ALGEBRA II R W CZASACH ZARAZY
(27. MARCA 2020 R.)

Jordanowska postać normalna endomorfizmu

Naszym celem jest poznanie podstawowych technik redukcji (macierzy) endomorfizmu do postaci jordanowskiej poprzez wyznaczenie stosownej bazy (jordanowskiej) i dyskusja elementarnych zastosowań wyniku. Zaczniemy od ustalenia pojęć „podstawowych".

Definicja 1. Niechaj V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech χ będzie endomorfizmem V o widmie $\operatorname{Sp}\chi \ni \lambda$. Oznaczmy[1]

$$\chi_\lambda := \chi - \lambda \rhd \mathrm{id}_V \,.$$

χ-seria stowarzyszona z λ to rodzina wektorów $\{v_n\}_{n\in\overline{0,N-1}} \subset V$, $N \in \mathbb{N}^\times$ określonych wzorami ($\chi_\lambda^0 \equiv \mathrm{id}_V$)

$$v_n := \chi_\lambda^n(v_0)$$

i spełniających dodatkowy warunek

$$\chi_\lambda(v_{N-1}) = 0_V \,.$$

Zachodzi

Twierdzenie 1. Niechaj V będzie przestrzenią wektorową wymiaru $\dim_{\mathbb{K}} V =: N < \infty$ nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech χ będzie endomorfizmem V o widmie $\operatorname{Sp}\chi = \{\lambda_i\}_{i\in\overline{1,r}}$, $r \in \mathbb{N}^\times$, przy czym zakładamy, że skalary λ_i są parami różne. Jeśli wielomian charakterystyczny χ jest rozkładalny w pierścieniu $\mathbb{K}_\bullet[\cdot]$ na czynniki stopnia 1, to istnieje baza B_{J} przestrzeni V będąca konkatenacją baz przestrzeni pierwiastkowych $V(\lambda_i;\chi)$ złożonych z χ-serii (stowarzyszonych z odnośnymi wartościami własnymi λ_i), względem której macierz endomorfizmu przyjmuje postać blokowo diagonalną

$$[\chi]_{B_{\mathrm{J}}}^{B_{\mathrm{J}}} = \bigoplus_{i=1}^{r} J\big(\lambda_i, \vec{\varepsilon}_i; \dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_i;\chi)\big)$$

zapisaną, dla pewnych $\vec{\varepsilon}_i \in \{0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}^{\times(\dim_{\mathbb{K}} V(\lambda_i;\chi)-1)}$, przy użyciu (**standardowych**[2]) **klatek Jordana**

$$J(\lambda, \vec{\varepsilon}; N) := \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & \ldots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & \lambda & \varepsilon_2 & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \lambda & \varepsilon_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0_{\mathbb{K}} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon_{N-1} \\ 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \ldots & \ldots & 0_{\mathbb{K}} & 0_{\mathbb{K}} & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}(N)\,.$$

Baza ta nosi miano **bazy jordanowskiej endomorfizmu** χ.

[1] Tutaj i wszędzie indziej w niniejszej notatce $\rhd$ oznacza (naturalne) działanie $\mathbb{K}$ na przestrzeni wektorowej, do której należy obiekt z prawej strony symbolu.

[2] W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wprowadzamy osobne pojęcie rzeczywistej klatki Jordana – patrz: Zad. 2

Dowód: Przedstawimy wyjątkowo prosty i przejrzysty dowód konstrukcyjny z 1986 r. pochodzący od fińskiego matematyka H. Väliaho, stanowiący zarazem gotowy algorytm rachunkowy do zastosowania w okolicznościach generycznych. Ustalmy (dowolnie) $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\chi$ i rozważmy nierosnący ciąg podprzestrzeni $\mathrm{Im}\,\chi_\lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$V \equiv \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^0 \supset \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^1 \supset \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^2 \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^n \supset \cdots .$$

Jak wynika wprost z jego konstrukcji, ciąg ten jest stały począwszy od pewnego indeksu $N \in \mathbb{N}$, czyli

$$\exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ :\ \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^n = \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^N \subsetneq \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^{N-1} . \tag{1}$$

Skoro zaś $\chi_\lambda(\mathrm{Im}\,\chi_\lambda^N) = \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^N$, to

$$\mathrm{Im}\,\chi_\lambda^N \cap \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda = \{0_V\} , \tag{2}$$

gdy tymczasem

$$\mathrm{Im}\,\chi_\lambda^{N-1} \cap \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda \neq \{0_V\} .$$

Zdefiniujmy podprzestrzenie

$$S_\lambda^m := \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^{m-1} \cap \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda , \quad m \in \mathbb{N}^\times$$

i oznaczmy

$$d_m^0 := \dim_{\mathbb{K}} S_\lambda^m .$$

Przestrzenie S_λ^m spełniają oczywistą relację

$$\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda \equiv S_\lambda^1 \supset S_\lambda^2 \supset \cdots \supset S_\lambda^N \neq \{0_V\} ,$$

a ponadto

$$\forall_{k\in\mathbb{N}^\times}\ :\ S_\lambda^{N+k} = \{0_V\} .$$

Wybierzmy w S_λ^N *dowolną* bazę $B^1 := \{v_{i_1}^{(1|1)}\}_{i_1\in\overline{1,d_N^0}}$. Jako że $v_{i_1}^{(1|1)} \in \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^{N-1}$,

$$\forall_{i_1\in\overline{1,d_N^0}}\ \exists_{v_{i_1}^{(1|N)}\in V}\ :\ v_{i_1}^{(1|1)} = \chi_\lambda^{N-1}(v_{i_1}^{(1|N)}) .$$

Określmy, dla dowolnego $i_1 \in \overline{1,d_N^0}$, wektory

$$v_{i_1}^{(1|j_1)} := \chi_\lambda^{N-j_1}(v_{i_1}^{(1|N)}) , \quad j_1 \in \overline{1,N} .$$

Następnie uzupełnijmy (znów *dowolnie*) zbiór $B^1 \subset S_\lambda^N$ do bazy przestrzeni $S_\lambda^{N-1} \supset S_\lambda^N$, oznaczając zbiór dodatkowych wektorów jako $B^2 := \{v_{i_2}^{(2|1)}\}_{i_2\in\overline{1,d_N^1}}$, gdzie $d_N^1 := d_{N-1}^0 - d_N^0$. Tym razem $v_{i_2}^{(2|1)} \in \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^{N-2}$, zatem

$$\forall_{i_2\in\overline{1,d_N^1}}\ \exists_{v_{i_2}^{(2|N-1)}\in V}\ :\ v_{i_2}^{(2|1)} = \chi_\lambda^{N-2}(v_{i_2}^{(2|N-1)}) .$$

Określmy teraz, dla dowolnego $i_2 \in \overline{1,d_N^1}$, wektory

$$v_{i_2}^{(2|j_2)} := \chi_\lambda^{N-1-j_2}(v_{i_2}^{(2|N-1)}) , \quad j_2 \in \overline{1,N-1} .$$

W następnej kolejności uzupełniamy (wciąż *dowolnie*) zbiór $B^1 \cup B^2 \subset S_\lambda^{N-1}$ do bazy przestrzeni $S_\lambda^{N-2} \supset S_\lambda^{N-1}$ dodając wektory $B^3 := \{v_{i_3}^{(3|1)}\}_{i_3\in\overline{1,d_N^2}}$, gdzie $d_N^2 := d_{N-2}^0 - d_{N-1}^0$. Rozumując jak poprzednio, stwierdzamy, że

$$\forall_{i_3\in\overline{1,d_N^2}}\ \exists_{v_{i_3}^{(3|N-2)}\in V}\ :\ v_{i_3}^{(3|1)} = \chi_\lambda^{N-3}(v_{i_3}^{(3|N-2)}) ,$$

i tym sposobem otrzymujemy rodzinę wektorów

$$v_{i_3}^{(3|j_3)} := \chi_\lambda^{N-2-j_3}(v_{i_3}^{(3|N-2)}) , \quad j_3 \in \overline{1,N-2} .$$

Po N iteracjach opisanej tu procedury otrzymujemy ostatecznie zbiór wektorów $B^N := \{v^{(N|1)}_{i_N}\}_{i_N \in \overline{1, d^{N-1}_N}}$, które uzupełniają zbiór $B^1 \cup B^2 \cup \cdots \cup B^{N-1}$ do bazy $S^1_\lambda \equiv \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda$. Pokażemy, że rodzina χ-serii $B := \{v^{(n|j_n)}_{i_n}\}_{\substack{i_n \in \overline{1, d^{n-1}_N} \\ j_n \in \overline{1, N+1-n} \\ n \in \overline{1, N}}}$, zobrazowana na poniższym diagramie poglądowym

$$\begin{tikzcd}
v^{(1|N)}_{i_1} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & & & & & \\
v^{(1|N-1)}_{i_1} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(2|N-1)}_{i_2} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & & & & \\
v^{(1|N-2)}_{i_1} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(2|N-2)}_{i_2} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(3|N-2)}_{i_3} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & & & \\
v^{(1|N-3)}_{i_1} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(2|N-3)}_{i_2} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(3|N-3)}_{i_3} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & \ddots & & \\
\vdots \arrow[d, "\chi_\lambda"] & \vdots \arrow[d, "\chi_\lambda"] & \vdots \arrow[d, "\chi_\lambda"] & \cdots & v^{(N-1|2)}_{i_{N-1}} \arrow[d, "\chi_\lambda"] & \\
v^{(1|1)}_{i_1} \arrow[r, "\cup", ": S^N_\lambda \nearrow S^{N-1}_\lambda"'] \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(2|1)}_{i_2} \arrow[r, "\cup", ": S^{N-1}_\lambda \nearrow S^{N-2}_\lambda"'] \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(3|1)}_{i_3} \arrow[r, "\cup", ": S^{N-2}_\lambda \nearrow S^{N-3}_\lambda"'] \arrow[d, "\chi_\lambda"] & \cdots \arrow[r, "\cup", ": S^3_\lambda \nearrow S^2_\lambda"'] & v^{(N-1|1)}_{i_{N-1}} \arrow[r, "\cup", ": S^2_\lambda \nearrow S^1_\lambda"'] \arrow[d, "\chi_\lambda"] & v^{(N|1)}_{i_N} \arrow[d, "\chi_\lambda"] \\
0_V & 0_V & 0_V & \cdots & 0_V & 0_V
\end{tikzcd},$$

jest bazą przestrzeni $\mathrm{Ker}\,\chi^N_\lambda$. W tym celu sprawdzamy najpierw, że B jest zbiorem liniowo niezależnym. Rozważmy zatem rodzinę skalarów $M := \{\mu^{(n|j_n)}_{i_n}\}_{\substack{i_n \in \overline{1, d^{n-1}_N} \\ j_n \in \overline{1, N+1-n} \\ n \in \overline{1, N}}} \subset \mathbb{K}$, która zadaje rozkład wektora zerowego

$$0_V = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i_n=1}^{d^{n-1}_N} \sum_{j_n=1}^{N+1-n} \mu^{(n|j_n)}_{i_n} \rhd v^{(n|j_n)}_{i_n} .$$

Na podstawie prostego rachunku (patrz: powyższy diagram)

$$0_V = \chi^{N-1}_\lambda(0_V) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i_n=1}^{d^{n-1}_N} \sum_{j_n=1}^{N+1-n} \mu^{(n|j_n)}_{i_n} \rhd \chi^{N-1}_\lambda(v^{(n|j_n)}_{i_n}) = \sum_{i_1=1}^{d^0_N} \mu^{(1|N)}_{i_1} \rhd v^{(1|1)}_{i_1}$$

i biorąc pod uwagę liniową niezależność B^1, wnioskujemy, że

$$\forall_{i_1 \in \overline{1, d^0_N}} \ : \ \mu^{(1|N)}_{i_1} = 0_{\mathbb{K}} .$$

Obliczywszy następnie

$$0_V \quad = \quad \chi^{N-2}_\lambda(0_V) = \sum_{i_1=1}^{d^0_N} \mu^{(1|N)}_{i_1} \rhd v^{(1|2)}_{i_1} +_V \sum_{i_1=1}^{d^0_N} \mu^{(1|N-1)}_{i_1} \rhd v^{(1|1)}_{i_1} +_V \sum_{i_2=1}^{d^1_N} \mu^{(2|N-1)}_{i_2} \rhd v^{(2|1)}_{i_2}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{d_N^0} \mu_{i_1}^{(1|N-1)} \rhd v_{i_1}^{(1|1)} +_V \sum_{i_2=1}^{d_N^1} \mu_{i_2}^{(2|N-1)} \rhd v_{i_2}^{(2|1)} ,$$

stwierdzamy, tym razem korzystając z liniowej niezależności $B^1 \cup B^2$, że

$$\forall_{i_1 \in \overline{1, d_N^0}} \ : \ \mu_{i_1}^{(1|N-1)} = 0_{\mathbb{K}} \qquad \wedge \qquad \forall_{i_2 \in \overline{1, d_N^1}} \ : \ \mu_{i_2}^{(2|N-1)} = 0_{\mathbb{K}} .$$

Powtarzając to rozumowanie $N-1$ razy, wykazujemy trywialność wszystkich elementów rodziny M i tym samym – liniową niezależność B. Pozostaje przekonać się, że $|B| = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda^N$. Na mocy definicji liczb d_N^{n-1}, wyprowadzamy

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{n=1}^{N} (N+1-n) d_N^{n-1} \\ &\equiv d_N^0 + (d_N^0 + d_N^1) + (d_N^0 + d_N^1 + d_N^2) + \cdots + (d_N^0 + d_N^1 + \cdots + d_N^{N-1}) \\ &= \dim_{\mathbb{K}} S_\lambda^N + \dim_{\mathbb{K}} S_\lambda^{N-1} + \dim_{\mathbb{K}} S_\lambda^{N-2} + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} S_\lambda^1 \\ &\equiv \sum_{n=1}^{N} \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}\, \chi_\lambda^{n-1} \cap \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda) . \end{aligned}$$

W dalszych obliczeniach pomocnym okazuje się następujący

Lemat 1. Niechaj $\chi^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą endomorfizmami skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$. Zachodzą tożsamości

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}\, \chi^{(1)} \cap \mathrm{Ker}\, \chi^{(2)}) &= \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, \chi^{(1)} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, (\chi^{(2)} \circ \chi^{(1)}) \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, (\chi^{(2)} \circ \chi^{(1)}) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi^{(1)} . \end{aligned}$$

Dowód: Na mocy twierdzenia o bilansie wymiarów dla odwzorowania liniowego spełniona jest relacja

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, \chi^{(1)} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, (\chi^{(2)}|_{\mathrm{Im}\, \chi^{(1)}}) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, (\chi^{(2)}|_{\mathrm{Im}\, \chi^{(1)}}) ,$$

która implikuje wprost pierwszą z dowodzonych tożsamości. Jeśli wziąć pod uwagę także bilanse wymiarów

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, (\chi^{(2)} \circ \chi^{(1)}) = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, (\chi^{(2)} \circ \chi^{(1)})$$

oraz

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi^{(1)} = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, \chi^{(1)} ,$$

to otrzymujemy na jej podstawie pożądaną równość

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, (\chi^{(2)} \circ \chi^{(1)}) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi^{(1)} \\ &= \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, (\chi^{(2)} \circ \chi^{(1)}) - \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, \chi^{(1)} \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, \chi^{(1)} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, (\chi^{(2)} \circ \chi^{(1)}) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}\, \chi^{(1)} \cap \mathrm{Ker}\, \chi^{(2)}) . \end{aligned}$$

□

W świetle powyższego lematu dostajemy oczekiwany wynik

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{n=1}^{N} \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}\, \chi_\lambda^{n-1} \cap \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda) = \sum_{n=1}^{N} (\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda^n - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda^{n-1}) \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda^N - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda^0 \equiv \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda^N - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \mathrm{id}_V \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, \chi_\lambda^N , \end{aligned}$$

który przekonuje nas, że B istotnie jest bazą podprzestrzeni $\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^N$.

W następnym kroku dowodzimy tożsamości

$$\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^N = V(\lambda;\chi)\,. \tag{3}$$

Jak wynika z samej definicji przestrzeni pierwiastkowej, wystarczy sprawdzić warunek

$$\forall_{n>N}\ :\ \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^n = \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^N\,. \tag{4}$$

Załóżmy, przeciwnie, że dla pewnej liczby naturalnej $n > N$ istnieje wektor $v \in \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^n \backslash \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^N$, a wtedy z równości

$$\chi_\lambda\big(\chi_\lambda^{n-1}(v)\big) = 0_V$$

wywodzimy

$$\chi_\lambda^{n-1}(v) \in \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^{n-1} \cap \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda\,.$$

Przywołując w tym miejscu Równ. (1) i (2) (i wobec $n-1 \geqslant N$), konstatujemy, że

$$\chi_\lambda^{n-1}(v) \in \mathrm{Im}\,\chi_\lambda^N \cap \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda = \{0_V\}\,,$$

czyli też

$$\chi_\lambda^{n-1}(v) = 0_V\,.$$

To jednak oznacza, że

$$v \in \mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^{n-1}\,,$$

co ostatecznie doprowadza nas do sprzeczności. Wnioskujemy zatem, że warunek (4) jest spełniony.

Tożsamość (3) w połączeniu z tezą twierdzenia o rozkłądzie przestrzeni wektorowej na przestrzenie pierwiasytkowe endomorfizmu pozwala stwierdzić, że dopełnienie proste W podprzestrzeni $\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda^N$ jest – tak jak i ona sama – podprzestrzenią χ-niezmienniczą (równą sumie prostej podprzestrzeni pierwiastkowych stowarzyszonych z pozostałymi wartościami własnymi χ), co oznacza, że całą opisaną tu procedurę możemy powtórzyć dla zredukowanej wymiarowo pary $(W, \chi|_W)$, konstruując tym sposobem złożoną z χ-serii bazę jednej z pozostałych przestrzeni pierwiastkowych χ. Po $r < \infty$ krokach otrzymujemy więc bazę V będącą konkatenacją baz poszczególnych przestrzeni pierwiastkowych, z których każda jest złożona z liczby χ-serii równej wysokości odnośnej przestrzeni pierwiastkowej.

Na zakończenie niniejszego dowodu zauważamy, że dokonując rozkładu bazy B (dla każdej wartości własnej wziętej z osobna, w dowolnym porządku) na poszczególne χ-serie (rozstawione w dowolnej kolejności), a następnie wybierając w obrębie każdej z nich porządek zgodny ze zwrotem pionowych strzałek na naszkicowanym wcześniej diagramie, uzyskujemy bazę (uporządkowaną), w której macierz endomorfizmu χ przybiera pożądaną postać blokowo diagonalną. □

Konstruktywny dowód twierdzenia przedstawiony powyżej nadaje się do zastosowania w sytuacji ogólnej, w której wymiar V nie jest sprecyzowany lub jest „duży" (nie to jest duże, co jest duże, lecz to, co się komuś takim wydaje). Dla małych wartości N jego stosowanie to zazwyczaj strzelanie z armaty do wróbla, o czym przekonuje poniższe rozumowanie dotyczące przypadku $N = 3$. Ilekroć są spełnione założenia twierdzenia, napotykamy tutaj trzy jakościowo odmienne podprzypadki:

(1) $|\mathrm{Sp}\,\chi| = 3 \implies$ istnieje baza własna χ, w której jego macierz jest naprzekątniowa;

(2) $|\mathrm{Sp}\,\chi| = 2$, tj. χ ma dwie różne wartości własne: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ o krotnościach, odpowiednio, $\mathrm{mult}(\lambda_1) = 1$ i $\mathrm{mult}(\lambda_2) = 2$, zatem w świetle twierdzenia mamy dysjunkcję: albo – przy $\mathrm{Ker}\,\chi_{\lambda_2}^2 = \mathrm{Ker}\,\chi_{\lambda_2}$ – istnieje baza własna χ, w której macierz endomorfizmu jest naprzekątniowa, albo też – przy $\mathrm{Ker}\,\chi_{\lambda_2}^2 \supsetneq \mathrm{Ker}\,\chi_{\lambda_2}$ – istnieje baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, w której

$$[\chi]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1_{\mathbb{K}} \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

czyli

$$\chi(v_1) = \lambda_1 \rhd v_1\,, \qquad \chi(v_2) = \lambda_2 \rhd v_2\,, \qquad \chi(v_3) = \lambda_2 \rhd v_3 + v_2\,,$$

to zaś oznacza, że po znalezieniu obu wektorów własnych v_1, v_2 endomorfizmu χ wystarczy wskazać w podprzestrzeni $\operatorname{Ker}\chi_{\lambda_2}^2$ (wyznaczalnej wprost) wektor v_3 spełniający równanie

$$\chi_{\lambda_2}(v_3) = v_2\,, \tag{5}$$

co po ustaleniu *dowolnej* bazy w V sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań liniowych z niejednorodnością – jest zupełnie jasne, że po wybraniu w przestrzeni pierwiastkowej $V(\lambda_2;\chi) \equiv \operatorname{Ker}\chi_{\lambda_2}^2$ bazy, w której jednym z elementów jest v_2, poszukiwany wektor v_3 będzie liniowo zalezny od drugiego elementu bazy;

(3) $|\operatorname{Sp}\chi| = 1$, tj. χ ma jedną wartość własną λ o krotności $\operatorname{mult}(\lambda) = 3$, zatem w świetle twierdzenia mamy dysjunkcję: albo – przy $\operatorname{Ker}\chi_\lambda^3 = \operatorname{Ker}\chi_\lambda^2 = \operatorname{Ker}\chi_\lambda$ – istnieje baza własna χ, w której macierz endomorfizmu jest naprzekątniowa, albo – przy $\operatorname{Ker}\chi_\lambda^3 = \operatorname{Ker}\chi_\lambda^2 \supsetneq \operatorname{Ker}\chi_\lambda$ – istnieje baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, w której

$$[\chi]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1_{\mathbb{K}} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

czyli

$$\chi(v_1) = \lambda \rhd v_1\,, \qquad \chi(v_2) = \lambda \rhd v_2\,, \qquad \chi(v_3) = \lambda \rhd v_3 + v_2\,,$$

a z tą umiemy już sobie poradzić, albo też – przy $V \equiv \operatorname{Ker}\chi_\lambda^3 \supsetneq \operatorname{Ker}\chi_\lambda^2$ – istnieje baza $B = \{w_1, w_2, w_3\}$, w której

$$[\chi]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda & 1_{\mathbb{K}} & 0 \\ 0 & \lambda & 1_{\mathbb{K}} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

czyli

$$\chi(w_1) = \lambda \rhd w_1\,, \qquad \chi(w_2) = \lambda \rhd w_2 + w_1\,, \qquad \chi(w_3) = \lambda \rhd w_3 + w_2\,,$$

to zaś oznacza, że po znalezieniu wektora własnego w_1 endomorfizmu χ wystarczy wskazać w podprzestrzeni $\operatorname{Ker}\chi_\lambda^2$ (wyznaczalnej wprost) wektor w_2 spełniający równanie

$$\chi_\lambda(w_2) = w_1 \tag{6}$$

i na koniec dobrać wektor w_3 spełniający równanie

$$\chi_\lambda(w_3) = w_2\,. \tag{7}$$

Poniżej zilustrujemy wszystkie (nietrywialne) rozważone powyżej ewentualności.

Zadanie 1. Znajdź bazę jordanowską endomorfizmu $\chi \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, którego macierz w bazie standardowej E ma postać

$$[\chi]_E^E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Wyznaczamy funkcję wielomianową wielomianu charakterystycznego endomorfizmu χ,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto w_\chi(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 5 & -\lambda & 4 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \equiv \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4\lambda+9 & 4-\lambda & 4 \\ (\lambda+2)\cdot(4-\lambda) & 4-\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda+1)^2\cdot(\lambda-4)\,, \end{aligned}$$

i na tej podstawie – jego zwyrodniałe widmo

$$\operatorname{Sp}\chi = \{(-1)^{(2)}, 4^{(1)}\}\,.$$

W następnej kolejności znajdujemy wektory własne odpowiadające każdej z wartości własnych,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\left([\chi]^E_E - 4 \rhd \mathbf{1}_3\right) &\equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 25 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_1 \right\rangle_{\mathbb{R}} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\left([\chi]^E_E + \mathbf{1}_3\right) &\equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_2 \right\rangle_{\mathbb{R}} ,
\end{aligned}$$

po czym identyfikujemy przestrzeń pierwiastkową odpowiadającą dwukrotnie zwyrodniałej wartości własnej $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\left([\chi]^E_E + \mathbf{1}_3\right)^2 &\equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 25 \\ 25 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\
&\equiv \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv v_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_3 \right\rangle_{\mathbb{R}} \supsetneq \mathrm{Ker}\left([\chi]^E_E + \mathbf{1}_3\right)
\end{aligned}$$

i upewniamy się, że tak zidentyfikowany wektor v_3 spełnia równanie (5). W otrzymanej tym sposobem bazie

$$B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

macierz endomorfizmu przyjmuje pożądaną postać

$$[\chi]^B_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

Zadanie 2. Oznaczmy

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Znajdź macierz $\mathbb{S} \in \mathbb{R}(3)$, dla której $\mathbb{S} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{S}^{-1}$ ma jordanowską postać normalną.

Rozwiązanie: Funkcja wielomianowa wielomianu charakterystycznego macierzy $\mathbb{A}$ to

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto w_{\mathbb{A}}(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \equiv \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 1 & 0 & -(\lambda-3)\cdot(\lambda-4) \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 1 & 0 & -(\lambda-3)\cdot(\lambda-4) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(\lambda-3)^3 ,
\end{aligned}$$

przeto widmo macierzy ma postać

$$\mathrm{Sp}\,\mathbb{A} = \{3^{(3)}\} ,$$

a wektor własny stowarzyszony z potrójnie zwyrodniałą wartością własną identyfikujemy w rachunku

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\big(\mathbb{A}-3\rhd\mathbf{1}_3\big) &\equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} =: w_1 \right\rangle_{\mathbb{R}} .\end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy podprzestrzeń (uogólnioną własną)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\big(\mathbb{A}-3\rhd\mathbf{1}_3\big)^2 &\equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \equiv w_1, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} =: w_2 \right\rangle_{\mathbb{R}} \supsetneq \mathrm{Ker}\,\big(\mathbb{A}-3\rhd\mathbf{1}_3\big)\end{aligned}$$

i sprawdzamy, że w_2 spełnia warunek (6). Konstrukcję bazy jordanowskiej B wieńczy rozwiązanie układu równań liniowych z niejednorodnością o macierzy rozszerzonej

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \underset{\mathrm{W}}{\widetilde{\ }} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{array}\right) \underset{\mathrm{W}}{\widetilde{\ }} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{array}\right),$$

o rozwiązaniu szczególnym

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} =: w_3\,,$$

które daje nam $B=\{w_1,w_2,w_3\}$. Istotnie, traktując $\mathbb{A}$ jako macierz endomorfizmu $\chi\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ w bazie standardowej

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\equiv e_1, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\equiv e_2, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\equiv e_3\right\}, \tag{8}$$

tj. kładąc

$$\mathbb{A}\equiv[\chi]^E_E\,,$$

otrzymujemy w bazie B postać jordanowską

$$[\chi]^B_B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Jednakowoż zachodzi tożsamość

$$[\chi]^B_B=[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^B_E\cdot[\chi]^E_E\cdot[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B\equiv[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^B_E\cdot\mathbb{A}\cdot[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B\,,$$

w której

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B=[w_1,w_2,w_3]\equiv\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(konkatenacja wektorów kolumnowych), gdyż

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B\,e_k\equiv[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B\,[w_k]^B=[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(w_k)]^E=[w_k]^E\equiv w_k\,,\qquad k\in\{1,2,3\}\,,$$

a do tego

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^B_E=\big([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B\big)^{-1}\,,$$

więc na koniec dostajemy wynik

$$\mathbb{S} = [w_1, w_2, w_3]^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

Zadanie 3. Znajdź jordanowską postać normalną endomorfizmu $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, którego macierz w bazie standardowej E ma postać

$$[\chi]^E_E = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Analiza funkcji wielomianowej wielomianu charakterystycznego χ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto w_\chi(\lambda) \quad &= \quad \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3-\lambda & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \quad -(\lambda+3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 5 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -3-\lambda & 2 \\ 5 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \quad \big((\lambda+3)\cdot(\lambda-1)+4\big) \cdot \big((\lambda-2)\cdot(\lambda+3)+6\big) \equiv \lambda \cdot (\lambda+1)^3 \,,
\end{aligned}$$

pozwala nam zapisać

$$\mathrm{Sp}\,\chi = \big\{(-1)^{(3)}, 0^{(1)}\big\}$$

i na tej podstawie wyznaczyć wektory własne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,[\chi_0]^E_E \quad &\equiv \quad \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ -15 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \quad \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =: v_1 \right\rangle_{\mathbb{R}} \,, \\
\mathrm{Ker}\,[\chi_{-1}]^E_E \quad &\equiv \quad \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \quad \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_2 \right\rangle_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

Postępując wedle algorytmu Väliaho, konstruujemy ciąg podprzestrzeni

$$\mathrm{Im}\,[\chi^0_{-1}]^E_E \quad \equiv \quad \mathrm{Im}\,\mathbf{1}_4 \equiv \mathbb{R}^4 \,,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,[\chi^1_{-1}]^E_E &\equiv \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\
&\subsetneq \mathrm{Im}\,[\chi_{-1}0]^E_E\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,[\chi^2_{-1}]^E_E &\equiv \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 2 \\ 16 & 20 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\equiv \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathrm{Im}\,[\chi^1_{-1}]^E_E\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,[\chi^3_{-1}]^E_E &\equiv \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}^3 = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 26 & -2 & 2 \\ 54 & 39 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\equiv \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathrm{Im}\,[\chi^2_{-1}]^E_E\,,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Im}\,[\chi^4_{-1}]^E_E \equiv \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}^4 \equiv \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}^3 \equiv \mathrm{Im}\,[\chi^3_{-1}]^E_E\,.$$

Znajdujemy zatem indeks graniczny

$$N = 3$$

i wyznaczamy

$$S^1_{-1} = S^2_{-1} \equiv \mathrm{Ker}\,[\chi_{-1}]^E_E\,,$$

po czym szukamy $[\chi_{-1}]^E_E$-prekursora stopnia $N-1=2$ dla wektora bazowego v_2, tj. wektora $v_2^{(3)}$ spełniającego równanie

$$[\chi^2_{-1}]^E_E(v_2^{(3)}) = v_2\,.$$

Rozwiązujemy przeto układ równań liniowych z niejednorodnością o macierzy rozszerzonej

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 2 & 1 \\ 16 & 20 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{W}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 7 & -2 & 2 & 1 \\ 16 & 20 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{W}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 7 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{19} \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{W}}{\sim}\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 2 & | & \frac{18}{19} \\ 2 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{19} \end{pmatrix},$$

dostając (np.)

$$v_2^{(3)} = \tfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix},$$

czyli też

$$v_2^{(2)} = [\chi_{-1}]^E_E\, v_2^{(3)} \equiv \tfrac{1}{19}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 26 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

Koniec końców w bazie

$$B := \left\{v_1, v_2 \equiv v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_2^{(3)}\right\}$$

otrzymujemy pożądaną jordanowską postać normalną endomorfizmu

$$[\chi]^B_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

◇

Zadanie 4. Znajdź wyraz ogólny ciągu $x_\cdot : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ określonego rekurencyjnie wzorem

$$x_{n+2} = 2x_{n-1} - 5x_n + 4x_{n+1}\,, \qquad n > 0$$

przy zadanych wyrazach x_0, x_1 i x_3.

Rozwiązanie: Wprowadziwszy *macierz rekurencji*

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

zapisujemy i rozwiązujemy (formalnie) tęże, jak następuje:

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbb{A}^2\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = \mathbb{A}^n\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Pozostaje wyznaczyć macierz $\mathbb{A}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że gdyby macierz rekurencji dała się zapisać w postaci $\mathbb{A} = \mathbb{S}\cdot\mathbb{J}\cdot\mathbb{S}^{-1}$ przy użyciu pewnej odwracalnej macierzy $\mathbb{S} \in \mathbb{R}(3)$ i macierzy $\mathbb{J}$ w jordanowskiej postaci normalnej, zadanie policzenia $\mathbb{A}^n$ zostałoby – z racji łączności mnożenia macierzowego – sprowadzone do wyznaczenia macierzy $\mathbb{J}^n$,

$$\mathbb{A}^n = \underbrace{\left(\mathbb{S}\cdot\mathbb{J}\cdot\mathbb{S}^{-1}\right)\cdot\left(\mathbb{S}\cdot\mathbb{J}\cdot\mathbb{S}^{-1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\mathbb{S}\cdot\mathbb{J}\cdot\mathbb{S}^{-1}\right)}_{n\ \text{razy}} \equiv \mathbb{S}\cdot\mathbb{J}^n\cdot\mathbb{S}^{-1}\,,$$

co wobec szczególnie prostej postaci macierzy $\mathbb{J}$ stanowiłoby istotne jego uproszczenie. Liczymy zatem funkcję wielomianową wielomianu charakterystycznego $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto w_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)^2\,(\lambda-2)\,,$$

i na tej podstawie konstatujemy wykonalność zamierzonej redukcji, a ponieważ

$$\mathrm{Sp}\,\mathbb{A} = \{1^{(2)}, 2^{(1)}\},$$

przeto mamy do czynienia z podprzypadkiem (2) ze str. 5. Punktem wyjścia do konstrukcji bazy jordanowskiej jest wyznaczenie wektorów własnych,

$$\mathrm{Ker}\,\big(\mathbb{A} - 2 \rhd \mathbf{1}_3\big) \equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_1 \right\rangle_{\mathbb{R}},$$

$$\mathrm{Ker}\,\big(\mathbb{A} - \mathbf{1}_3\big) \equiv \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_2 \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Następnie wyznaczamy podprzestrzeń pierwiastkową

$$\begin{aligned} V(1;\mathbb{A}) &= \mathrm{Ker}\,\big(\mathbb{A} - \mathbf{1}_3\big)^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_3 \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &\supsetneq \mathrm{Ker}\,\big(\mathbb{A} - \mathbf{1}_3\big) \end{aligned}$$

i upewniamy się, że wektor v_3 spełnia warunek (5). Potraktujmy $\mathbb{A}$ jako macierz endomorfizmu $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ w bazie standardowej (8), tj. połóżmy

$$\mathbb{A} \equiv [\chi]^E_E,$$

a wtedy w bazie

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv v_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv v_2, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv v_3 \right\},$$

otrzymujemy postać jordanowską

$$[\chi]^B_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{J},$$

ponieważ zaś

$$[\chi]^B_B = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^B_E \cdot [\chi]^E_E \cdot [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B$$

i

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B = [v_1, v_2, v_3],$$

a nadto

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^B_E = \big([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^E_B\big)^{-1}$$

przeto

$$\mathbb{S} \equiv [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Jest zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n = [v_1, v_2, v_3] \cdot \mathbb{J}^n \cdot [v_1, v_2, v_3]^{-1} &\equiv \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

albowiem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \cdots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ razy}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \cdots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n-2 \text{ razy}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \cdots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n-3 \text{ razy}} \\
&= \ldots = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ostatecznie więc

$$
\mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - n - 3 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+2} - 2n - 4 \\ 2^{n+1} - n - 2 & -2^{n+2} + 3n + 5 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix},
$$

skąd też rozwiązanie

$$
x_n = \big(2^n - n - 1\big)\, x_2 + \big(-2^{n+1} + 3n + 2\big)\, x_1 + \big(2^n - 2n\big)\, x_0 \,.
$$

◇

Na zakończenie zostawiamy Czytelnikowi dwa zagadnienia do samodzielnego rozważenia i rozwiązania. Pierwsze z nich jest obowiązkowym zadaniem domowym. Drugie (oznaczone gwiazdką) to nieobowiązkowe zagadnienie teoretyczne poszerzające horyzont pojęciowy (i rachunkowy) zakreślony przez dotychczasowe rozważania.

Zadanie domowe 1. Oznaczmy

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & -1 \\ 23 & -6 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Znajdź macierz $\mathbb{S} \in \mathbb{R}(4)$, dla której $\mathbb{S} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{S}^{-1}$ ma jordanowską postać normalną.

Zadanie domowe 2.* W konsekwencji niedomkniętości algebraicznej ciała $\mathbb{R}$ istnieją endomorfizmy rzeczywistych przestrzeni wektorowych, których nie można sprowadzić do jordanowskiej postaci normalnej. Zarazem jednak $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, gdyby zatem możliwym było potraktowanie dowolnego takiego endomorfizmu w kanoniczny sposób jako endomorfizmu pewnej przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej wyznaczonej przez jego dziedzinę (wszak nie mamy do dyspozycji żadnych innych obiektów algebraicznych!), a następnie wycofanie blokowo-naprzekątniowej prezentacji tak określonego odwzorowania $\mathbb{C}$-liniowego w jego bazie jordanowskiej na powrót do wyjściowej przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej, na podstawie naturalnej odpowiedniości między bazami obu przestrzeni, można byłoby dokonać przydatnego uogólnienia Twierdzenia 1 na przypadek rzeczywisty. Poniżej wskazujemy najmniej oczywiste elementy takiego scenariusza, który – w istocie – można zrealizować, pozostawiając pomyślenie i dopracowanie szczegółów konstrukcji pomysłowemu Czytelnikowi.

Definicja 2. Niechaj V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. **Kompleksyfikacja przestrzeni** V to przestrzeń wektorowa o nośniku $V^{\mathbb{C}} := V \times V$ o strukturze grupy przemiennej zadanej przez operację 2-argumentową

$$
+_{V^{\mathbb{C}}} \;:\; V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}} \;:\; \big((v_1, v_2), (w_1, w_2)\big) \longmapsto (v_1 + v_2, w_1 + w_2)
$$

oraz operację 1-argumentową

$$
P_{V^{\mathbb{C}}} \;:\; V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}} \;:\; (v_1, v_2) \longmapsto (-v_1, -v_2)
$$

i z działaniem ciała $\mathbb{C}$ określonym wzorem

$$
\ell^{\mathbb{C}} \quad : \quad \mathbb{C} \times V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}}
$$

$$: \quad ((\lambda, \mu), (v_1, v_2)) \longmapsto (\lambda \rhd v_1 - \mu \rhd v_2, \lambda \rhd v_2 + \mu \rhd v_1) \ .$$

Mamy naturalne

Twierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasową notację. Odwzorowanie

$$\iota_V \ : \ V \longrightarrow V^{\mathbb{C}} \ : \ v \longmapsto (v, 0_V)$$

jest monomorfizmem między przestrzeniami $\mathbb{R}$-liniowymi V i $V^{\mathbb{C}}$, przy czym strukturę $\mathbb{R}$-liniową na $V^{\mathbb{C}}$ indukuje monomorfizm ciał $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. W szczególności jeśli B jest bazą przestrzeni V,

$$V = \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \ ,$$

to $\iota_V(B)$ jest bazą przestrzeni $V^{\mathbb{C}}$,

$$V^{\mathbb{C}} = \langle \iota_V(B) \rangle_{\mathbb{C}} \ .$$

Dowód: Do samodzielnego przeprowadzenia. □

Idąc tropem konstrukcji konstrukcji Cayleya–Dicksona liczb zespolonych z (par) liczb przeczywistych, rozważamy rozważamy następnie

Definicja 3. Przyjmijmy dotychczasową notację. **Sprzężenie zespolone na przestrzeni** $V^{\mathbb{C}}$ to odwzorowanie

$$\bar{\cdot} \ : \ V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}} \ : \ (v_1, v_2) \longmapsto (v_1, -v_2) \ .$$

Mamy oczywiste

Twierdzenie 3. Sprzężenie zespolone na przestrzeni $V^{\mathbb{C}}$ jest inwolutywnym antyizomorfizmem, tj. – w szczególności –

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times V^{\mathbb{C}}} \ : \ \overline{\lambda \rhd v} = \overline{\lambda} \rhd \overline{v} \ .$$

Kluczową z punktu widzenia naszego zadania jest

Definicja 4. Przyjmijmy dotychczasową notację. **Kompleksyfikacja endomorfizmu** $\chi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ to endomorfizm $\chi^{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ dany wzorem

$$\chi^{\mathbb{C}} \ : \ V^{\mathbb{C}} \longrightarrow V^{\mathbb{C}} \ : \ (v_1, v_2) \longmapsto (\chi(v_1), \chi(v_2)) \ .$$

Pomyśl i udowodnij uogólnienie twierdzenia o jordanowskiej postaci normalnej dla endomorfizmu przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$ na przypadek endomorfizmu przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$ wykorzystując powyższe struktury i własności, jak również podpowiedzi:

- Zważ, że nierozkładalne czynniki w wielomianie charakterystycznym χ odpowiadają parom wzajem sprzężonych istotnie zespolonych wartości własnych $\chi^{\mathbb{C}}$.
- W przestrzeniach pierwiastkowych odpowiadających tym parom wybierz bazy (jordanowskie) wzajem sprzężone.
- W celu de-kompleksyfikacji/realifikacji rozpatrz samosprzężone kombinacje $\mathbb{C}$-liniowe par elementów wzajem sprzężonych powyższych baz. (Naśladuj konstrukcję części rzeczywistej i urojonej liczby zespolonej wykorzystującą operację sprzężenia zespolonego.)

Dla tych zaciekawionych, którzy nie podołają wyzwaniu, następna porcja podpowiedzi za tydzień.

Powodzenia!