

OD tensore Faradaya do migzli Diraca

— gopuz do'miedzei'e Alucronova - Bohuna

2025/26



1 ELEKTROMAGNETYZM W JĘZYKU FORM - POLA ŁADUNKOWE

STOPNIE SWOBODY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO NA $\mathbb{R}^{1,3}$:

$E_i, i \in \{1, 2, 3\}$ - NATĘŻENIE POLA ELEKTRYCZNEGO (qE TO SIŁA DZIAŁAJĄCA NA ŁADUNEK q ,
ZATEM E TO W NATURALNYJ POKRÓB TENSOR KOWARIANTNY)

$B^i, i \in \{1, 2, 3\}$ - INDUKCJA MAGNETYCZNA, TRACIOWANA JAKO TENSOR KONTRAWARIANTNY.

WPISUJEMY JE W 2-FORMĘ, ZWANĄ 2-FORMĄ (TENSOREM) FARADAYA:

$$F := -E_i dt \wedge dx^i + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^k dx^i \wedge dx^j,$$

W KTÓREGO ZAPISIE (t, x^i) SĄ WSPÓŁRZĘDNymi PROSTOLINIOWYMI
W $\mathbb{R}^{1,3}$, PĘTY CZYM $\eta_{\text{min}k}(\partial_t, \partial_t) = -1$ ^{KIERUNEK CIEPŁY} $\wedge$ $\eta_{\text{min}k}(\partial_i, \partial_i) = +1$ ^{KIERUNEK PRZESTRZENNY}

POMIĘDY ZAPIS NIE JEST JEDYNIEM WYNIKIEM SZCZEGÓLNEGO ZBIĘTU OKOLICZNOŚCI:

$$\dim_{\mathbb{R}} \Omega^2(\mathbb{R}^{3,1}) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \Omega^1(\mathbb{R}^{3,1}),$$

LEŻĄ ODZWIERZĘDLAJĄCĄ WŁAŚNOŚĆ TRANSFORMACYJNĄ WEKTORÓW
POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO TOWARZYSZĄCĄ TRANSFORMACJOM
W POTRZĘBNIOWYCH LORENTZA

$$x^\mu \longmapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu =: x'^\mu, \quad (\Lambda^\mu_\nu)_{\substack{\mu \in \overline{0,4} \\ \nu \in \overline{0,4}}} \in (S)O(1,3).$$

NALEŻY PRZECZ TO ROZUMIEĆ, ŻE F JEST OBIEKTEM GEOMETRYCZNYM, ZATEM

$$-E_i dt' \wedge dx'^i + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B'^k dx'^i \wedge dx'^j = (-E_i \Lambda^\mu_i \Lambda^\nu_j + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B'^k \Lambda^\mu_i \Lambda^\nu_j) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$\stackrel{!}{=} F = -E_i dx^0 \wedge dx^i + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^k dx^i \wedge dx^j$, A WYMAGAJĄC NAD WJÓZU
TRANSFORMACYJNE $E'_i \propto E_i, B'^i \propto E_i, B^i$ ODTWARZAJĄ DOBRZE ZNANE PRAWA

— I — DLA POL $E_i dx^i$ ORAZ $B^i \partial_i$.

(2)

NA TYM JEDNAK NIE KONIEC — 2-FORMA F UMOŻLIWIA ZWARTY OPIS DYNAMIKI
MAXWELLA-FARADAYA (M-F)

$$\left\{ \begin{array}{l} dF = 0 \quad \text{TO PIERWSZA (BEZDROGOWA — PRZY ZAŁOŻENIU BRAKU} \\ \text{PARADOKSÓW MONOPOLI MAGNETYCZNYCH W PRZYRODZIE)} \\ \text{M-F} \\ \int F = \int *g \, j_e \quad \text{TO DRUGA, ZAPISANA W TERMINACH 3-FORMY} \\ \text{PARADOKSÓW, 4-PRĄDU:} \\ \text{M-F} \end{array} \right.$$

$$j_e = \rho \, dx^1 dx^2 dx^3 - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} j^k \, dt dx^i dx^j,$$

Gdzie ρ — GĘSTOŚĆ ŁADUNKU, $j = j^k \partial_k$ — GĘSTOŚĆ PRĄDU.
(ELEKTRYCZNEGO)

DEFINIOWA TENSORA FARADAYA KODUJE JĄTEM ZARÓDNO
WŁAŚCIWOŚCI TRANSFORMACYJNE SKŁADOWYCH POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO,
JAK I JEJ DYNAMIKĘ. TO KĄŻE PRZYJĄĆ SIĘ F WNIKLIVIE... (3)

W ŚWIEŹLE CORR. 4. ILEKROĆ MAMY DO CZYNIEŃIA Z OBSZAREM
ŚCIĄGALNYM Θ , MOŻLIWE JEST WPROWADZENIE OPISU POTENCJAŁOWEJ:

$$\mathbb{F}_\Theta = dA, \quad A \in \Omega^1(\Theta).$$

GDZIE $A = \phi dt + A_i dx^i$ JEST STOSOWNYM 4-POTENCJAŁEM.

RZECZ JASNA ŻEŻDĄ TRAJEKTORIA FIZYCJNA $x([t_0, t_1])$ JEST
ŚCIĄGALNA, WRAZ Z PEWNYM SWOIM OTOCZENIEM TUBULARNYM,
ZATEM NA PIERWSZY RZUT OKA CAŁA NASZA OPOWIEŚĆ
O KOHOMOLOGII JEST ABSTRAKCYJNA ŻABAWKĄ BEZ PRĄTYCZNYCH
ZASTOSOWAŃ. O TYM, ŻE JEST INACZEJ, PRZECIWNIE SZYFOTOWA
DISKUSJA DRUGIEGO ASPEKTU TEORII PÓŁ ŁADUNKOWYCH,

JAKIM JEST DYNAMIKA ŁADUNKÓW PRÓBNYCH (WIĘC TAKICH, KTÓRE BĘDĄC ŹRÓDŁAMI POLA ŁADUNKOWEGO, NIE ZABURZAJĄ W ISTOTNY SPOSÓB POLA ZEWNĘTRZNEGO DETERMINUJĄCEGO ICH DYNAMIKĘ — WIĘC TAKICH, W ODNIESIENIU DO KOTÓRYCH MA GŁÓWNE ZAŁOŻENIE O BRAKU SAMOSPŁĘŻENIA). ROZWAŻYMY OBECNIE RUCH TAKIEGO ŁADUNKU PRÓBNEGO q , DODATKOWO OBDARZONEGO MASĄ m W ZEWNĘTRZNYCH POLACH NA M : GRAWITACYJNYM — REPREZENTOWANYM PRZEZ TENSOR METRYCZNY $g \in \Gamma(S^2 T^*M)$ ORAZ ELEKTROMAGNETYJNYM — REPREZENTOWANYM PRZEZ TENSOR FARADAYA $F \in Z_{dr}^2(M)$...

TRAJEKTORIE ŁADUNKU MODELUJEMY NA GŁADKICH ŚCIEŻKACH
OTWARTYCH

$$x : [t_0, t_1] \xrightarrow[\mathbb{C}^\infty]{=: T} M \quad (t_0 < t_1 \in \mathbb{R}),$$

NA KTÓRYCH ZBIÓRZE DEFINIOWANY FUNKCJONAL DZIAŁANIA

$$S : C^\infty(T, M) \rightarrow \mathbb{R} (\dots)$$

ODTWARZAJĄCY TRAJEKTORIE OBSERWOWANE W PRZYPADZIE
JAKO SWE PUNKTY KRYTYCZNE (MINIMA), PRZY CZYM TE
OSTATNIE ZNAJDUJEMY STORUJĄC GEOMETRYCZNY ZASADĘ
WARIACJNY "O USTALONYCH KONCACH", TY. MODELUJĄC ŚCIEŻKI
W PRZESTRZENI TRAJEKTORII $C^\infty(T, M)$ NA POTOKACH Pól WEKTOROWYCH
GŁADKICH NA TUBULARNYCH OTOCZENIACH $\mathcal{O}_{x(T)}$ TRAJEKTORII $x \in C^\infty(T, M)$. ⑥

KONKRETNIE ŻĄDAMY

$$\forall v \in \Gamma(TM|_{\theta_{x(t)}}, V(x(t_0)) = 0 = V(x(t_1)) : \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} S[\Phi_v(\tau; x_*(\cdot))] = 0$$

NA TRAJEKTORIACH KLASYCZNYCH x_* , CZYLI OBSERWOWANYCH (DODATKOWEGO WARUNKU MINIMUM NIE BĘDZIEMY TUTAJ ROZPATRYWAĆ).

PUNKTEM WYJŚCIA DO DALSZEJ ANALIZY JEST WSKAZANIE KLASY TRAJEKTORII OBSERWOWANYCH, KTÓRĄ BĘDZIEMY MODELOWAĆ W OPISANYM SCHEMACIE. DLA ŁADUNKU $q=0$ (NEUTRALNA MASA PUNKTOWA) KLASĘ TĘ TWORZĄ GEODEZYZJNE METRYKI g , A STOSOWNY FUNKCJONAL MOŻEMY WYBRAĆ NP. W POSTACI

POLYAKOVA: $S_m[x] = -\frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \, g(x(t)) (\dot{x}(t), \dot{x}(t)).$ (OPISY GEODEZYZJNYCH - SPARAMETRIZOWANYCH I NIE-NATCZLIWYCH)

(FUNKCJONAL ENERGII)

ADDYTYWNA POPRAWKA DO NEUTRALNEJ DYNAMIKI GEODEZYJNEJ
 OBSERWOWANA (NP. W KONDYZE MŁTOWEJ) W OBECNOŚCI $g \neq 0$
 W FORMIE 4-SIŁY LORENTZA GENERUJE DODATKOWY CZŁON
 FUNKCYONALU DZIAŁANIA POSTACI

$$S_g[x] = g \int_{x(\tau)} A, \quad A \in \Omega^1(\mathcal{O}_{x(\tau)}), \quad dA = F|_{\mathcal{O}_{x(\tau)}}.$$

ISTOTNIE,

RACHUNKI PROWADZIMY W MAPIE LOKALNEJ,
 PO CZYM PREZENTUJEMY W FORMIE
 NIEZALEŻNEJ OD TĘJ WYBORU!

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} S_g[\mathbb{E}_\nu(\tau; x(\cdot))] \stackrel{+}{=} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} g \int_{t_0}^{t_1} dt A_\mu(\mathbb{E}_\nu(\tau; x(t))) \frac{d}{dt} x^\mu \bar{\mathbb{E}}_\nu(\tau; x(\cdot))(t)$$

← CZŁON Z PARAMETREM PO ODCINKU ZWARTYM

$$= g \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} x^\nu \bar{\mathbb{E}}_\nu(\tau; x(t)) \partial_\nu A_\mu(\mathbb{E}_\nu(0; x(t))) \frac{d}{dt} x^\mu \bar{\mathbb{E}}_\nu(0; x(\cdot))(t) \right]$$

$$+ g \int_{t_0}^{t_1} dt A_\mu(\mathbb{E}_\nu(0; x(t))) \frac{d}{dt} \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} x^\mu \bar{\mathbb{E}}_\nu(\tau; x(\cdot))(t)$$

$$\begin{aligned}
&= g \int_{t_0}^{t_1} dt \left[T x^\nu (V(x(t))) \partial_\nu A_\mu (x(t)) \frac{dx^\mu}{dt}(t) \right] \\
&+ g \int_{t_0}^{t_1} dt \left[A_\mu (x(t)) \frac{d}{dt} T x^\mu (V(x(\cdot))) (t) \right] \\
&= g \int_{t_0}^{t_1} dt V^\nu (x(t)) \partial_\nu A_\mu (x(t)) \frac{dx^\mu}{dt}(t) - g \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d}{dt} A_\mu (x(\cdot)) (t) V^\mu (x(t)) \right] \\
&+ g \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} [A_\mu (x(\cdot)) V^\mu (x(\cdot))] (t) \\
&= g \int_{t_0}^{t_1} dt V^\nu (x(t)) (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) (x(t)) \frac{dx^\mu}{dt}(t) + g A_\mu (x(t)) V^\mu (x(t)) \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} \\
&\equiv g \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{x}_\perp V_\perp F(x(t)) + g A_\mu (x(t_1)) V^\mu (x(t_1)) \stackrel{=0}{=} - g A_\mu (x(t_0)) V^\mu (x(t_0)) \stackrel{=0}{=}
\end{aligned}$$

LEIBNIZ!

(9)

OSTATECZNIE WIĘC OTRZYMUJEMY ŁADUNKOWY WŁAD DO PRACY SIŁY
W POSTACI $-q \dot{x} \cdot F$, A TO JEST - W ISTOCIE - 4-SIŁA LORENTZA!

NAMY ZATEM FUNKCJONALNY MODEL DYNAMIKI MASYWNEGO ŁADUNKU
PROBNEGO (DO DYSKUSJI ASPEKTU BRZĘCOWEGO JESZCZE WROCIMY!).
CZY PRZETO NASZ „CALCULUSI TRUD” JEST ZAKOŃCZONY?
AJEBY UŚWIADOMIĆ SOBIE, JE TAK NIE JEST, POTRZEBUJEMY
UZYSKAĆ BODAJ FRAGMENTARYCZNY WGLĄD W BŁYSKOZIŁWĄ
INTERPRETACJĘ KWANTOWOMECHANICZNĄ KLASYCZNEGO FUNKCJONALU
DZIAŁANIA AUTORSTWA P.A.M. DIRACA. OTÓJ JAK POWIĄZAŁ
ON W SWEJ PRACY z 1932 r. „The Lagrangian in Quantum Mechanics”

ILEKROĆ MAMY DO CZYNIEŃIA Z JEDNOZNAKOWYM OKREŚLONĄ
TRAJEKTORIA KLASYCZNA $x \in C^\infty(T, M)$ ŁĄCZĄCA $x_0 = x(t_0)$ Z $x_1 = x(t_1)$
(CZYLI ZAMEKZB LOCALNIE), AMPLITUDA PRZESZCIEŃ

$$\psi_{(t_0, x_0)}(t_1, x_1) \equiv \langle x_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_1 - t_0) \hat{H}} | x_0 \rangle$$

POMIĘDZY STANAMI POŁOŻENIOWYMI (OCZYWIŚCIE TO „TYLKO” HEURYSTA,
KTÓREJ FORMALIZACJA WYMAGAŁABY WPROWADZENIA DO CRY
PACZKI FALOWYCH O MAŁEJ (LUB NIŻSZEJ) DYSPERSJI...) $|x_0\rangle$ (NA POCZĄTKU) I $|x_1\rangle$ (NA KONCU), OKREŚLAJĄCA GĘSTOŚĆ
PRAWDOPODOBIEŃSTWA ZNALEZIENIA OBIEKTU MATERIALNEGO
O DYNAMICE KWANTOWEJ OPISYWANEJ HAMILTONIANEM $\hat{H}$ JEST

- PRZY PEWNYCH NIEGROFNYCH ZAŁOŻENIACH DOTYCZĄCYCH ANALITYCZNEGO CHARAKTERU ZALEŻNOŚCI HAMILTONIANU OD PĘDU - OKREŚLONA W PIERWSZYM RZĘDZIE W MAKELY $\hbar$ PRZEZ WARTOŚĆ FUNKCYONALU DZIAŁANIA KLASYCZNEGO NA RZĘDZONYCH TRAJEKTORIACH KLASYCZNYCH,

$$\psi_{(t_0, x_0)}(t_1, x_1) = e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} (1 + O(\hbar))$$

RÓWNANIE SCHRÖDINGERA
RÓWNANIE HAMILTONA-JACOBI'EGO

W SWOJEJ PRACY DOKTORSKIEJ Z 1942 r. R.P. FEYNMAN UZUPEŁNIŁ POWYŻSZY WYNIK O KONSTANTĘ, KTÓRA LEŻY U PODSTAW JEGO PODEJŚCIA DO KWANTOWANIA POPRZECZ TZW. SUMACJĄ PO TRAJEKTORIACH (Z ISZ. ANG. PATH INTEGRALS):

$$\psi_{(t_0, x_0)}(t_1, x_1) = \int_{\substack{x \in C^\infty(T, M) \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x]},$$

Przy czym wkład do $\int$ pochodzi od trajektorii klasycznych (których w ogólności może być więcej niż 1).

Kłopot z tym pomysłem jest taki, że tylko w bardzo wyjątkowych sytuacjach umiemy nadać ścisły sens sumacji $\int$ (nie jest znana ogólna konstrukcja miary na przestrzeniach „trajektorii”). Niemniej jednak możemy z powyższego wyciągnąć konstruktywny postulat, stanowiący parafrazę kantowskiego imperatywu kategoryjnego:

"KOMBINUJĄC TAK, IŻBY FORMUŁA NA FUNKCJONALIE

$$A_{DF} : C^\infty(T, M) \rightarrow U(1)$$

AMPLITUDA DIRACA-FEYNMANA

ZADAJĄCY DYNAMIKĘ KLASYCZNĄ WEDLE SCHEMATU

$$\forall V \in \Gamma(TM|_{\partial_{x(t)}}) : i \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \log A_{DF} [\Phi_V(\tau; x_*(\cdot))] = 0$$

$V(x(t_0)) = 0 = V(x(t_1))$ DLA POSIADANYCH TRAJEKTORIÍ KLASYCZNYCH x_*

BYŁA OKREŚLONA DOKŁADNIE I ZATEM MOGŁA STANOWIĆ

POWSZECHNE PRAWO DYNAMIKI."

(ALLGEMEINGESETZ)

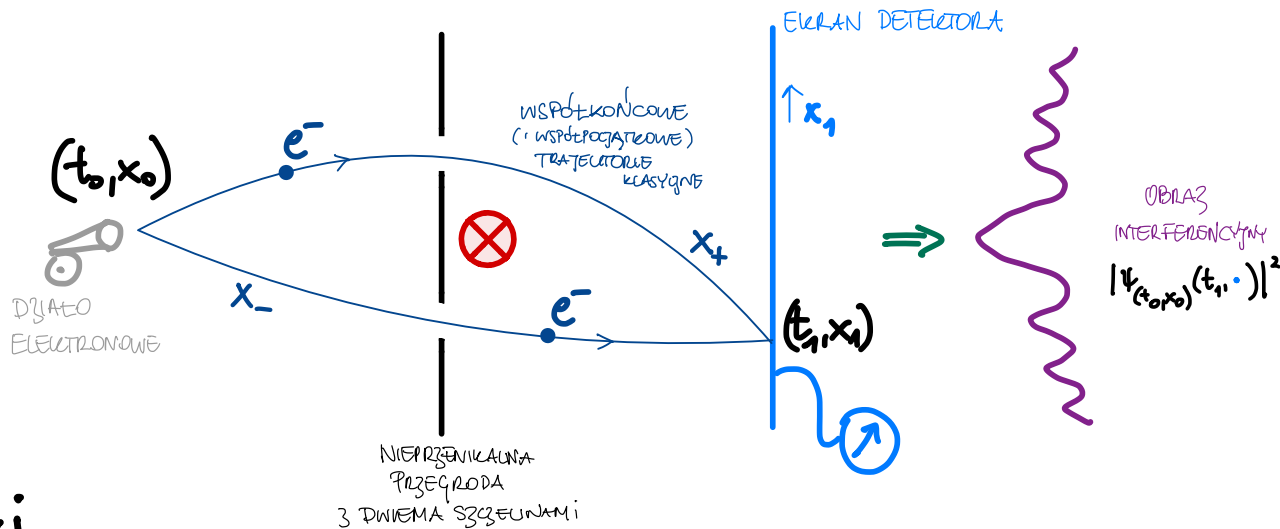
NA TYM ETAPIE NIEODJOWNY JEST
NASTĘPUJĄCY KOMENTARZ...

UŻYĆ POCODNEJ LOGARYTMICZNEJ ZAMIAST ZWIKŁEJ NA NA CELU
I TYLKO ZASYGNALIZOWANE ZWIĄZKI Z WYJŚCIOWĄ FORMUŁĄ

$$\underline{A}_{DF}[\cdot] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\cdot]\right),$$

KTOREJ UTRZYMANIE W POWIŻSZEJ POSTACI POCODNEJ WZGLĘDEM
PIERWOTNEGO $S[\cdot]$ - W ŚWIELE DOTYKAJĄCYCH ROZWĄŻAŃ
BYNAYMNIEJ NIE NIEODROWNE ($\neq$ OKREŚLA FUNKCJONAL FAZOWY,
ZADANY PRZĘZ SWOJĄ WŁASNOŚĆ: GENEROWANIE OKREŚLONYCH RÓWNAŃ
EWOLUCJI WYRÓŻNIAJĄCYM x_* , A NIE SAMO $S[\cdot]$) - OLAZYJE SIĘ
ZBYT OGRANICZAJĄCE DLA KLASY DZIAŁY SIĘ UMÓDLOWAĆ
SYTUACJI FIZYCZNYCH. PONIŻSZA ANALIZA ŚCISTA, WYJAWIAJĄCA NAS
Z NIEWYKODNEGO GORSETH HEUREZY...

ROZWAŻMY UKŁAD DOŚWIADCZALNY AHARONOVA-BOHMA :



WĄSKI

$\otimes$ = WĄSKI PŁASZCZYŹNY $\vec{A}$ LA FAREDEY STRUMIEN ZMIENNEGO POLA $F \neq 0$ (TRANSVERSALNY DO PŁASZCZYZNY DOŚWIADCZENIA), TY.

$$F|_{R^{n-1}} \otimes \equiv 0$$

OBSERWACJA : ZMIANA F PRZY WARUNKU $F|_{R^{n-1}} \otimes \equiv 0$ WYWOŁUJE ZMIANĘ OBRAZU INTERFERENCYJNEGO !

JAKO ŻE EFEKT UTRZYMUJE SIĘ, GDY EFEKTYWNE WYKLUCZYĆ
 WNIKANIE PACZKI FALOWEJ ELEKTRONU W WĄZ JAKO JEGO ŹRÓDŁO,
 PRZETO MUSIMY POSZUKAĆ WYJAŚNIENIA GDZIE INDEJ, WYCiąGŁYSZ
 OBSZAR NIENYCHODNY (NIEZEROWY STRUMIEŃ O OSTRYM PROFILU PRZESTRZANNYM
 W PRZESZCZYŃNIE DOŚWIADOCZENA), LECZ SZCZĘŚLIWIE ZABRONIONY DLA e^-
 Z MODELU DYNAMIKI – INNYMI SŁOWY, ROZPATRUJEMY WCZEJNIEJ
 ZREKONSTRUOWANĄ DYNAMIKĘ W OBSZARZE $\mathbb{R}^{x,2} \setminus \otimes \simeq \mathbb{R}^{x,2} \setminus \{0\}$,
 KTÓRY WSZAKŻE... NIE JEST ŚCIAŻALNY, CO OKAŻE SIĘ PODSTAWĄ
 DO ZAPRZĘCZENIA KOHOMOLOGII DE RHAMA (A ŚCIŚLEJ :
 CECHA-DE RHAMA) DO WYJAŚNIENIA EFEKTU ZA CENĄ POSTULOWANEGO
 WCZEJNIEJ KANTOWSKIEGO UOGÓLNIENIA: $\exp(\frac{i}{\hbar} S[\cdot]) \rightsquigarrow \text{AdF}[\cdot]$.

A OTO KRÓTKA (JUZ TERAZ) DROGA DO FINALNEJ ABSTRAKCJI:
 ROZWAŻMY DWIE TRAJEKTORIE KLASYCZNE $x_{\pm}$ ZAZNACZONE NA RYSUNKU
 UKŁADU DOŚWIADCZALNEGO. ICH INTERFERENCJA W WYJŚCIU DIRACA-FEYNMANA
 JEST OPISYWANA PRZEZ WYRAŻENIE

$$e^{\frac{i}{\hbar} S[x_+]} + e^{\frac{i}{\hbar} S[x_-]} = e^{\frac{i}{\hbar} S[x_-]} \left(1 + e^{\frac{i}{\hbar} (S[x_+] - S[x_-])} \right)$$

$$\downarrow | \cdot |^2$$

$$\left| 1 + e^{\frac{i}{\hbar} (S[x_+] - S[x_-])} \right|^2$$

ODWROTCENIE
ORIENTACJI

$$S[x_+ \cup \bar{x}_-]$$

IDEALIZACJA: $x_+ \cup \bar{x}_- \sim x \in \mathcal{LM} \equiv C^{\infty}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^{*2} \setminus \{0\})$ PRZESTRZEN
 PĘTLI W $\mathbb{R}^{*2} \setminus \{0\}$

WRACAMY WIĘC Z DALEKIEJ PODROŻY DO KRAINY 1001 NOCY...

3 DOBRZE POSTAWIONYM

ZAGADNIENIE: Poszukujemy określonego ściśle (a nie

tylko z dowadnością do członów niewpływających

na dynamikę) Funkcjonału $e^{\frac{i}{\hbar} S} : LM \rightarrow U(1)$,

albo lepiej - bo tylko uogólnienie zapewni nam
rozwiązywalność tak postawionego zagadnienia -

$A_{DF} : LM \rightarrow U(1), \forall \text{ver}(TM|_{x(s)}): \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \log A_{DF}[\Phi_v(t; x(\cdot))] = 0$
DYNAMIKA JEST ZADANA
LOKALNIE!!!
(*) $\Leftrightarrow$ GEODEZJA + LORENTZ

w konkretnej sytuacji opisanej powyżej
- dla $M = \mathbb{R}^{*2} / \{0\}$, a ogólnie - dla dowolnej
rozmaitości M , o dowolnej topologii.

RACHUNEK ZE SG. 244-245 PODPOWIADA BAZOWE ROZWIĄZANIE
WARUNKU FIZYKALNEGO (*):

KORZYSTAJĄC Z KLASYCZNEGO WYNIKU, PODANEGO TU BEZ DOWODU,

Tw. 19. [DE RHAMA-WEILA]

$\forall M$ - ROZNAITOŚĆ KLASYC² $\exists \mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i : i \in I\}$ - ROZRYCIE OTWARTE M :

$\mathcal{O}$ JEST DOBRE $\overset{\text{ex}}{\underset{\text{def}}{\iff}} \forall N \in \mathbb{N}^* \forall i_1, i_2, \dots, i_N \in I : \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} \equiv \mathcal{O}_{i_1} \mathcal{O}_{i_2} \dots \mathcal{O}_{i_N} \neq \emptyset$
 $\downarrow$
 $\mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$ SCIGAŁNY

WYBIERZMY ROZRYCIE DOBRE M , NA KTÓRYM - W ŚWIECIE

Cor. 4. - JEST $\forall i \in I \exists A_i \in \Omega'(\mathcal{O}_i) : F|_{\mathcal{O}_i} = dA_i$.

NASTĘPNIE DLA DANEJ PĘTLI $x \in LM$ USTALMY TESSELACJĘ $\Delta_{\mathcal{S}^1}$

(CYKLICZNE POROZUMIOWANIE) OKRĘGU $\mathcal{S}^1$:

$$\Delta_{\mathcal{S}^1} = E \cup V$$

WIERZCHOŁY
KONTINERU 1

KRAWĘDZIE SPÓJNE
KONTINERU 0 (ODEJNĄTUKI)

$$\bigcup_{e \in E} e = \mathcal{S}^1$$

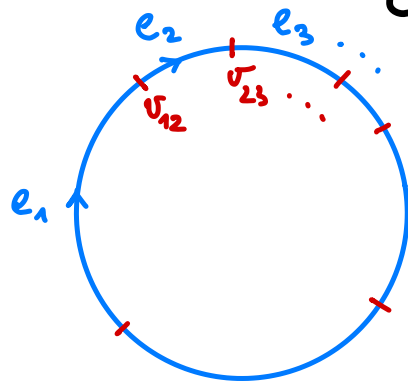
$$\forall e, e' \in E: e \cap e' \neq \emptyset \Rightarrow \begin{matrix} e = e' \\ \vee \\ e \cap e' \in V \end{matrix}$$

SPŁNIAJĄCĄ WARUNKU

PODPORZĄDKOWANIA σ WZDŁUŻ x :

$$\exists \iota : \Delta_{\mathcal{S}^1} \rightarrow I$$

$$\forall z \in \Delta_{\mathcal{S}^1} : x(z) \subset \sigma_\iota(z)$$



(TAKIE ZABIEGI POZWALAJĄ WPROWADZIĆ NA LM NATURALNĄ I WYGODNĄ TOPOLOGIĘ
ZWAŁTO-OTWARTĄ — PATRZ: [GAWŁOŃSKI '87])

MOŻEMY JUŻ TERAZ SFORMUŁOWAĆ (ZAJMUJEMY SIĘ TYLKO CZŁONEM ŁADUNKOWYM,
GDYŻ CZŁON MAFOWY PRZEPISUJE SIĘ TRYWIALNIE)

ANSATZ NULL: $A_{\text{gDF}}^{(0)}[x] := \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \sum_{e \in E} \int_{x(e)} A_{\text{L}(e)}\right) \equiv \prod_{e \in E} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \int_{x(e)} A_{\text{L}(e)}\right)$

(NB: S^1 , więc TAKŻE $x(S^1)$ JEST ZWARTY, MOŻNA PRZETO ZAWSZE WYBRAĆ $|E| < \infty$)

POWYŻSZE DANE NAM ODZWIĘKAMY (LORENTZOWSKI) WKŁAD DO DYNAMIKI, ALE..

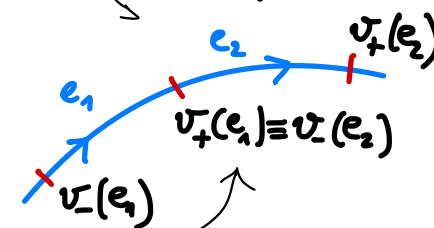
PROBLEM: $A_{\text{gDF}}^{(0)}$ JEST FUNKCYONALNIE ZALEŻNY OD WYBORÓW DOVOLNYCH:

- * DANYCH LOKALNYCH $A_i \in \mathcal{Q}^1(\mathcal{O}_i)$;
- ** TESSELAOR Δ_{S^1} PODPORZĄDKOWANEJ POKRYCIU;
- *** PODPORZĄDKOWANIA 2 / POKRYCIA DOBRZEJ $\mathcal{O}$.

ANALIZA TEJ ZALEŻNOŚCI POZWOLI NA NAPRAWIENIE BŁĘDÓW I WYPACZEŃ... (22)

A2 *: Wobec ściągłości θ : równość $F|_{O_i} = dA_i$; dopuszczając swobodę redefinicji $A_i \mapsto A_i + d\alpha_i =: A'_i$, $\alpha_i \in \Omega^0(O_i)$,
 $\ker d_0|_{O_i} = \ker d_1|_{O_i} \ni A'_i - A_i$

Która zmienia wartość $A_{gDF}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} A_{gDF}^{(0)}[x] &\stackrel{\text{DLA } A'_i}{=} \prod_{e \in E} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \int_{x(e)} (A_{1(e)} + d\alpha_{1(e)})\right) \stackrel{\text{Tw. 4.2}}{=} A_{gDF}^{(0)}[x] \cdot \prod_{e \in E} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \int_{x(e)} d\alpha_{1(e)}\right) \\ &\equiv A_{gDF}^{(0)}[x] \cdot \prod_{e \in E} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} (d_1(e)(x(v_+(e))) - d_1(e)(x(v_-(e))))\right) \\ &\equiv A_{gDF}^{(0)}[x] \cdot \prod_{v \in V} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} (d_1(e_+(v)) - d_1(e_-(v)))(x(v))\right) \end{aligned}$$


(każdy wierzchołek jest parą $+$ i $-$)

Wniosek: zmiana jest funkcjonalna w X , więc nawet klasyczny nie do przyjęcia!

Alte też $(A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} \in \ker d_1|_{\mathcal{O}_{ij}} = \operatorname{Im} d_0|_{\mathcal{O}_{ij}}$ z racji ciągłości $\mathcal{O}_{ij}$,

Przeto $\exists f_{ij} \in \Omega^0(\mathcal{O}_{ij}) : (A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} = df_{ij}$

NB: Funkcje f_{ij} można wybrać tak, by było $f_{ji} = -f_{ij}$.

Istotnie, $d\left(\frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji})\right) = \frac{1}{2}[(A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} - (A_i - A_j)|_{\mathcal{O}_{ij}}] = (A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ij}}$

Przy $\boxtimes$ zachodzi $df'_{ij} = (A'_j - A'_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} = (A_j - A_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} + d(\alpha_j - \alpha_i)|_{\mathcal{O}_{ij}}$
 $= d(f_{ij} + (\alpha_j - \alpha_i)|_{\mathcal{O}_{ij}})$, zatem

$f_{ij} \mapsto f_{ij} + (\alpha_j - \alpha_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} + c_{ij} =: f'_{ij}$, znów z racji ciągłości $\mathcal{O}_{ij}$

$\ker d_0 = \mathbb{R}$ (stałe lokalne)

Wobec tego wystarczy poprawić $A_{\text{gd}}^{(0)}$ według schematu:

ANSATZ EINS: $A_{\text{gdf}}^{(1)}[x] := \prod_{e \in E} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \int_{x(e)} A_{1(e)}\right) \cdot \prod_{v \in V} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \int \chi_1(e_+(v)) \chi_1(e_-(v)) (x(v))\right)$

AŻEBY USUNĄĆ ZALEŻNOŚĆ TYPU * ... NO, PRAWIE, BO TERAZ

$$A_{\text{gdf}}^{(1)'}[x] = A_{\text{gdf}}^{(1)}[x] \cdot \prod_{v \in V} \exp\left(\frac{ig}{\hbar} C_1(e_+(v)) \chi_1(e_-(v))\right)$$

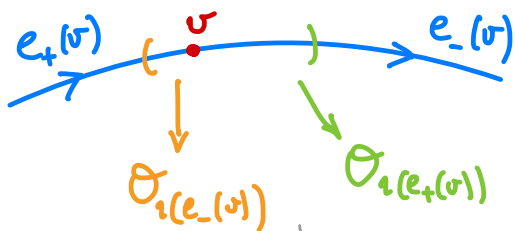
KLASYCZNIŚ JEST TO ZMIENNOŚĆ BEZ KONSEKWENCJI, ALE UWANTOWO-
MECHANICZNIE JEST NIE DO PRZYJĘCIA (ZMIANA OBRAZU INTERFERENCYJNEGO!),
DLATEGO - BIORĄC DOWOLNOŚĆ POŁOŻENIA $x(\sigma)$ (SZUKAMY ROZWIĄZANIA
DĄŻĄCEGO SIĘ ZASTOSOWAĆ DLA DOWOLNEJ PĘTLI) - ŻĄDAMY

$$\underline{\forall i, j \in \Gamma : \frac{g}{\hbar} C_{ij} \in 2\pi \mathbb{Z} \quad (\text{DQC1})}$$

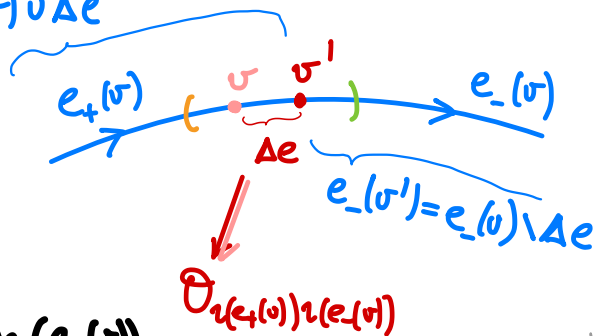
WRÓĆMY JEŚCIE DO (DQC1), TYM CZASEM PRZECHODZIMY DO ANALIZY **.

A2 **: ZMIANA TESSELACJI PODPORZĄDKOWANY PORYBIU σ SPROWADZA SIĘ DO PRZESUNIĘCIA WŁOKEŃ Z JĄ WIERZCHOŁOW W OBLĘBIE x -PRZEWODRAJU PRZECIĘCIA PARY ELEMENTÓW PORBYA, DO WŁOKEŃO NALĘŻY, JAK PONIŻEJ:

$$e_+(v') = e_+(v) \cup \Delta e$$



$\rightsquigarrow$



OBLICZAMY:

$$= -df_1(e_-(v)) \cup e_-(v)$$

DZIAŁA POPRAWO!
OD V

$$= 1$$

$$A_{\text{gof}}^{(1)'}[x] / A_{\text{gof}}^{(1)}[x] = \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \int_{x(\Delta e)} (A_1(e_+(v)) - A_1(e_-(v)))\right)$$

$$\cdot \exp\left(\frac{ig}{\hbar} (f_1(e_-(v)) \cup e_-(v))(x(v')) - f_1(e_-(v)) \cup e_-(v))(x(v))\right)$$

NA OBECHNY ETAPIE PORÓBTAJE ROZUMIĆ

A) *** ZALEŻNOŚĆ $A_{gDF}^{(n)}$ OD WYBORU σ : 1 POPRZĘZ ROZDROBNIENIE
 FUNKCJA I WYKORZYSTANIE CO DO ROZDROBNIENIA TESTOWAŁOŚCI - JAK PONIŻEJ:



Porównujemy:

$$A_{gDF}^{(n)'}[x] / A_{gDF}^{(n)}[x] = \exp \left(\frac{i g}{\hbar} \left(\int_{x(e_{12} \setminus e_2)}^{df_{1(e_1) \cup e_2}} (A_{1(e_2)} - A_{1(e_1)}) + \int_{x(e_{12} \setminus e_1)}^{df_{1(e_2) \cup e_1}} (A_{1(e_2)} - A_{1(e_1)}) \right) \right) \\
- \exp \left(\frac{i g}{\hbar} (f_{1(e_1) \cup e_2}(x(\sigma_{12})) + f_{1(e_2) \cup e_1}(x(\sigma_{12})) - f_{1(e_1) \cup e_2}(x(v_{12})) \right)$$

UWZGLĘDNIĄJĄC ANTYSYMETRIĘ $f_{ij} = -f_{ji}$, OTRZYMUJEMY WYNIK:

$$\begin{aligned} A_{\text{gdf}}^{(n)'}[x] / A_{\text{gdf}}^{(n)}[x] &= \exp \left(\frac{iq}{\hbar} \left(f_1(e_1)u(e_2)(x(\sigma_{12})) - \cancel{f_1(e_1)u(e_2)(x(\sigma_{12}))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cancel{f_1(e_2)u(e_2)(x(\sigma_{12}))} - \cancel{f_1(e_2)u(e_2)(x(\sigma_{12}))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cancel{f_1(e_1)u(e_2)(x(\sigma_{12}))} - \cancel{f_1(e_2)u(e_2)(x(\sigma_{12}))} - f_2(e_1)u(e_2)(x(\sigma_{12})) \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{iq}{\hbar} (f_1(e_1)u(e_2) - \cancel{f_1(e_2)u(e_2)} - f_2(e_1)u(e_2))(x(\sigma_{12})) \right) \end{aligned}$$

HOUSTON, WE HAVE A PROBLEM! BUT DO WE?

ZAUWAŻMY (PATRZ: **8.1.160.**)

$$(f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})|o_{ijk} \in \ker d_0 \Rightarrow \exists N_{ijk} \in \mathbb{R} : (f_{jk} - f_{ik} + f_{ij})|o_{ijk} = N_{ijk}$$

STATE LOCALNE

JEST PRZETO $A_{\text{gdf}}^{(n)'}[x] / A_{\text{gdf}}^{(n)}[x] = \exp \left(-\frac{iq}{\hbar} N_{1(e_1)u(e_2)u(e_2)} \right)$

POWTARZAJĄC ARGUMENTACJĘ ZE §4.261, ŻĄDAMY

$$\forall i, j, k \in I: \frac{q}{h} N_{ijk} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{DQC2})$$

NIETRUDNO POUŻAĆ, ŻE PO NARZUCENIU WIEZÓW (DQC1) i (DQC2),
ZWANYCH WARUNKAMI KWANTOWANIA (ŁADUNKU) DIRACA,
AMPLITUDY D-F W POSTACI $A_{DF}^{(1)}$ SĄ JUŻ W PEŁNI NIEZALEŻNE
OD WYBORÓW DOWOLNYCH, A PRZY TYM ZADAJĄ POŻĄDANĄ DYNAMIKĘ
(ĆWICZENIE!). POZOSTAŁO ZROZUMIEĆ, JAKĄ STRUKTURĘ OPISUJĄ
NAD $M \dots$ AŻEBY TO ŁACNO ZROZUMIEĆ, WPROWADZAMY
OZNACZENIA DOPASOWANE DO (DQC1) i (DQC2):

$$\underline{A}_i := \frac{g}{\hbar} A_i \in R'(\mathcal{O}_i) \quad ; \quad g_{ij} := \exp\left(-\frac{ig}{\hbar} f_{ij}\right) : \mathcal{O}_{ij} \rightarrow U(1)$$

$$\text{ORAZ} \quad h_i := \exp\left(\frac{ig}{\hbar} \alpha_i\right) : \mathcal{O}_i \rightarrow U(1)$$

i PRZEPIUTEMY WSZYSTKIE WYPROWADZONY UPRZEDNIO RELACJE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{g}{\hbar} F|_{\mathcal{O}_i} = d\underline{A}_i \quad , \quad \underline{A}_i \sim \underline{A}_i - i h_i^{-1} dh_i \equiv \underline{A}_i - i d \log h_i \quad (*) \\ (\underline{A}_j - \underline{A}_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} = i g_{ij}^{-1} d g_{ij} \equiv i d \log g_{ij} \quad , \quad g_{ij} \sim \underbrace{h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j^{-1}}_{\equiv: \underline{A}_i^h} \\ \underline{(g_{jk} \cdot g_{ik}^{-1} \cdot g_{ij})}|_{\mathcal{O}_{ik}} = 1 \end{array} \right.$$

ALEŻ DWA PODKREŚLONE RELACJE WYGLĄDAJĄ ZNAJOMO!

PATRZ: Tw. 8. i Skw. 14.

KONKLUZJA: 1-koczek $\{g_{ij}\}_{i,j \in I}$ ZADAJE WIĄZKĘ WŁÓKNISTĄ

O GRUPIE STRUKTURALNEJ $G \supset U(I)$ (REDUKCJA!)

Σ.f.1 WIĄZKA DIRACA DLA F

$$P_F := \bigsqcup_{i \in I} \Theta_i \times U(I) / \sim_{g_{\cdot}}, \quad (x, z, j) \sim (x, g_{ij}(x) \cdot z, i)$$

(WIĄZKA BAZ UNITARNYCH
WIĄZKI PREKWANTOWEJ)

$$\downarrow \pi_{P_F}$$

$$M$$

MOŻEMY TEŻ WYBRAĆ: C^*, C

Tw. 8.

AUTOMORFIZMY
WŁÓKNA TYPOWEJ $U(I)$

POSTACI $U(I) \ni z \mapsto u \cdot z \in U(I)$

NATOMIAST $\{h_i\}_{i \in I}$ WYZNACZA AUTOMORFIZM WERTUKALNY (NAD id_M)

WIĄZKI DIRACA

$$P_F \xrightarrow[\cong]{\Phi} P_F$$

$$\pi_{P_F} \downarrow \quad \downarrow \pi_{P_F}$$

$$M = M$$

O PREZENTACJI LOKALNEJ:

$$[c_i] \circ \Phi \circ [c_i]^{-1}(x, u) = (x, h_i(x) \cdot u)$$

Skw. 14.

Tym oto sposobem nasza (udana) próba nadania ścisłego sensu
matematycznego amplitudom interferencyjnym w doświadczeniu
Aharonova - Bohma doprowadziła nas wprost do geometryzacji
pola elektromagnetycznego w postaci... wiązki włókniastej,
odkurwając przed nami głębszą prawdę o naturze tegoż
pola i zarazem dostarczając nader naturalnego
argumentu (fizycznego!) na rzecz teorii wiązek.
Rzeczona prawda nie jest pełna — taka urzyje się
w geometrycznej interpretacji danych lokalnych λ i $\hbar$ i
którą przedstawimy na następnym wykładzie, biorąc ją
za motywację dla studiów nad... teorią powiązania
na wiązkach włókniastych...

TYMCZAJEM, NA ZAMKNIĘCIE WYKŁADU NINIEJSZEGO, ZAUWAŻYMY, ŻE WARUNEK KWANTOWANIA DIRAFA (DQC2) MA DUŻO POWAŻNIEJSZE KONSEKWENCJE, NIŻ MOŻNA BY SIĘ SPODZIEWAĆ: OTO DOPUSZCZA ON GEOMETRIĘ TYLKO W PRZYPADKU Pól ELEKTROMAGNETYCZNYCH, KTÓRYCH TENSOR FARADAYA SPEŁNIA WARUNEK

$$\forall C_2 \in \mathcal{Z}_2(M) : \quad \frac{q}{h} \int_{C_2} F \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{DQC2'})$$

2-CYK, CZYLI PODROZMAITOC' M
WYMIARU 2, O PUSTYM BRZĘGU, $\partial C_2 = \emptyset$.

NA MARGINESIE: JEŚLI ZATEM - NP. - Pole F pochodzi od monopola MAGNETYCZNEGO, ZW. MONOPOLEM DIRAFA, WÓWZIAS PRAWO GAUSSA: $\int F = Q(b_3) : C_2 = \partial b_3$ DAJE NAM WARUNEK KWANTOWANIA C_2 ŁADUNKU MONOPOLA q_m W JEDNOSTKACH ELEMENTARNEGO ŁADUNKU

ELEKTRYCZNEGO $q = e$ (MOGĄCEGO FOREWIAĆ SIĘ W POLU ZEWNĘTRZNYM
F POMOCZĄCYM OD q_m): $\frac{eq_m}{h} \in 2\pi\mathbb{Z}$.

WRÓĆMY WSKAZIĆ DO (DQC2'): JEGO DOWÓD JEST PROSTYM
ĆWICZENIEM POLEGAJĄCYM NA UŻYCIU TESSELACJI (CZYLI
PARKIETAŻU) C_2 PODPORZĄDKOWANEJ PORZYCIU $\mathcal{O}$, A NASTĘPNIE
— ZASTOSOWANIU TW. 18., CO W DWÓCH KROKACH POZWALA
WYRAZIC CAŁE $\int_{C_2} F$ JAKO SUMĘ LICZB CAŁKOWITYCH
 N_{ij} PRZYPISANYCH WIERZCHOŁKOM PARKIETAŻU. AŻEBY UŁATWIĆ
SOBIE ZADANIE, WARTO WYBRAĆ PARKIETAŻ TRÓJKĄTAMI (TRIANGULATES),
A NASTĘPNIE — PRZEJŚĆ DO TZW. PARKIETAŻU DUALNEGO...
(TYPU "PLASTER MIODU") POWODZENIA!

DOTYCHCZASOWA NASZA ANALIZA STRUKTURY $(\underline{A}_i, g_{ij})$ NIEODPOWIEDZ
 DO UMODELOWANIA - W SPOSÓB KWANTOWOMECHANICZNY
 SPÓJNY - EFEKTU AHARONOVA - BOHMA POZWOLIŁA NAM
 USTALIĆ SENS GEOMETRYCZNY LEDWIE UŻYCIA OWEJ STRUKTURY
 - ODWZOROWANIA $g_{ij} : \mathcal{O}_i \rightarrow U(1)$ UŻYSKAŁY INTERPRETACJĘ
 1-WYKŁU PRZECYKA WŁĄŻKI DIRACA P_F . POZOSTAŁO
 PYTANIE O ROLĘ 1-FORMY $\underline{A}_i \in \Omega^1(\mathcal{O}_i)$ NA ELEMENTACH
 ROZRYCIA $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ TRYWIALIZUJĄCEGO P_F I ZNACZENIE
 SPEŁNIANYCH PRZEZ NIE AFINICZNYCH RELACJI ZŁYCIA:

$$(\underline{A}_j - \underline{A}_i)|_{\mathcal{O}_{ij}} = i d \log g_{ij} \quad (\text{PATRZ: } \text{fu. 266}).$$

ISTNIEJE UZASADNIONE PODEJRZENIE, ŻE RELACJE TE GWARANTUJĄ
 „ZSTĄPIENIE” DO P_F RODZINY 1-FORM NA LOKALNYCH MODELACH
 $O_i \times U(1) \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} O_i \times U(1)$, KTÓREJ ELEMENTY SĄ WIPÓTKRĘSLANE
 PRZEZ $\underline{A}_i$. AŻEBY TO STWIERDZIĆ, MUSIMY NAJSPIERW OPISAĆ
 ANGIOLISTYJNY PROCES „ZSTĄPIENIA”. W TYM CELU PRZYPOMNIJMY
 SCHEMAT REKONSTRUKCJI WIĄZKI P_F Z JEJ DANYCH LOKALNYCH
 q_i (PATRZ: DOWÓD **Tw. 8.**, **Sk. 93.-97.**): OTÓŻ WYBIEDESZY
 OD ROZMIARU $\bigsqcup_{i \in I} O_i \times U(1)$, NAD KAŻDYM Z PUNKTÓW $x \in O_i$
 DODAJEMY WŁÓŻANIE WŁÓKEN $U(1)$ POCODZAJĄCYCH
 Z OBU DOSTĘPNYCH NAD NIMI LOKALNYCH MODELI :
 $O_i \cap O_{ij} \times U(1) \quad ; \quad O_j \cap O_{ij} \times U(1)$

Pozyc użyć dwi dyferencjacji ($\Theta_{ij}^{(k)} \equiv \Theta_k \wedge \Theta_j, k \in \{i, j\}$)

$$\tilde{g}_{ij} : \Theta_{ij}^{(i)} \times U(1) \xrightarrow{\cong} \Theta_{ij}^{(j)} \times U(1), (x, z) \mapsto (x, g_{ij}(x) \cdot z),$$

Por.: **Str. 86**. To utożsamienie rodziny się do sytuacji (pamiętajmy: wektory styczne to klasy współstyczności ścieżek!)
według schematu

$$T\tilde{g}_{ij} : T(\Theta_{ij}^{(i)} \times U(1)) \xrightarrow{\cong} T(\Theta_{ij}^{(j)} \times U(1)),$$

co pozwala na określenie naturalnego warianku
zastąpienia rodziny 1-form $\Theta. \equiv \{\Theta_i \in \Omega^1(\Theta_i \times U(1))\}_{i \in I}$ na P_F :
otoż $\Theta.$ z rodziną jednolitym 1-formą na P_F wtedy
i tylko wtedy, gdy $\Theta_i|_{T(\Theta_j^{(i)} \times U(1))} \circ T\tilde{g}_{ij} \equiv \Theta_j|_{T(\Theta_i^{(j)} \times U(1))}$.

Tj. gdy Θ_i oblicza się na wektorze $w \in T_{\tilde{g}_{ij}(x,z)}(\Theta_i^{(i)} \times U(1))$ użyciemianym $v \in T_{(x,z)}(\Theta_j^{(j)} \times U(1))$ według $\tilde{g}_{ij}$ dostadnie
 Taka stało, jak Θ_j oblicza się na wyjściowym wektorze v .
 Warunek powyższy przepisuje się w sposób zwarty jako

$$\underline{\Theta_i} \upharpoonright_{\Theta_j \times U(1)} = \tilde{g}_{ij}^* \Theta_i.$$

Wprowadzimy współrzędną globalną z na włóknie $U(1)$

i zdefiniujemy $\underline{\Theta_i}(x, z) := i z^{-1} dz + \underline{A_i}(x), (x, z) \in \Theta_j \times U(1)$.

Obliczamy bez trudu $(\tilde{g}_{ij}^* \Theta_i)(x, z) \equiv i \frac{d(g_{ij}(x) \cdot z)}{g_{ij}(x) \cdot z} + \underline{A_i}(x)$

$$= i \frac{dz}{z} + i d \log g_{ij}(x) + \underline{A_i}(x) = i \frac{dz}{z} + \underline{A_j}(x) \equiv \underline{\Theta_j}(x, z).$$

WNIOSEK: $\exists A \in \Omega^1(P_F) : [\tau_i]^{-1*} A = \theta_i, i \in I.$

1-FORMA TA MA NASTĘPUJĄCE WŁASNOŚCI STRUKTURALNE:

* TRYWIALIZACJA F (POLA FARADAYA) W KOHOMOLOGII P_F :

$$\begin{aligned} dA|_{\pi_F^{-1}(O_i)} &\equiv d[\tau_i]^* \theta_i = [\tau_i]^* d\theta_i = [\tau_i]^* d\pi_i^* A_i = \frac{q}{h} [\tau_i]^* \pi_i^* F|_{O_i} \\ &\equiv \frac{q}{h} (\pi_i \circ [\tau_i])^* F|_{O_i} \equiv \frac{q}{h} \pi_F^* F|_{O_i} \equiv \pi_F^* \left(\frac{q}{h} F \right) |_{\pi_F^{-1}(O_i)} \end{aligned}$$

czyli $dA = \pi_F^* \left(\frac{q}{h} F \right)$

** $U(1)$ -EKWIVARIANTNOŚĆ $A : TP_F \rightarrow \mathbb{R}$ WZGLĘDEM
 DZIAŁAŃ $Tr : U(1) \rightarrow \text{Diff}(TP_F)$ (INDUKOWANEGO PRZEZ $\tau : U(1) \rightarrow \text{Diff}(P_F)$,
 O LOKALNEJ PREZENTACJI $\phi : U(1) \rightarrow \text{Diff}(U(1)), u \mapsto (f) \cdot u$) I TRYWIALNEGO NA $\mathbb{R}$:

$$[\tau_i]^{-1*} (A \circ Tr_u) \equiv A \circ Tr_u \circ T[\tau_i]^{-1} = A \circ T(\tau_u \circ [\tau_i]^{-1})$$

$$= \mathcal{A} \circ T([\tau_i]^{-1} \circ (\text{id}_{\Theta_i} \times p_u)) \equiv ([\tau_i]^{-1*} \mathcal{A}) \circ (\text{id}_{T\Theta_i} \times Tp_u)$$

$$\equiv i \frac{d(p_u \cdot z)}{p_u \cdot z} + \underline{A}_i(x) = i \frac{dz}{z} + \underline{A}_i(x) \equiv [\tau_i]^{-1*} \mathcal{A}, \text{ czyli}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \circ T\Gamma_u = \mathcal{A}}$$

*** A w uogólniony sposób zadaje zbyt $TP_F \rightarrow VP_F$,

gdzie $VP_F \hookrightarrow TP_F$ jest (gładką) sumą rozłożoną stykającą

do wtórnika, $VP_F \equiv \bigsqcup_{x \in M} T(P_{F_x})$, $P_{F_x} \simeq U(1)$. Istotnie,

rozważmy globalny generator $-i\mathbb{Z} \partial_z =: \mathcal{K}$ przestrzeni cięć $\Gamma(TU(1))$ wiązki stykającej nad wtórnikiem typowym $\mathcal{P}_F$ i zdefiniujmy

$$\textcircled{4}_i := \theta_i \otimes \mathcal{K} : T(\Theta_i \times U(1)) \equiv p_1^* T\Theta_i \oplus p_2^* TU(1) \rightarrow p_2^* TU(1),$$

CYLI WPŁOŚĆ:

$$\textcircled{K}_i(xz) = i \frac{dz}{z} \otimes (-iz \partial_z) + \underline{A}_i(x) \otimes K(z)$$

$$= dz \otimes \partial_z + \underline{A}_i(x) \otimes K(z)$$

$$= \text{id}_{T_z U(1)} + \underline{A}_i(x) \otimes K(z).$$

LOKALNE GŁADKIE POLA OPERATORÓW RZUTOWYCH $\textcircled{K}_i$:
ZSTĘPUJĄ DO TP_F Z DOKŁADNIĘ TEJ SAMEJ PRZYCZYNNY,
KTÓRA STOI ZA ZSTĄPIENIEM θ_i . MAMY PRZETO

$$\underline{\textcircled{K}} \in \Gamma(TP_F \otimes VP_F), \quad (\pi_2 \circ T[c_i] \circ \textcircled{K} \circ T[c_i])' = \textcircled{K}_i$$

RZUTY TE WYZNAWIAJĄ Dopełnienie proste $\ker \textcircled{K}_i$ podwiazki
 $T[c_i](VP_F|_{\pi_F^{-1}(O_i)}) \cong O_i \times T U(1)$ w $T[c_i](TP_F|_{\pi_F^{-1}(O_i)}) \cong T(O_i \times U(1)),$

PRZY CZYM $\forall (x,z) \in \mathcal{O}_i \times U(1) : \text{Ker } \Theta_i \simeq T_x M$, A KONKRETNIE:

$$\left(\underbrace{\int \kappa(z)}_{h(x,z)} + \underbrace{\nu^\mu \partial_\mu(x)}_{\equiv \nu(x)} \right) \in \text{Ker } \Theta_i(x,z) \quad \left(\text{DIA } \kappa = (x^\mu) : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^{xD} \right)$$

MAPA LOUAINA
NA OTOCZENIU x

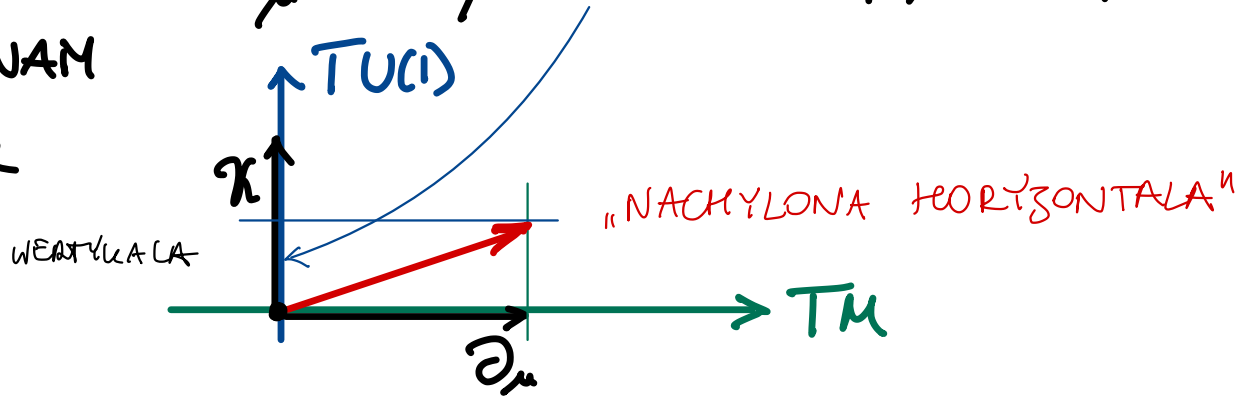
$D = \dim H$

$$\int = -\nu \lrcorner \underline{A}_i(x), \text{ czyli } h(x,z) = \nu(x) - \nu \lrcorner \underline{A}_i(x) \circ \kappa(z).$$

LOUAINA BĄŻA CIĘŻ DOPEWNIENIA TO ŻATEM

$$\partial_\mu - \underline{A}_{i\mu}(x) \circ \kappa(z), \quad \mu \in \overline{1, D},$$

CO DAJE NAM
OBRAZĘ



OSTATNI, NAJMNIEJ ODCYWISTY PUNKT LISTY OKAZUJE SIĘ MIEĆ
NADER ISTOTNE ZASTOSOWANIE. NIM JEDNAK JĘ USTALIMY,
ZATRZYMUJMY SIĘ PRZY DEFINICJI POLA K ...

OBSERWACJA: WARTOŚCI K SPEŁNIAYĄ TOŻSAMOŚCI

$$K(z) \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{-it} \cdot z),$$

PRZY CZYM ŚCIEŻKA $\gamma_z : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-it} \cdot z \in U(1)$ JEST
ORBITĄ (LEWEGO) DZIAŁANIA REGULARNEGO $\ell : U(1) \rightarrow \text{Diff}(U(1))$
 $u \mapsto u \cdot (\cdot)$
($U(1)$ NA SOBIE). Z TAKIM POLEM WEKTOROWYM SPOTKALIMY SIĘ
ONEGDY - JEST TO POLE FUNDAMENTALNE DZIAŁANIA ℓ
(PATRZ : Sc. 14.2.). ZAUWAŻMY W SZCZEGÓLNOŚCI PROSTĄ

REGULUS TRANSFORMATIONS:

$$\begin{aligned} T_z l_u(K(z)) &\equiv T_z l_u \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{-it} \cdot z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (l_u(e^{-it} \cdot z)) \\ &\equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (u e^{-it} z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((u e^{-it} u^{-1}) \cdot uz) \\ &\stackrel{\text{przemienność}}{=} U(1) = K(uz) \quad (\text{widać prosty schemat uogólnienia na przypadku grupy nieprzemiennej}) \end{aligned}$$

MOŻEMY JUŻ TERAZ POWRÓCIĆ DO DISKUSJI ZASTOSOWAŃ RZUTU (4).
TYTUŁEM PRZYGOTOWANIA GRUNTU DO KONKREZJĘ PRZYPOMNIJMY,
ŻE WEERTYKALNE AUTOMORFIZMY WIĄZKI WŁÓKNISTEJ SĄ LOKALNIE
MODELOWANE NA RODZINACH AUTOMORFIZMÓW WŁÓKNA TYPOWEGO
GRADU INDUKSOWANYCH PRZĘZ PUNKTY W BAZIE (PATRZ: Def. B.).

JEST WOBEC TEGO NATURALNYM OJĘCIOWANIEM WOBEC RÓŻNICZKOWANIA
CIĘC WIĄZKI, IŻBY POD DZIAŁANIEM TAKIEGO AUTOMORFIZMU
WERTYKALNEGO POCODNA CIĘCIA PODLEGAŁA TRANSFORMACJI
INDUKOWANEJ (STYLIZACJOWEJ) LOKALNIE MODELOWANEJ NA RÓŻNIE
POCODYNE ODPOWIEDNIE AUTOMORFIZMÓW WŁÓKA TYPOWEGO.
(TAKIE JĘZ ZAKŁADANIE JEST NIE TYLKO NATURALNE, ALE
WRAZCZ POŻĄDANE Z PUNKTU WIDZENIA PEWNYCH FIZYKALNYCH
ZASTOSOWAŃ WIĄZKI WŁÓKNISTYCH - NP. W TEORII PŁA Z SYMETRIĄ
CEKOWANIA (PATRZ: WYKŁAD MONOGRAFICZNY "DUALITY, DESCENT,
& DEFECTS [...]" AUTORA NINIEJSZYCH NOTATEK).) O TYM,
JĘ ZWYCZAJNA POCODNA $\Gamma(E) \ni \phi \mapsto T\phi$ NIE SPEŁNIA
TEGO OJĘCIOWANIA (W OGÓLNOŚCI), NAJLEPIEJ MOŻNA

ŚŁY PRZEKONAĆ W OBRAZIE TRYWIALIZACJI LOKALNEJ $\tau_i: \pi_E^{-1}(O_i) \xrightarrow{\sim} O_i \times F$,
W KTOREJ

$$\tau_i \circ \phi = (\text{id}_{O_i}, \phi_i), \quad \phi_i \in C^\infty(O_i, F)$$

ROZWAŻMY AUTOMORFIZM $E \xrightarrow{\bar{\Phi}} E$ O PREZENTACJI LOKALNEJ
WIĄZUJĄCY WŁÓKNISTOŚĆ $\pi_E \downarrow$ $\downarrow \pi_E$ $(\tau_i \circ \bar{\Phi} \circ \tau_i^{-1})(x, f) = (x, h_i(x)(f))$
 (E, B, F, π_E) $B \xlongequal{\text{id}_B} B$ $h_i: O_i \rightarrow \text{Aut}(F)$

POD JEJ DZIAŁANIEM

$\Gamma(E) \ni \phi \mapsto \bar{\Phi} \circ \phi \equiv \phi^{\bar{\Phi}} \in \Gamma(E)$ (WSZAK $\pi_E \circ \bar{\Phi} \circ \phi = \pi_E \circ \phi$),

CZYLI LOKALNIE: $\phi_i \mapsto h_i(\cdot)(\phi_i(\cdot)) \equiv \phi_i^h(\cdot)$

TO WŁAŚNIE ZALEŻNOŚĆ h_i OD PUNKTU W BAZIE PRZESADZA
O NIEPOZĄDANYM CHARAKTERZE TRANSFORMACYJNYM $T\bar{\Phi}$:

RÓŻNICZKOWANIE $h_i(\cdot)$ W $h_i(\cdot) (\phi_i(\cdot))$ WZGLĘDEM ARGUMENTU
 $x \in B$ WPROWADZA POPRAWKĘ DO POŻĄDANEGO

$$T_{\phi_i(\cdot)} h_i \circ T \phi_i.$$

W NASZYM KONKRETNYM PRZYPADKU $(E, B, F, \pi_E) = (P_F, M, U(1), \pi_F)$
 OTRZYMUJEMY — DLA $\phi \in \Gamma(P_F)$, $[c_i] \circ \phi = (\text{id}_{\Theta_i}, \phi_i)$, $\phi_i \in C^0(\Theta_i, U(1))$
 i $\Phi : E \rightarrow E$, $[c_i] \circ \Phi \circ [c_i]^{-1}(x, u) = (x, h_i(x) \cdot u)$, $h_i : \Theta_i \rightarrow U(1)$
 (ŁATWO WIDAC, ŻE TO JEDYNE DYFEOMORFIZMY WŁÓKNA TYPOWEGO
 EKWIWALANTNE WZGLĘDEM DZIAŁANIA GRUPY $U(1)$, O KÓRYCH
 BYŁA MOWA NA **M.275.**) — FORMUŁE

$$T_x (h_i(\cdot) \cdot \phi_i(\cdot)) = \underbrace{T_{\phi_i(x)} h_i}_{\text{POŻĄDANE}} \circ \underbrace{T_x \phi_i}_{\text{NIE POŻĄDANE!}} + \left(h_i(\cdot)^{-1} T_x h_i(\cdot) \right) \cdot h_i(\cdot) \cdot \phi_i(\cdot).$$

← ZA CENILISZ ZROZUMIEMU
 JEST TEGO ZAPISU...

BIORĄC POD UWAGĘ POWYŻSZE W POTĘŻNIU Z FORMUŁY ~~2~~ ZE §2.266.,
ROZWAŻMY ZAMIAST $T\phi_i$ WYRAŻENIE

$$\mathcal{D}^A \phi_i := T.\phi_i + \underline{A}_i(\cdot) \otimes \mathcal{K}(\phi_i(\cdot)) : TM|_{\Theta_i} \rightarrow TU(1)|_{\phi_i(\Theta_i)},$$

$$\text{GDZIE } (\underline{A}_i(\cdot) \otimes \mathcal{K}(\phi_i(\cdot)))(\partial_\mu) \equiv \underline{A}_{i,\mu}(\cdot) \triangleright \mathcal{K}(\phi_i(\cdot)).$$

STWIERDZAMY:

$$\mathcal{D}^{A_i^h} \phi_i^h \equiv T.\phi_i^h + \underline{A}_i^h(\cdot) \otimes \mathcal{K}(\phi_i^h(\cdot)) \quad \swarrow \text{NB: } \begin{aligned} h_i^{-1} dh_i(\partial_\mu) &= h_i^{-1} \partial_\mu h_i \\ h_i^{-1} T.h_i(\partial_\mu) &= h_i^{-1} \partial_\mu h_i \partial_z \end{aligned}$$

$$= T_{\phi_i} \ell_{h_i} \circ T.\phi_i + h_i \cdot \phi_i \triangleright h_i^{-1} T.h_i + \underline{A}_i \otimes \mathcal{K}(h_i \cdot \phi_i) - i h_i^{-1} dh_i \otimes \mathcal{K}(h_i \cdot \phi_i)$$

$$\equiv T_{\phi_i} \ell_{h_i} \circ T.\phi_i + \underline{A}_i \otimes T_{\phi_i} \ell_{h_i}(\mathcal{K}(\phi_i)) \quad (\text{§2.280.})$$

$$+ i h_i^{-1} dh_i \otimes (i h_i \cdot \phi_i \partial_z) - i h_i^{-1} dh_i \otimes \mathcal{K}(h_i \cdot \phi_i)$$

$$= T_{\phi_i} l_{h_i} \circ T. \phi_i + \underline{A}_i \otimes T_{\phi_i} l_{h_i} (\mathcal{K}(\phi_i)) \equiv T_{\phi_i} l_{h_i} \circ D^{\underline{A}_i} \phi_i, \quad (**)$$

co jest właśnie zakowaniem porządkowym!

Przy tym wyrażenie lokalne $D^{\underline{A}_i} \phi_i$ ma prosta interpretacja:

$$D^{\underline{A}_i} \phi_i \equiv \textcircled{K}_i \circ (\text{id}_{TM}, T. \phi_i) \quad (\text{NB: } d\phi_i \otimes \partial_z \equiv T. \phi_i)$$

$$\equiv (\pi_2 \circ) (T[\tau_i] \circ \textcircled{K} \circ T[\tau_i]^{-1}) \circ (T[\tau_i] \circ T\phi)$$

$$= (\pi_2 \circ) T[\tau_i] \circ (\textcircled{K} \circ T\phi). \quad (***)$$

Widzimy zatem, że $D^{\underline{A}_i} \phi_i$ jest lokalną reprezentacją obiektu globalnego: zwektorykalizowanej po pochodnej

$$\underline{\nabla}^{\textcircled{K}}: \Gamma(P) \ni \phi \longmapsto \textcircled{K} \circ T\phi \in \Gamma(TM \otimes V_P|_{\phi(M)})$$

W SZCZEGÓLNOŚCI ZACHODZI RELACJA

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^A_i \phi: \Gamma_{\mathcal{O}_i} &= (m_2 \circ) T[\tau_i] \circ (\kappa \circ) T\phi|_{\Gamma_{\mathcal{O}_i}} = (m_2 \circ) T([\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1}) \circ T[\tau_j] \circ (\kappa \circ) T\phi|_{\Gamma_{\mathcal{O}_j}} \\ &= T_{\dagger_i} \ell_{g_{ij}} \circ (m_2 \circ) T[\tau_j] \circ (\kappa \circ) T\phi|_{\Gamma_{\mathcal{O}_j}} \equiv T_{\dagger_i} \ell_{g_{ij}} \circ \mathcal{D}^A_j \phi|_{\Gamma_{\mathcal{O}_j}} \end{aligned}$$

NB: PROSTE PRAWO TRANSFORMACYJNE ****** IMPLIKUJĘ - W POŁĄCZENIU
Z ******* - STRUKTURALNĄ RELACJĘ: $\boxed{(\kappa)^{\mathfrak{F}} = T\mathfrak{F} \circ (\kappa) \circ T\mathfrak{F}^{-1}}$

POMIĘDZY RZUTEM (κ) O DANYCH LOKALNYCH $\underline{A}_i$ I RZUTEM $(\kappa)^{\mathfrak{F}}$
O DANYCH LOKALNYCH $\underline{A}_i^h$.

NA ZAWIĄZANIE NASZEGO FIZYKALNIE UMOTEWOWANEGO STUDIUM
PRZYPADKU USTANOWI ZWIĄZEK MIĘDZY RZUTAMI (κ) I TENSOREM
FARADAYA F , KTÓRY POZWOLI NAM NA ZGRABNĄ REINTERPRETACJĘ
GEOMETRYCZNĄ F , PODDAJĄCĄ SIĘ NATURALNEJ ABSTRAKCJI

ZAŁOŻENIE, JE DLA DOWOLNYCH PÓŁ WEKTOROWYCH ZNAJ LOKALNEGO
MODELU $\Theta_i \times U(1)$ WIĄZKI DIRACA P_F ,

$$\mathcal{X}_a := \xi_a + V_a \in \Gamma(TM|_{\Theta_i}) \oplus \Gamma(TU(1)), \quad a \in \{1, 2\},$$

KTÓRE ROZPINAJĄ $T(\Theta_i \times U(1)) \cong T$, ZAKŁODŹI RÓWNOŚĆ

$$\begin{aligned} & [id_T - \pi_i, id_T - \pi_i]_{\Gamma(T)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \equiv [id_{TM} - \Delta_i \otimes \mathcal{K}, id_{TM} - \Delta_i \otimes \mathcal{K}]_{\Gamma(T)}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \\ &= [\xi_1 - (\xi_1 \lrcorner \Delta_i) \triangleright \mathcal{K}, \xi_2 - (\xi_2 \lrcorner \Delta_i) \triangleright \mathcal{K}]_{\Gamma(T)} \quad \leftarrow \mathcal{K}(\xi_a \lrcorner \Delta_i) = 0 \\ &= [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} + (\xi_1 \lrcorner \Delta_i) \cdot (\xi_2 \lrcorner \Delta_i) \triangleright [\mathcal{K}, \mathcal{K}]_{\Gamma(TU(1))} \quad \leftarrow [\xi_a, \mathcal{K}] = 0 \\ & \quad - \xi_1(\xi_2 \lrcorner \Delta_i) \triangleright \mathcal{K} + \xi_2(\xi_1 \lrcorner \Delta_i) \triangleright \mathcal{K} \quad \leftarrow \text{LEIBNIZ} \\ &= [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} + \xi_2(\xi_1 \lrcorner \Delta_i) \triangleright \mathcal{K} - \xi_1(\xi_2 \lrcorner \Delta_i) \triangleright \mathcal{K}. \end{aligned}$$

A WOBEC TEGO

$$\mathbb{M}_i \circ [id_T - \mathbb{M}_i, id_T - \mathbb{M}_i]_{\Gamma(T)} (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) = \left(\xi_2 (\xi_1 \lrcorner \Delta_i) - \xi_1 (\xi_2 \lrcorner \Delta_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i \right) \triangleright \mathcal{K}.$$

PRZY TYM

$$\begin{aligned} & \xi_2 (\xi_1 \lrcorner \Delta_i) - \xi_1 (\xi_2 \lrcorner \Delta_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i \\ & \equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \Delta_i) - \xi_1 \lrcorner d(\xi_2 \lrcorner \Delta_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i \\ & \equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \Delta_i) - \mathcal{L}_{\xi_1} (\xi_2 \lrcorner \Delta_i) + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i \\ & \equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \Delta_i) - \mathcal{L}_{\xi_1} (\xi_2) \lrcorner \Delta_i - \xi_2 \lrcorner \mathcal{L}_{\xi_1} \Delta_i + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i \\ & \equiv \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \Delta_i) - \mathcal{L}_{\xi_1} (\xi_2) \lrcorner \Delta_i - \xi_2 \lrcorner d(\xi_1 \lrcorner \Delta_i) - \xi_2 \lrcorner \xi_1 \lrcorner d\Delta_i + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i \\ & \equiv -[\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i - \xi_2 \lrcorner \xi_1 \lrcorner \frac{g}{\hbar} F + [\xi_1, \xi_2]_{\Gamma(TM)} \lrcorner \Delta_i \\ & \equiv -\xi_2 \lrcorner \xi_1 \lrcorner \frac{g}{\hbar} F \end{aligned}$$

OSTATECZNE ZATEM

$$\textcircled{n}_i \circ [\text{id}_T - \textcircled{n}_i, \text{id}_T - \textcircled{n}_i]_{\Gamma(T)} = -\frac{g}{\hbar} F \circ (pr_2 \otimes pr_2) \equiv -\frac{g}{\hbar} pr_2^* F,$$

CO PO UWZGLĘDNIENIU **Cor. 2.** GLOBALIZUJE SIĘ W POSTACI

$$\textcircled{n} \circ [\text{id}_{TP_F} - \textcircled{n}, \text{id}_{TP_F} - \textcircled{n}]_{\Gamma(TP_F)} = -\frac{g}{\hbar} \pi_{P_F}^* F.$$

TYM SAMYM TENSOR FARADAYA ZYSKUJE INTERPRETACJĘ ILOŚCIOWEJ
MIARY OBSTRUKCJI WZGLĘDEM INWOLUTYWNOŚCI (WIĘC - W ŚWIELE
TW. FROBENIUSA, KTÓREGO TUTAJ NIE OMAWIAMY - CAŁKOWALNOŚCI)
DYSTRYBUCJI HORYZONTALNEJ $HP_F : F \neq 0$ JEST RÓWNOZNACZNE
Z ISTNIENIEM PÓŁ WEKTOROWYCH POZIOMYCH, KTÓRYCH KOMUTATORY
NAYĄ SKŁADOWĄ PIONOWĄ.