv C^\infty(]t_0, t_k[, M) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : x \longmapsto S[x]$$

określonego na przestrzeni gładkich ścieżek w rozmaiłości (pseudo)riemannowskiej (M, g) , dla którego zasada najmniejszego działania przy warunku brzegowym Dirichleta² odtwarza (relatywistyczną) formułę Lorentza $(\tau \in]t_0, t_k[)$

$$(1) \quad m g_{\lambda\mu}(x(\tau)) \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}(\tau) + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\}(x(\tau)) \frac{dx^\nu}{d\tau}(\tau) \frac{dx^\rho}{d\tau}(\tau) \right) = q F_{\lambda\mu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)$$

na 4-siłę działającą na punkt materialny o masie m i ładunku q , z przyczynkiem od pola grawitacyjnego o lokalnej reprezentacji współrzędniowej $g(x) = g_{\mu\nu}(x) \triangleright dx^\mu \otimes dx^\nu$ determinowanym przez symbole Christoffela powiązania metrycznego na wiązce stycznej

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{smallmatrix} \right\} := \frac{1}{2} (g^{-1})^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}).$$

Uwzględnwszy geometrię pola elektromagnetycznego opisaną równaniem

$$dF = 0,$$

stwierdzamy – na gruncie Lematu Poincarégo – istnienie lokalnego potencjału $A \in \Omega^1(\mathcal{O})$ tensora Maxwella F na dowolnym ściągającym obszarze $\mathcal{O} \subset M$. Rzecz jasna, każdą trajektorię (otwartą) punktu materialnego możemy zanurzyć w pewnym jej ściągającym otoczeniu tubularnym w M będącym nośnikiem potencjału A , a wtedy łatwo przekonujemy się, że stosowny funkcjonał działania można wybrać w postaci

$$(2) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_\Lambda \text{Vol}(\Lambda) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \int_\Lambda x^* A + \mathbb{R},$$

w której zapisie $\widehat{t} = \partial_\tau$ to wektor styczny do linii świata Λ , a $\text{Vol}(\Lambda) \equiv \text{Vol}(\Lambda; -1)$ to forma objętości³ na Λ . Powyższa formuła stanowi elementarny punkt wyjścia do naszych dalszych rozważań.

Łatwo wyobrazić sobie okoliczności, w których skonstruowany tu opis lagranżowski mechaniki punktu materialnego przy użyciu *globalnego* (wzdłuż trajektorii) potencjału tensora Maxwella staje

¹Związek tensora Maxwella z obiektami modelującymi pola: elektryczne i magnetyczne w czasoprzestrzeni Minkowskiego $\mathbb{R}^{3,1} \ni (x^\mu) \equiv (t, x, y, z)$ (z wyróżnioną współrzędną czasową t) w XIX-wiecznym ich opisie fenomenologicznym (w próżni, przy wszystkich stałych materialnych i prędkości światła przezornie włączonych w definicję samych pól), stanowiącym podstawę unifikacji teoretycznej zaproponowanej przez Faradaya i Maxwella, określa formuła

$$F(t, x^l) \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(t, x^i) dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv -E_i(t, x^l) dt \wedge dx^i + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B^i(t, x^l) dx^j \wedge dx^k,$$

w której składowe $F_{i0} = E_i$ oraz $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$ identyfikujemy – odpowiednio – ze składowymi 1-formy natężenia pola elektrycznego $E(t, x^l) = E_i(t, x^l) dx^i$ oraz składowymi pola indukcji magnetycznej $B(t, x^l) = B^i(t, x^l) \partial_i$.

²Można narzucić na odwzorowania także inne warunki brzegowe, które zapewnią stacjonarność funkcjonału działania przy spełnionych równaniach Eulera–Lagrange’a wzdłuż ścieżki.

³Wypisana tu postać formy objętości zawiera metrykę na linii świata jedynie *implicite*, w postaci globalnie trywialnej. Istnieje ogólniejsze sformułowanie rozważanej teorii, zadawane przez tzw. funkcjonał (typu) Poljakowa, który pozwala uwzględnić nietrywialną metrykę na linii świata i tym samym przejść do opisu niezmienniczego względem dowolnych reparametryzacji linii świata zachowujących jej orientację.

się niewystarczający. Ich zaistnienie wymaga obecności w przestrzeni M „defektów topologicznych”, które czynią ją niejednostopną, tj. prowadzą do pojawienia się w niej nieściąganych krzywych zamkniętych – o tym, że rozważania takie nie są bynajmniej pozbawione sensu empirycznego, przekonuje lektura klasycznej pracy [AB59] Aharonova i Bohma. W takim przypadku wcześniejszy argument dotyczący *pojedynczej* trajektorii⁴ otwartej pozostaje w mocy (z przyczyn fundamentalnych nie rozpatrujemy czasoprzestrzeni dopuszczających zamknięte krzywe czasowe), wpływ nietrywialnej topologii czasoprzestrzeni ujawnia się natomiast, ilekroć porównujemy wkłady do działania pochodzące od *różnych trajektorii o wspólnym początku i końcu*. Jak zobaczymy już wkrótce, porównanie takie nabiera sensu ilościowego w rozważaniach kwantowomechanicznych dotyczących prawdopodobieństwa wyboru trajektorii przez punkt materialny o dynamice (klasycznej) opisanej przez funkcjonal działania S . Zważywszy addytywność względem dziedziny całkowania całki Riemanna, której używamy w definicji funkcjonału działania, możemy czysto formalnie reprezentować różnicę dowolnej pary trajektorii fizycznych (w grupoidzie ścieżek w M) jako pętlę w M , dlatego też w dalszych naszych rozważaniach w pierwszej kolejności zajmiemy się ustaleniem struktury niezbędnej do nadania sensu funkcjonałowi działania na przestrzeni „trajektorii” spełniających warunek brzegowy postaci

$$x(t_0) = x(t_k),$$

czyli na przestrzeni pętli,

$$x \in C^\infty(\mathbb{S}^1; M) \equiv LM.$$

Dopiero po zbadaniu tej klasy zanurzeń linii świata w czasoprzestrzeni M powrócimy do konstrukcji spójnego opisu trajektorii otwartych, którego postać zapostulowana uprzednio będzie wymagała – jak pokaże dowodnie nasza analiza – pewnych poprawek natury strukturalnej.

Spróbujmy zatem skonstruować funkcjonal działania na przestrzeni pętli LM o tej własności (jedynej istotnej), że zasada najmniejszego działania zastosowana do niego daje równania (1) jako równania Eulera–Lagrange’a. Przy tym na gruncie naszej dotychczasowej dyskusji nie możemy zakładać, że pętle leżą w obszarze istnienia gładkiego potencjału pola elektromagnetycznego. W świetle Twierdzenia Weila–de Rhama (o istnieniu dobrego pokrycia na rozmaitości klasy C^2) możemy natomiast zawsze wybrać *dobre* pokrycie otwarte $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ rozmaitości M (tj. pokrycie o tej własności, że wszystkie niepuste przecięcia skończonej liczby jego elementów są ściągane), które daje nam do ręki rodzinę lokalnych potencjałów (w ogólności żaden z nich nie przedłuża się do gładkiej 1-formy na rozmaitości M)

$$F|_{\mathcal{O}_i} =: dA_i, \quad A_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i), \quad i \in I.$$

Uczyniwszy to, dokonajmy następnie **tesselacji** linii świata, czyli jej podziału na odcinki $e \in \mathbb{S}^1$ (tworzące zbiór **krawędzi tesselacji** E) spełniające układ warunków

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{e \in E} e = \mathbb{S}^1 \\ \forall_{e_1, e_2 \in E} : \left(e_1 = e_2 \quad \vee \quad e_1 \cap e_2 = \emptyset \quad \vee \quad \exists!_{v \in \mathbb{S}^1} : e_1 \cap e_2 = \{v\} \quad \vee \quad \exists!_{v_1, v_2 \in \mathbb{S}^1} : e_1 \cap e_2 = \{v_1, v_2\} \right) \end{array} \right\},$$

zakładając przy tym, że zbiór krawędzi tesselacji i ich przecięć (zwanych **wierzchołkami tesselacji** i tworzących zbiór wierzchołków V), który będziemy oznaczać symbolem

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} = E \cup V,$$

spełnia warunek

$$\forall_{e \in E} \exists_{i_e \in I} : x(e) \subset \mathcal{O}_{i_e}$$

dla ustalonej pętli $x \in LM$. Wówczas spełniony jest też oczywiście warunek

$$\forall_{v \in V} \exists_{i_v \in I} : x(v) \in \mathcal{O}_{i_v},$$

otrzymujemy zatem odwzorowanie

$$i. : \Delta_{\mathbb{S}^1} \longrightarrow I.$$

⁴Podkreślmy: w definicję trajektorii klasycznej jest wpisany czasowy charakter jej wektora stycznego.

Tesselację o podanej cesze określimy mianem **podporządkowanej pokryciu** $\mathcal{O}$. Tak przygotowani możemy już wypisać pierwszą propozycję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] := \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \int_e (x|_e)^* A_{i_e} . x$$

Kłopot z powyższą definicją polega na jej zależności od dokonanych przez nas *całkowicie arbitralnych* wyborów: otwartego pokrycia (możemy je np. poddawać dalszemu rozdrabnianiu bez utraty jego dobroci), lokalnego potencjału A_{i_e} , (jest on określony jedynie z dokładnością do lokalnie gładkiej 1-fomy dokładnej) oraz tesselacji podporządkowanej danemu pokryciu dobremu (wszak możemy przesuwac wierzchołki tesselacji tak, by ich obrazy pozostawały w wyjściowych przecięciach elementów pokrycia). Okazuje się, że zależności od wszystkich tych wyborów są ze sobą powiązane (ćwiczenie!), skupimy się zatem na tym ostatnim. Rozważmy wierzchołek v_{12} , w którym spotykają się krawędzie e_1 (wchodzący w sensie orientacji indukowanej z $\mathbb{S}^1$) i e_2 (wychodzący). Wybierzmy punkt $v'_{12} \in e_2 \setminus \{v_{12}\}$ tak, by było $x(v'_{12}) \in \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}(\exists x(v_{12}))$ i utwórzmy nową tesselację $\Delta'_{\mathbb{S}^1}$ zamieniając w $\Delta_{\mathbb{S}^1}$ trójkę (e_1, e_2, v_{12}) na trójkę $(e'_1 = e_1 \cup \delta, e'_2 = e_2 \setminus \delta, v'_{12})$, gdzie δ jest odcinkiem łączącym v_{12} z v'_{12} . Porównując wartości funkcjonału działania otrzymane dla każdej z dwu tesselacji, otrzymujemy

$$S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] = q \int_{\delta} (x|_{\delta})^* (A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}}) .$$

Zważywszy, że $x(\delta) \subset \mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}$, mamy w istocie do czynienia z 1-formą $(A_{i_{e_1}} - A_{i_{e_2}})|_{\mathcal{O}_{i_{e_1} i_{e_2}}}$. Jednakowoż wobec ściągłości każdego (niepustego) przecięcia $\mathcal{O}_{ij}$, $(i, j) \in \langle I^{\times 2} \rangle_{\mathcal{O}}$ znajdujemy na nim lokalnie gładką funkcję f_{ij} spełniającą równość

$$(3) \quad (A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} =: df_{ij}, \quad f_{ij} \in C^{\infty}(\mathcal{O}_{ij}, \mathbb{R}),$$

przy czym możemy zawsze tak wybrać te funkcje, aby spełniony był dodatkowy warunek $f_{ji} = -f_{ij}$. Wykorzystując poczynioną obserwację w połączeniu z Twierdzeniem Stokesa, możemy zatem zapisać

$$\begin{aligned} S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(0)}[x] &= q \int_{\delta} (x|_{\delta})^* df_{i_{e_2} i_{e_1}} = q \int_{\partial \delta} (x|_{\delta})^* f_{i_{e_2} i_{e_1}} \\ &\equiv q (f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12})). \end{aligned}$$

Wnioskujemy, że różnica porównywanych funkcjonałów zależy w sposób *funkcjonalny* (a przy tym zasadniczo dowolny) od arbitralnego wyboru położenia wierzchołków tesselacji, co jest sytuacją niedopuszczalną (taka zależność miałaby wpływ na dynamikę). Zanim ją naprawimy, kierując się wprost wnioskami z przeprowadzonego powyżej rachunku, przyjrzyjmy się bliżej funkcjom f_{ij} . Oto dla każdego (niepustego) przecięcia $\mathcal{O}_{ijk}$, $(i, j, k) \in \langle I^{\times 3} \rangle_{\mathcal{O}}$ otrzymujemy tożsamość

$$d(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})|_{\mathcal{O}_{ijk}} = (A_k - A_j - A_k + A_i + A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ijk}} = 0,$$

która wobec ściągłości przecięcia oznacza istnienie lokalnych stałych N_{ijk} spełniających równości

$$(4) \quad (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})|_{\mathcal{O}_{ijk}} = N_{ijk}, \quad N_{ijk} \in \mathbb{R},$$

przy czym stałe te możemy zawsze wybrać tak, aby był spełniony warunek skośnej symetrii $N_{ijk} = N_{[ijk]}$. Wykorzystując ostatnią równość, która implikuje – między innymi –

$$f_{i_{e_2} i_{e_1}}|_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} = (f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}})|_{\mathcal{O}_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}} + N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}},$$

możemy wypisać poprawioną wersję funkcjonału działania:

$$S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] := \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left(\int_e (x|_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right)$$

w następującej konwencji: $\varepsilon_{ev} = 1$, gdy v jest na końcu e (w sensie indukowanej orientacji e) i $\varepsilon_{ev} = -1$, gdy v jest na początku e . Zmiana położenia wierzchołka tesselacji zmienia wartość poprawionego działania o stałą

$$S_{\Delta'_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{\mathbb{S}^1}}^{(1)}[x] = q (f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{e_1}} \circ x(v_{12}))$$

$$\begin{aligned}
 & +q (f_{i_{e_1} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_2} i_{v'_{12}}} \circ x(v'_{12}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12})) \\
 & = q (N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v'_{12}}} - N_{i_{e_2} i_{e_1} i_{v_{12}}}) \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

co w standardowym podejściu do lagranżowskiego opisu mechaniki klasycznej jest całkowicie do przyjęcia. Zauważmy, że obecna definicja jest też niezmiennicza (w sensie szerszym, sprecyzowanym wyżej) względem dopuszczalnych redefinicji potencjałów lokalnych, $A_i \mapsto A'_i$, które wobec ściągłości $\mathcal{O}_i$ wymagają istnienia lokalnie gładkich funkcji g_i spełniających równości

$$(5) \quad A'_i - A_i =: db_i, \quad b_i \in C^\infty(\mathcal{O}_i, \mathbb{R}).$$

Istotnie, takiej redefinicji musi towarzyszyć redefinicja funkcji f_{ij} ,

$$(6) \quad f'_{ij} = f_{ij} + (b_j - b_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} + d_{ij}, \quad d_{ij} \in \mathbb{R},$$

która pozwala uzgodnić formuły (3) z ich odpowiednikami dla obiektów primowanych, a zatem zastąpienie obiektów nieprimowanych primowanymi w zapisie $S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}$ jest źródłem poprawki

$$\begin{aligned}
 S_{\Delta_{S^1}}^{(1)'}[x] & \equiv \frac{m}{2} \int_{S^1} \text{Vol}(S^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left(\int_e (x \upharpoonright_e)^* A'_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f'_{i_e i_v} \circ x(v) \right) \\
 & = S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \left[\int_{\partial e} b_{i_e} \circ x + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} ((b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \right] \\
 & \equiv S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_e} \circ x(v) + (b_{i_v} - b_{i_e}) \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\
 & \equiv S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} (b_{i_v} \circ x(v) + d_{i_e i_v}) \\
 & = S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{S^1}} \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} d_{i_e i_v},
 \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika stąd, że każdy wierzchołek jest zarazem końcem jednej z krawędzi tessalacji ($\varepsilon_{ev} = 1$), jak i początkiem jej następnika ($\varepsilon_{ev} = -1$). Naturalnie, także dopuszczalne redefinicje funkcji f_{ij} cofniętych do wierzchołków tessalacji niezwiązane z redefinicjami potencjałów, czyli przesunięcia o stałe (lokalne), nie mają fizykalnie obserwowalnych konsekwencji (klasycznie), pozostaje zatem upewnić się, że nasza nowa definicja funkcjonału działania jest niezmiennicza ze względu na rozdrabnianie użytego w niej pokrycia $\mathcal{O}$ i skorelowane z nim rozdrobnienie tessalacji linii świata, wzgl. na rozdrabnianie samej tylko tessalacji na odcinku, którego obraz względem zanurzenia x leży w przecięciu więcej niż dwóch elementów wyjściowego pokrycia. Rzecz jasna, wystarczy w tym celu sprawdzić zmianą wartości funkcjonału $S^{(1)}$ przy elementarnym przejściu zilustrowanym na Rys. 1.

Oznaczywszy tessalację uzyskaną w wyniku zobrazowanego rozdrobnienia (z prawej strony) symbolem $\Delta_{S^1}^{\text{ref}}$, wyznaczamy

$$\begin{aligned}
 & S_{\Delta_{S^1}^{\text{ref}}}^{(1)}[x] - S_{\Delta_{S^1}}^{(1)}[x] \\
 & = q \left(\int_{e_{12} \setminus e_2} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_2})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_1}}) + \int_{e_{12} \setminus e_1} (x \upharpoonright_{e_{12} \setminus e_1})^* (A_{i_{e_{12}}} - A_{i_{e_2}}) \right. \\
 & \quad + f_{i_{e_1} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_{12}} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \\
 & \quad \left. - f_{i_{e_2} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \right) \\
 & = q \left(f_{i_{e_1} i_{e_{12}}} \circ x(v_{12}) - f_{i_{e_1} i_{e_{12}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_2} i_{e_{12}}} \circ x(v_{122}) \right. \\
 & \quad - f_{i_{e_2} i_{e_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_1} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_{12}} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \circ x(v_{122}) \\
 & \quad - f_{i_{e_2} i_{v_{112}}} \circ x(v_{112}) - f_{i_{e_1} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_2} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) + f_{i_{e_{12}} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \\
 & \quad \left. - f_{i_{e_{12}} i_{v_{12}}} \circ x(v_{12}) \right)
 \end{aligned}$$

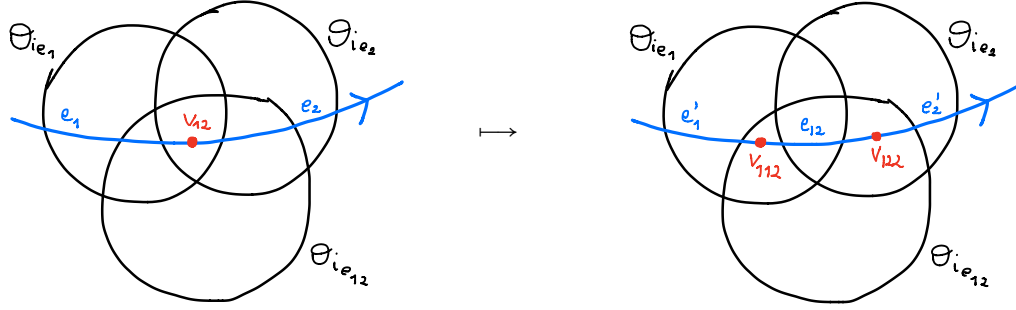


FIGURE 1. Rozdrobnienie tessellacji fragmentu (zorientowanej) linii świata w obszarze czasoprzestrzeni pokrytym przez trzy zbiory otwarte: $\mathcal{O}_{i_{e_1}}, \mathcal{O}_{i_{e_2}}$ i $\mathcal{O}_{i_{e_{12}}}$.

$$= q \left(N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{12}}} - N_{i_{e_2} i_{e_{12}} i_{v_{12}}} - N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{112}}} + N_{i_{e_1} i_{e_{12}} i_{v_{122}}} \right) \in \mathbb{R}.$$

W standardowym podejściu do lagranżowskiego opisu mechaniki klasycznej możemy zatem uznać otrzymany tu wynik poprawiania wyjściowej definicji funkcjonału działania za satysfakcjonujący i przyjąć jako rygorystyczną definicję tegoż funkcjonału dla zamkniętej linii świata (o wskazanym wcześniej statusie teoretycznym) w ogólnej sytuacji topologicznej formułę

$$S[x] = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + q \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left(\int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right). \quad (7)$$

Z punktu widzenia mechaniki klasycznej problem, przed jakim stanęliśmy na początku niniejszego rozdziału, można uznać za (konstruktywnie) rozwiązany, a uzyskany opis zjawiska propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w topologicznie nietrywialnym polu elektromagnetycznym – za rygorystyczny i kompletny. Ażeby postąpić dalej w rozpoczętej tu rekonstrukcji struktury różniczkowo-geometrycznej stowarzyszonej z polem elektromagnetycznym, musimy wyjść poza ramy formalne teorii klasycznej i ustalić bezpośredni związek klasycznego funkcjonału działania z teorią kwantową. Związek taki wyprowadził Dirac w pracy [Dir33] z 1933 r. (jego zapowiedź można też dostrzec we wcześniejszych pracach Brillouina, Eckarta, Kramersa, Wentzela i przede wszystkim Van Vlecka), po czym jego idea została podchwycona i rozwinięta przez Feynmana w jego pracy doktorskiej z 1942 r. pt. “The Principle of Least Action in Quantum Mechanics”, patrz: [Bro05], stając się podstawą konstrukcji Feynmana „sumy po historiach”, sformułowanej w wersji zasadniczo (konceptualnie) kompletnej w pracy [Fey48] z roku 1948. Prześledzimy obecnie pokrótce heurzę Diraca, co pozwoli nam zrozumieć kontekst, w jakim funkcjonal działania pojawia się w opisie kwantowomechanicznym opisywanej przezeń dynamiki klasycznej.

Rozważmy układ fizyczny o klasycznych zmiennych kanonicznie sprzężonych (q^i, p_i) , $i \in \overline{1, N}$ ($N \in \mathbb{N}$ określa tutaj liczbę niezależnych stopni swobody w układzie, których zakresu – odpowiednio $Q \subset \mathbb{R}^{\times N}$ i $P \subset \mathbb{R}^{\times N}$ – nie precyzujemy na przyjętym tu poziomie ogólnikowości argumentu) oraz o przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, w której wyróżniamy dwie bazy (zapisane w notacji bra-ket Diraca): bazę stanów własnych $|q\rangle \equiv |q^1, q^2, \dots, q^N\rangle$ operatorów położenia $\widehat{q}^i$,

$$\widehat{q}^i |q\rangle = q^i |q\rangle,$$

oraz baz stanów własnych $|p\rangle \equiv |p_1, p_2, \dots, p_N\rangle$ operatorów pędu $\widehat{p}_i$,

$$\widehat{p}_i |p\rangle = p_i |p\rangle.$$

Pośród endomorfizmów $\mathcal{H}$ wyróżnione miejsce zajmuje hamiltonian

$$\widehat{H} \equiv H_{\hbar}(\vec{q}, \vec{p})$$

układu kwantowomechanicznego, będący pewną analityczną deformacją wiernej transkrypcji klasycznego hamiltonianu $H(q, p) \mapsto H(\vec{q}, \vec{p})$ zależną od parametru deformacji $\hbar$ (uwzględniającą nieprzemienność kwantowych operatorów $\vec{q}$ i $\vec{p}$) i określający unitarną ewolucję w czasie stanów w obrazie Schrödingera według formuły

$$|X(t_2)\rangle = e^{-\frac{i(t_2-t_1)\widehat{H}}{\hbar}}|X(t_1)\rangle, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad X \in \{\vec{q}, \vec{p}\}.$$

Mamy też na $\mathcal{H}$ formy liniowe $\langle \vec{q} |$ i $\langle \vec{p} |$ dualne do $|\vec{q}\rangle$ i – odpowiednio – $|\vec{p}\rangle$ (w sensie ścisłym określanym przez strukturę modelu fizycznego, w szczególności zaś – przez postać jego przestrzeni konfiguracyjnej). Zapiszmy dalej – za Dirackiem – propagator pomiędzy stanem referencyjnym $|\vec{q}_0\rangle$ a stanem $|\vec{q}\rangle$ w czasie t jako

$$(8) \quad e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} := \langle \vec{q} | e^{-\frac{it}{\hbar}\widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle \equiv \langle \vec{q} | \vec{q}_0(t) \rangle$$

przy użyciu pewnej funkcji $\widetilde{S}_{\vec{q}_0}$ o wartościach zespolonych, zawierającej w swej części urojonej proporcjonalnej do stałej Plancka $\hbar$ informację o amplitudzie prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy rzeczonymi stanami, a w części rzeczywistej – informację o fazie propagatora. Propagator (albo inaczej funkcja falowa) spełnia równanie Schrödingera,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{q} | \vec{q}_0(t) \rangle &= \langle \vec{q} | \widehat{H} \circ e^{-\frac{it}{\hbar}\widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle = \int_Q d\vec{q}_p \langle \vec{q} | \widehat{H} | \vec{q}_p \rangle \langle \vec{q}_p | e^{-\frac{it}{\hbar}\widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle \\ &= \int_Q d\vec{q}_p \langle \vec{q} | \widehat{H} | \vec{q}_p \rangle \langle \vec{q}_p | \vec{q}_0(t) \rangle \equiv \widehat{H}(\langle \vec{q} | \vec{q}_0(t) \rangle), \end{aligned}$$

to zaś tłumaczy się na równanie Hamiltona–Jacobiego dla $\widetilde{S}$, oto bowiem np. w reprezentacji (albo ściślej polaryzacji) położeniowej jest

$$-\frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, \cdot)}{\partial t}(t) \cdot e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, \cdot)}{\hbar}}(t) = \widehat{H}\left(e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}}\right)(\vec{q}) \equiv H_{\hbar}(\vec{q}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{q}})\left(e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}}\right)(\vec{q}),$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial \vec{q}} \equiv (\frac{\partial}{\partial q^1}, \frac{\partial}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^N})$, ponieważ zaś prawdziwe są tożsamości

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \left(e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\hbar}} \right)(\vec{q}) &= \frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\partial \vec{q}} e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}}, \\ (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{q}})^2 \left(e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} \right)(\vec{q}) &= \left(\frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\partial \vec{q}} \right)^2 e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} + O(\hbar), \\ &\vdots \\ (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{q}})^n \left(e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} \right)(\vec{q}) &= \left(\frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\partial \vec{q}} \right)^n e^{\frac{i\widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t)}{\hbar}} + O(\hbar), \\ &\vdots \end{aligned}$$

przeto ostatecznie otrzymujemy – przy poczynionym już uprzednio założeniu o analitycznej zależności hamiltonianu od pędów uogólnionych – równość

$$-\frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\vec{q}, \cdot)}{\partial t}(t) = H_{\hbar}\left(\vec{q}, \frac{\partial \widetilde{S}_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\partial \vec{q}}(\vec{q})\right) + O(\hbar),$$

która w granicy $\hbar \rightarrow 0$ przechodzi w klasyczne równanie Hamiltona–Jacobiego

$$\begin{cases} -\frac{\partial S_{\vec{q}_0}(\vec{q}, \cdot)}{\partial t}(t) = H(\vec{q}, \vec{p}) \\ \vec{p} \equiv \frac{\partial S_{\vec{q}_0}(\cdot, t)}{\partial \vec{q}}(\vec{q}) \end{cases}$$

dla $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \widetilde{S}_{\vec{q}_0} = S_{\vec{q}_0}$. Jak wiemy z kursu mechaniki klasycznej, rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja główna Hamiltona–Jacobiego, dana przez całkę klasycznego lagranżjanu teorii wzdłuż

(lokalnie jedynej) trajektorii klasycznej $\vec{q}_{\text{cl}} : [0, t] \rightarrow Q$ o początku $\vec{q}_0 = \vec{q}_{\text{cl}}(0)$ i końcu $\vec{q} = \vec{q}_{\text{cl}}(t)$,

$$S_{\vec{q}_0}(\vec{q}, t) = \int_0^t d\tau L(\tau, \vec{q}_{\text{cl}}, \dot{\vec{q}}_{\text{cl}}) \equiv S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_{\text{cl}}].$$

Koniec końców otrzymujemy zatem wyrażenie

$$\langle \vec{q} | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle = e^{\frac{i S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_{\text{cl}}]}{\hbar}} \cdot e^{\Delta_{\hbar}(\vec{q}, t; \vec{q}_0)},$$

w którym podwiódąca poprawka $\Delta_{\hbar}(\vec{q}, t; \vec{q}_0) \in \mathbb{C}$ jest rzędu $\hbar^0$.

Na obecnym etapie możemy już doprecyzować wcześniejszą uwagę dotyczącą obserwowalnych konsekwencji wiodącego (w reżymie $\hbar \approx 0$) wkładu do wyrażenia na kwantowomechaniczny propagator klasycznego pochodzącego od klasycznego funkcjonału działania obliczonego na trajektorii układu fizycznego. Na gruncie interpretacji Borna tegoż propagatora stwierdzamy więc, że wkład taki jest obserwowalny dopiero w sytuacji, w której istnieje kilka trajektorii klasycznych odpowiadających *różnym* wartościom funkcjonału działania. W takiej sytuacji dla każdej pary trajektorii: $\vec{q}_1(t), \vec{q}_2(t)$, $t \in [0, T]$ możemy oczekiwać interferencji propagatorów (funkcji falowych) o amplitudzie (gęstości prawdopodobieństwa)

$$\begin{aligned} A &= \left| 1 + e^{\frac{i(S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_2] - S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_1])}{\hbar}} \right|^2 \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)) = \left(1 + \cos \frac{S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_2] - S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_1]}{\hbar} \right) \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \\ &= 4 \cos^2 \frac{S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_2] - S_{\vec{q}_0}[\vec{q}_1]}{2\hbar} \cdot (1 + \mathcal{O}(\hbar)). \end{aligned}$$

Wynik ten, znajdujący potwierdzenie jakościowe w doświadczeniu z podwójną szczeliną, wskazuje na fizyczne znaczenie **amplitud Diraca–Feynmana** (zapisanych w naturalnej normalizacji, w której jednostką działania klasycznego jest $\hbar$):

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] \equiv e^{iS[x]}$$

stowarzyszonych z działaniem klasycznym S . Dodatkowych argumentów za nieodzownością sumowania wkładów od różnych trajektorii łączących konfiguracje: początkową i końcową, użytego tu na prawach oczywistości, dostarcza heurystyczne rozumowanie Feynmana, które rekapituluje poniżej.

Założmy otóż, że hamiltonian klasyczny rozpatrywanego wcześniej układu przyjmuje prostą postać

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\delta^{ij} p_i p_j}{2m} + V(\vec{q}^i),$$

przy czym pierwszy składnik jest standardowym członem kinetycznym, drugi zaś – zależnym od położenia uogólnionych (wyłącznie) członem potencjalnym. Hamiltonian kwantowomechaniczny jest wówczas dany wzorem

$$\widehat{H} = \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m} + V(\vec{q}^i)$$

i możemy – podzieliwszy przedział czasowy $[0, t]$ na n równych odcinków, o długości $\Delta t = \frac{t}{n}$ każdy – przepisać propagator (8) w postaci

$$\begin{aligned} \langle \vec{q} | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \int_Q d\vec{q}_k \right) \langle \vec{q} | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_{n-1} \rangle \langle \vec{q}_{n-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_{n-2} \rangle \\ &\quad \langle \vec{q}_{n-2} | \dots | \vec{q}_1 \rangle \langle \vec{q}_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle. \end{aligned}$$

Na podstawie związków komutacyjnych dla zmiennych kanonicznie sprzężonych

$$[\vec{q}^i, \widehat{p}_j] = i\hbar \delta^i_j, \quad i, j \in \overline{1, N}$$

formuła Bakera–Campbella–Hausdorffa pozwala nam przepisać każdy z cząstkowych propagatorów w postaci

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_{k-1} \rangle &\equiv \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \left(\frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m} + V(\vec{q}^i) \right)} | \vec{q}_{k-1} \rangle \\ &= \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \frac{\delta^{ij} \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2m}} \circ e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright V(\vec{q}^i)} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot V(q_{k-1}^i)} \cdot \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \frac{\delta^{ij} \vec{p}_i \vec{p}_j}{2m}} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\
 &= \oint_P d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot V(q_{k-1}^i)} \cdot \langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \frac{\delta^{ij} \vec{p}_i \vec{p}_j}{2m}} | \vec{p}_{k-1} \rangle \langle \vec{p}_{k-1} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\
 &= \oint_P d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left(\frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(q_{k-1}^i) \right)} \cdot \langle \vec{q}_k | \vec{p}_{k-1} \rangle \langle \vec{p}_{k-1} | \vec{q}_{k-1} \rangle (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\
 &= \oint_P d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left(\frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(q_{k-1}^i) \right)} \cdot \langle \vec{q}_k | \vec{p}_{k-1} \rangle \overline{\langle \vec{q}_{k-1} | \vec{p}_{k-1} \rangle} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)).
 \end{aligned}$$

Na obecnym etapie możemy wykorzystać postać funkcjonalną propagatora pomiędzy stanami własnymi pary operatorów kanonicznie sprzężonych,

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} q^i p_i},$$

aby przepisać otrzymaną wcześniej formułę w postaci

$$\begin{aligned}
 &\langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_{k-1} \rangle \\
 &= |\mathcal{N}|^2 \oint_P d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left(\frac{\delta^{ij} p_{k-1}^i p_{k-1}^j}{2m} + V(q_{k-1}^i) - \frac{p_{k-1}^i (q_{k-1}^i - q_{k-1}^i)}{\Delta t} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\
 &= |\mathcal{N}|^2 e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left(V(q_{k-1}^i) - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)(q_k^j - q_{k-1}^j)\delta_{ij}}{2\Delta t^2} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\
 &\quad \cdot \oint_P d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} \cdot \left(p_{k-1}^i - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)\delta_{ri}}{\Delta t} \right) \left(p_{k-1}^j - \frac{m(q_k^j - q_{k-1}^j)\delta_{sj}}{\Delta t} \right) \delta^{ij}}.
 \end{aligned}$$

Przyjawszy założenie o stosownej translacyjnej niezmienniczości dziedziny P i oznaczwszy całkę gaussowską

$$\mathcal{J}_P := \oint_P d\vec{p}_{k-1} e^{-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} \cdot \left(p_{k-1}^i - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)\delta_{ri}}{\Delta t} \right) \left(p_{k-1}^j - \frac{m(q_k^j - q_{k-1}^j)\delta_{sj}}{\Delta t} \right) \delta^{ij}},$$

wyprowadzamy stąd zwarty wzór na propagator cząstkowy

$$\langle \vec{q}_k | e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_{k-1} \rangle = |\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left(V(q_{k-1}^i) - \frac{m(q_k^i - q_{k-1}^i)(q_k^j - q_{k-1}^j)\delta_{ij}}{2\Delta t^2} \right)} (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2)),$$

który możemy następnie podstawić do wyjściowego wyrażenia, uzyskując tym sposobem formułę

$$\begin{aligned}
 &\langle \vec{q} | e^{-\frac{it}{\hbar} \triangleright \widehat{H}} | \vec{q}_0 \rangle \\
 &= (|\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P)^n (1 + \mathcal{O}(\Delta t^2))^n \left(\prod_{k=1}^{n-1} \oint_Q d\vec{q}_k \right) \prod_{l=1}^n e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar} \cdot \left(V(q_{l-1}^i) - \frac{m(q_l^i - q_{l-1}^i)(q_l^j - q_{l-1}^j)\delta_{ij}}{2\Delta t^2} \right)} \\
 &= (|\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P)^n (1 + n\mathcal{O}(\Delta t^2)) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \oint_Q d\vec{q}_k \right) e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^n \Delta t \left(\frac{m(q_l^i - q_{l-1}^i)(q_l^j - q_{l-1}^j)\delta_{ij}}{2\Delta t^2} - V(q_{l-1}^i) \right)} \\
 &= (|\mathcal{N}|^2 \mathcal{J}_P)^n (1 + \mathcal{O}(\Delta t)) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \oint_Q d\vec{q}_k \right) e^{\frac{i}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^n \Delta t \left(\frac{m(q_l^i - q_{l-1}^i)(q_l^j - q_{l-1}^j)\delta_{ij}}{2\Delta t^2} - V(q_{l-1}^i) \right)}
 \end{aligned}$$

Istnieje klasa potencjałów klasycznych, dla których możliwe jest przejście do granicy $n \rightarrow \infty$ w powyższym wyrażeniu przy zachowaniu długości przedziału czasowego t (czyli też $\Delta t \rightarrow 0$). Potencjały takie zostały omówione, m.in., w pracy Feynmana i Hibbsa [FH65] z 1965 r. W rzeczywistej granicy w wykładniku funkcji $\exp$ rozpoznajemy granicę sumy riemannowskiej lagranżjanu klasycznego postaci

$$L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{m\dot{\vec{q}}^i \dot{\vec{q}}^j \delta_{ij}}{2} - V(q^i)$$

na odcinku czasowym $[0, t]$, a sam propagator zyskuje interpretację sumocalki po wkładach od *wszystkich* trajektorii prowadzących od konfiguracji $\vec{q}_0$ do konfiguracji $\vec{q} \equiv \vec{q}_k$ w czasie t . Granicę

produktu sumocalek po położeniach (uogólnionych) w pośrednich chwilach czasu, ilekroć jest dobrze zdefiniowana, oznaczamy symbolem

$$\langle \bar{q}_k | e^{-\frac{i}{\hbar} \triangleright \bar{H}} | \bar{q}_0 \rangle = \oint_{\substack{\bar{q}(0)=\bar{q}_0 \\ \bar{q}(t)=\bar{q}_k}} \mathcal{D}\bar{q} e^{\frac{i}{\hbar} S[\bar{q}]}$$

i określamy mianem **Feynmana (sumo-)całki po trajektoriach**. Obecność w jej zapisie amplitudy Diraca–Feynmana w roli wagi statystycznej określającej wkład do propagatora trajektorii⁵ $\bar{q}$ o zadanych warunkach brzegowych $(\bar{q}(0), \bar{q}(t)) = (\bar{q}_0, \bar{q}_k)$ uzasadnia – *a posteriori* – wcześniejsze nasze rozważania o obserwowalnych konsekwencjach istnienia niehomotopijnych trajektorii w czasoprzestrzeni propagacji cząstki oraz naszą wyjściową definicję mechaniki lagranżowskiej (jeśli tylko włączyć stałą $\hbar$ w definicję działania klasycznego, wzgl. położyć $\hbar = 1$, co też będziemy czynić w dalszej części wykładu). Postulat jednoznacznej określoności amplitudy Diraca–Feynmana przerywa pomost formalny pomiędzy teorią klasyczną, modelowaną od początku do końca przy użyciu narzędzi z kategorii geometrycznej (takich jak „rozmaitość”, „metryka”, „pole wektorowe” *etc.*), a teorią kwantową, osadzoną w kategorii algebraicznej⁶. Bogatsi o tę świadomość, prześledzimy obecnie dalsze konsekwencje strukturalne tegoż postulatu, czyli też równoważnego mu postulatu określoności działania klasycznego *modulo* $2\pi(\hbar)$, w rozważanym modelowym układzie fizycznym.

W kontekście wyjściowych naszych rozważań modelowych rzeczony postulat implikuje dodatkowe warunki

$$(9) \quad \forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_{\mathcal{O}}} : qN_{ijk} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \wedge \quad \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} : qd_{ij} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Zwykle wyraża się je przy użyciu lokalnie gładkich odwzorowań g_{ij} oraz h_i o wartościach w $U(1)$ powiązanych z f_{ij} oraz b_i wzorami

$$g_{ij} := e^{-i q f_{ij}}, \quad h_i := e^{-i q b_i}.$$

Tak określone odwzorowania są określone przez równości

$$(10) \quad (\tilde{A}_j - \tilde{A}_i) \upharpoonright_{\mathcal{O}_{ij}} = \text{id} \log g_{ij}$$

oraz

$$(11) \quad \tilde{A}'_i - \tilde{A}_i = \text{id} \log h_i$$

zapisane w terminach przeskalowanych pól $\tilde{A}_i = q A_i$ oraz $\tilde{A}'_i = q A'_i$, dla których

$$\text{d}\tilde{A}_i = \tilde{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} = \text{d}\tilde{A}'_i,$$

przy $\tilde{F} = q F$, i spełniają znajomo wyglądające warunki **1-kocyklu**

$$\forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ji}(x) = g_{ij}(x)^{-1},$$

$$(12) \quad \forall_{(i,j,k) \in (I \times 3)_{\mathcal{O}}} \forall_{y \in \mathcal{O}_{ijk}} : g_{ij}(x) \cdot g_{kj}(x)^{-1} \cdot g_{ki}(x) = 1$$

oraz

$$(13) \quad \forall_{(i,j) \in (I \times 2)_{\mathcal{O}}} \forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g'_{ij}(x) \equiv e^{-i q f'_{ij}(x)} = h_i(x)^{-1} \cdot g_{ij}(x) \cdot h_j(x).$$

Podkreśmy: wypisane warunki wiążą ze sobą ładunek elektryczny q punktu materialnego z elementem N_{ijk} opisu zewnętrznego pola elektromagnetycznego. Ten pierwszy jest w Przyrodzie pewną całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego e elektronu, źródłem tego drugiego też są zwykle czasoprzestrzenne rozkłady ładunków. I to właśnie tym drugim zajmujemy się poniżej.

Intuicje wyrobione w trakcie dotychczasowych naszych dociekań pozwalają wyprowadzić nader prostą interpretację geometryczną pierwszego z powyższych warunków, znaną w literaturze pod nazwą **warunku Diraca skwantowania ładunku**. Otóż wybierzmy dowolną dwuwymiarową

⁵Należy dobitnie podkreślić, że propagator kwantowomechaniczny jest określany przez *wszystkie* konfiguracje interpolujące między oboma stanami, w tym także konfiguracje nieklasyczne (tj. takie, które nie minimalizują funkcjonału działania).

⁶Często dopuszczającej naturalne *nieprzemienne* geometryzacje, fundamentalnie odległe od algebraizacji geometrii klasycznej w terminach funkcji (gładkich) na tejże.

powierzchnię *zamkniętą* $\Sigma \subset M$, $\partial\Sigma = \emptyset$ i obliczmy strumień pola elektromagnetycznego przez tę powierzchnię,

$$\Phi((E, B); \Sigma) := \int_{\Sigma} F,$$

dokonawszy uprzednio jej stosownej tessellacji, tj. podzieliwszy ją na wielokąty p (tworzące zbiór **plakietek tessellacji**) stykające się wzdłuż krawędzi e (tworzących zbiór krawędzi tessellacji E), które z kolei łączą się w wierzchołkach v (tworzących zbiór wierzchołków tessellacji V), przy czym możemy założyć, że w każdym wierzchołku zbiegają się trzy krawędzie⁷, czyli mamy do czynienia z tessellacją o strukturze plastra miodu. Tessellację, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\Delta_{\Sigma} = P \cup E \cup V,$$

wyбираemy na tyle drobną, aby spełniała ona warunek podporządkowania wybranemu (dowolnie) dobremu pokryciu $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ rozmaitości M :

$$\forall_{p \in P} \exists_{i_p \in I} : p \subset \mathcal{O}_{i_p},$$

a zatem także

$$\forall_{e \in E} \exists_{i_e \in I} : e \subset \mathcal{O}_{i_e}.$$

Zachodzi też

$$\forall_{v \in V} \exists_{i_v \in I} : v \subset \mathcal{O}_{i_v}.$$

Tak przygotowani obliczamy, w odwołaniu do Twierdzenia Stokesa,

$$\Phi((E, B); \Sigma) = \sum_{p \in \Delta_{\Sigma}} \int_p F = \sum_{p \in P \subset \Delta_{\Sigma}} \int_p dA_{i_p} = \sum_{p \in P \subset \Delta_{\Sigma}} \sum_{e \subset \partial p} \int_e A_{i_p}.$$

Ostatnią sumę możemy zamienić na sumę po wszystkich krawędziach tessellacji – wzdłuż każdej z nich (na której dowolnie ustalamy orientację) całkujemy różnicę potencjałów pochodzących z obu rozdzielanych przez nią plakietek (względny znak „-” dla tych dwóch wkładów wynika stąd, że ustalona orientacja krawędzi z konieczności jest zgodna z jej orientacją indukowaną z wyjściowej orientacji jednej z plakietek, powiedzmy $p_+(e)$, a zarazem przeciwna do jej orientacji indukowanej z orientacji drugiej z plakietek, powiedzmy $p_-(e)$, co w świetle zastosowanego powyżej twierdzenia Stokes’a prowadzi do rzeczonej różnicy znaków obu wkładów),

$$\begin{aligned} \Phi((E, B); \Sigma) &= \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Sigma}} \int_e (A_{i_{p_+(e)}} - A_{i_{p_-(e)}}) = \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Sigma}} \int_e df_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}} \\ &= \sum_{e \in E \subset \Delta_{\Sigma}} \sum_{v \in \partial e} \int_v f_{i_{p_-(e)} i_{p_+(e)}}. \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio sumę po końcach wszystkich krawędzi tessellacji możemy zamienić na pojedynczą sumę po wszystkich wierzchołkach, przy czym chwila zastanowienia nad znakami wkładów do wyrazu owej sumy przyporządkowanego ustalonymu wierzchołkowi pochodzących od poszczególnych (zorientowanych dowolnie) zbiegających się w nim krawędzi, w połączeniu z narzuconymi własnościami skośnej symetrii funkcji f_{ij} względem permutacji indeksów pokrycia prowadzi do wzoru

$$\Phi((E, B); \Sigma) = - \sum_{v \in \Delta_{\Sigma}} N_{p_1(v)p_2(v)p_3(v)}(v),$$

w którym $(p_1(v), p_2(v), p_3(v))$ jest trójką plakietek tessellacji zbiegających się w v uporządkowaną wedle kolejności ich przemierzania przy obiegu wierzchołka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (przy czym wybór plakietki początkowej jest nieistotny z racji cyklicznej symetrii stałych N_{ijk} względem permutacji indeksów pokrycia). Ostatecznie więc wnioskujemy,

⁷Tessellację tego typu otrzymujemy ze zwykłej triangulacji powierzchni poprzez utworzenie jej tzw. **grafu dualnego** o ternarnych wierzchołkach w geometrycznych środkach trójkątów i połączonych krawędziami, z których każda przecina transversalnie dokładnie jeden z boków trójkąta, będący krawędzią triangulacji.

że dla dowolnej liczby całkowitej N (określającej wartość ładunku elektrycznego $q = Ne$ cząstki próbnej poruszającej się w tle F) spełniona jest relacja

$$Ne \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z},$$

czyli

$$(14) \quad e \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Odnosząc powyższy wynik do pola (hipotetycznego) punktowego ładunku magnetycznego μ i topologicznie najprostszej (nietrywialnego) powierzchni zamkniętej, czyli 2-sfery, okalającej punkt położenia monopola, odtwarzamy klasyczny wynik Diraca

$$e\mu \in 2\pi\mathbb{Z},$$

który jest właśnie zapowiedzianym wcześniej warunkiem Diraca skwantowania ładunku.

W podsumowaniu dotychczasowych naszych rozważań możemy stwierdzić, że spójny opis propagacji naładowanego elektrycznie punktu materialnego w zewnętrznych polach: grawitacyjnym g i elektromagnetycznym F jest możliwy, o ile tensor Maxwella tego pola oraz ładunek niesiony przez punkt materialny (zamiast e mamy tu w ogólności q) spełniają warunek Diraca (14). Funkcjonał działania porównujący propagację punktu po dwóch różnych ścieżkach łączących parę punktów w czasoprzestrzeni (M, g) jest przy tym dany wzorem (7), który prowadzi do wyrażenia na amplitudę Diraca–Feynmana

$$(15) \quad \mathcal{A}_{\text{DF}}[x] = e^{\frac{im}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t})} \prod_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} e^{q \int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}} \prod_{v \in \partial e} (g_{i_e i_v} \circ x)(v)^{\varepsilon_{ev}}, \quad x \in \text{LM}.$$

Dotychczasowa dyskusja uzasadnia przy tym zabieg czysto formalny podyktowany wolą odciążenia stosowanego zapisu, a polegający na włączeniu ładunku q do definicji zewnętrznego pola elektromagnetycznego (i jego lokalnych trywializacji). Odtąd będziemy zatem konsekwentnie pisać

$$(16) \quad S[x] = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t}) + \sum_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} \left(\int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e} + \sum_{v \in \partial e} \varepsilon_{ev} f_{i_e i_v} \circ x(v) \right)$$

oraz

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}[x] = e^{\frac{im}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \text{Vol}(\mathbb{S}^1) x^* g(\widehat{t}, \widehat{t})} \prod_{e \in E \subset \Delta_{\mathbb{S}^1}} e^{\int_e (x \upharpoonright_e)^* A_{i_e}} \prod_{v \in \partial e} (g_{i_e i_v} \circ x)(v)^{\varepsilon_{ev}}, \quad x \in \text{LM},$$

gdzie kładziemy

$$g_{ij} = e^{-i f_{ij}}, \quad h_i = e^{-i b_i}$$

przy warunku

$$(17) \quad \Phi((E, B); \Sigma) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

LITERATURA

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, Phys. Rev. **115** (1959), 485–491.
- [Bro05] L.M. Brown, *Feynman’s Thesis – A New Approach to Quantum Theory*, World Scientific, 2005.
- [Dir33] P. A. M. Dirac, “The Lagrangian in quantum mechanics”, Phys. Z. Sowjet. **3** (1933), 64–72.
- [Fey48] R.P. Feynman, “Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics”, Rev. Mod. Phys. **20** (1948), 367–387.
- [FH65] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.