ALGEBRA II R W CZASACH ZARAZY
(5. MAJA 2020 R.)

Zadanie 1. Wyznacz odstęp między punktem $x_0 = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ i płaszczyzną

$$\Pi = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad \wedge \quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \right\}$$

w metryce euklidesowej.

Rozwiązanie: Zaczniemy od przedstawienia Π w postaci parametrycznej, tj. jako przestrzeni afinicznej (w oczywistym zapisie)

$$\Pi = x_\Pi + \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} ,$$

gdzie $x_\Pi \in \mathbb{R}^4$ jest dowolnym punktem Π, a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ to dowolna para liniowo niezależnych wektorów rozpinających (stycznych do) Π. Algebraicznie rzecz ujmując, x_Π jest rozwiązaniem szczególnym układu równań liniowych z niejednorodnością definiującego Π, wektory v_1, v_2 zaś są liniowo niezależnymi rozwiązaniami odnośnego układu jednorodnego. Z układu wyznaczamy x_1 i x_2 jako funkcje liniowe x_3 i x_4,

$$x_1 = -9 + x_3 + 6x_4 , \qquad x_2 = 5 - 2x_3 - 3x_4$$

i na tej podstawie zapisujemy

$$\Pi \ni x = \begin{pmatrix} -9 + x_3 + 6x_4 \\ 5 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \rhd \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \rhd \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lub równoważnie

$$\Pi \ni \begin{pmatrix} -45 \\ 41 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} + s_1 \rhd \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \rhd \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad s_1, s_2 \in \mathbb{R} ,$$

czyli

$$x_\Pi = \begin{pmatrix} -45 \\ 41 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

i

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Możemy już wyznaczyć odległość $d_{x_0,\Pi}$ punktu x_0 od Π, rozumianą jako pierwiastek kwadratowy z minimum funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ danej wzorem

$$D \,:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, (s_1, s_2) \longmapsto \| x_\Pi - x_0 + s_1 \rhd v_1 + s_2 \rhd v_2 \|^2_{\mathrm{E}} ,$$

w której zapisie

$$\|\cdot\|_{\mathrm{E}} \;:\; \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0} \;:\; x \longmapsto \sqrt{(x|x)_{\mathrm{E}}}$$

jest normą określoną przez euklidesowy iloczyn skalarny

$$(\cdot|\cdot)_{\mathrm{E}} \;:\; \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \;:\; \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot y_i$$

na $\mathbb{R}^4$. Chwila zastanowienia przekonuje, że zbiór wartości rozważanej funkcji jest nieograniczony od góry, od dołu zaś ogranicza go poszukiwana odległość x_0 od Π, przeto wystarczy ustalić punkt krytyczny (s_1^*, s_2^*) funkcji d, co czynimy w bezpośrednim rachunku

$$\begin{cases} 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\, \frac{\partial D}{\partial s_1}\big(s_1^*, s_2^*\big) = s_1^* \cdot \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 + (\Delta|v_1)_{\mathrm{E}} + s_2^* \cdot (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\[2ex] 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\, \frac{\partial D}{\partial s_2}\big(s_1^*, s_2^*\big) = s_2^* \cdot \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 + (\Delta|v_2)_{\mathrm{E}} + s_1^* \cdot (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \end{cases},$$

w którym dla skrótu zapisaliśmy

$$\Delta := x_\Pi - x_0 \,.$$

Powyższe przepisujemy w postaci układu równań liniowych z niejednorodnością

$$\begin{pmatrix} \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 & (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\ (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} & \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (\Delta|v_1)_{\mathrm{E}} \\ (\Delta|v_2)_{\mathrm{E}} \end{pmatrix}.$$

Liczymy wyznacznik jego macierzy,

$$\det \begin{pmatrix} \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 & (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\ (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} & \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 \cdot \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \left(1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2\right),$$

gdzie

$$\widehat{v}_j \equiv \|v_j\|_{\mathrm{E}}^{-1} \rhd v_j \,, \quad j \in \{1, 2\}$$

są wektorami o normie 1.

Wobec liniowej niezależności układu rozpinającego $\{v_1, v_2\}$ jest

$$1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2 > 0 \,,$$

otrzymujemy przeto jednoznaczne rozwiązanie

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} &= \frac{1}{\|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 \cdot \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \left(1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2\right)} \begin{pmatrix} -\|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 & (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\ (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} & -\|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta|v_1)_{\mathrm{E}} \\ (\Delta|v_2)_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \begin{pmatrix} \|v_1\|_{\mathrm{E}}^{-1} \left(\big(\Delta|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}} \cdot \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} - \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}}\right) \\ \|v_2\|_{\mathrm{E}}^{-1} \left(\big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \cdot \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}} - \big(\Delta|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i na tej podstawie wyznaczamy

$$\begin{aligned} &\Delta + s_1^* \rhd v_1 + s_2^* \rhd v_2 \\ = \;&\Delta + \frac{1}{1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \Big[\left(\big(\Delta|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}} \cdot \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} - \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}}\right) \rhd \widehat{v}_1 + \left(\big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \cdot \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}} - \big(\Delta|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}\right) \rhd \widehat{v}_2\Big]. \end{aligned}$$

Rozłóżmy Δ na składowe względem rozkładu prostopadłego

$$\mathbb{R}^4 = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus_{\mathrm{E}} \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} \,,$$

otrzymując przy tym (po sprostopadleniu bazy $\{\widehat{v}_1, \widehat{v}_2\}$ podprzestrzeni $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ wedle schematu Grama–Schmidta)

$$\begin{aligned} \Delta &= \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1 + \frac{1}{1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \left(\Delta|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\right)_{\mathrm{E}} \rhd \left(\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\right) + \Delta^{\perp} \\ &= \left(\big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} - \frac{\big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}}{1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \left(\Delta|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\right)_{\mathrm{E}}\right) \rhd \widehat{v}_1 \\ &\quad + \frac{1}{1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \left(\Delta|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\right)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_2 + \Delta^{\perp} \,, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta^\perp \in \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp .$$

Istotnie,

$$\|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\|_{\mathrm{E}}^2 = 1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2 .$$

Bez trudu obliczamy

$$\Delta + s_1^* \rhd v_1 + s_2^* \rhd v_2 \equiv \Delta^\perp$$

i na tej podstawie wyznaczamy poszukiwaną odległość

$$d_{x_0,\Pi} \equiv \sqrt{D\big(s_1^*, s_2^*\big)} = \|\Delta^\perp\|_{\mathrm{E}} . \tag{1}$$

Pozostaje policzyć

$$\Delta^\perp \equiv \Delta - \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1 - \tfrac{1}{1-\big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \big(\Delta|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \big(\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\big) .$$

W tym celu wyznaczamy

$$\|v_1\|_{\mathrm{E}} = \sqrt{1+4+1+0} = \sqrt{6} , \qquad \|v_2\|_{\mathrm{E}} = \sqrt{36+9+0+1} = \sqrt{46} ,$$

skąd

$$\widehat{v}_1 = \sqrt{6}^{-1} \rhd \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \widehat{v}_2 = \sqrt{46}^{-1} \rhd \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i dalej

$$\big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}} = \tfrac{12}{\sqrt{6\cdot 46}} = \tfrac{6}{\sqrt{69}} ,$$

więc też sprostopadloną i znormalizowaną (do 1) bazę $\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}}$ w postaci

$$\widehat{e}_1 \equiv \widehat{v}_1 , \qquad \widehat{e}_2 \equiv \|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\|_{\mathrm{E}}^{-1} \rhd \big(\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\big) = \sqrt{22}^{-1} \rhd \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ostatecznie więc

$$\Delta^\perp = \begin{pmatrix} -56 \\ 26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 18 \rhd \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \rhd \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

i

$$d_{x_0,\Pi} = \sqrt{4+1+0+81} = \sqrt{86} .$$

◇

Zadanie 2. Wyznacz odległość, mierzoną w metryce euklidesowej, między dwiema prostymi:

$$\Lambda_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

i

$$\Lambda_2 := \Pi_1 \cap \Pi_2$$

w $\mathbb{R}^3$, z których druga jest przecięciem płaszczyzn

$$\Pi_1 \quad := \quad \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \right\} ,$$

$$\Pi_2 \quad := \quad \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \middle| \quad x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0 \right\}.$$

<u>*Rozwiązanie:*</u> Zaczniemy od wyprowadzenia opisu parametrycznego drugiej prostej. Z koniunkcji równań liniowych definiujących obie płaszczyzny odczytujemy liniową zależność x_1 i x_2 od wolnej zmiennej x_3,

$$\Lambda_2 \ni \begin{pmatrix} -2x_3 + 1 \\ x_3 - 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \rhd \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

skąd

$$\Lambda_i = x_i + \langle v_i \rangle_{\mathbb{R}}, \qquad i \in \{1, 2\}$$

dla

$$(x_1, v_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \qquad (x_2, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Teraz, kiedy mamy już do dyspozycji parametryczny opis obu prostych, których punkty przedstawiamy w postaci

$$\xi_i = x_i + s_i \rhd v_i, \qquad s_i \in \mathbb{R},$$

możemy rozważyć zagadnienie odległości d_{Λ_1, Λ_2} między prostymi Λ_1 i Λ_2, rozumianej jako pierwiastek kwadratowy minimum funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ danej wzorem

$$D \;:\; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; (s_1, s_2) \longmapsto \|x_2 - x_1 + s_2 \rhd v_2 - s_1 \rhd v_1\|_{\mathrm{E}}^2,$$

w której zapisie

$$\|\cdot\|_{\mathrm{E}} \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0} \;:\; x \longmapsto \sqrt{(x|x)_{\mathrm{E}}}$$

jest normą określoną przez euklidesowy iloczyn skalarny

$$(\cdot|\cdot)_{\mathrm{E}} \;:\; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \sum_{i=1}^3 x_i \cdot y_i$$

na $\mathbb{R}^3$. Oznaczając dla skrótu

$$\Delta := x_2 - x_1$$

i rozumując jak poprzednio, otrzymujemy układ równań definiujących minimum:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial s_1}(s_1^*, s_2^*) = s_1^* \cdot \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 - (\Delta|v_1)_{\mathrm{E}} - s_2^* \cdot (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\ \\ 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial s_2}(s_1^*, s_2^*) = s_2^* \cdot \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 + (\Delta|v_2)_{\mathrm{E}} - s_1^* \cdot (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \end{array} \right.,$$

który przepisujemy w postaci

$$\begin{pmatrix} \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 & -(v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\ -(v_1|v_2)_{\mathrm{E}} & \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta|v_1)_{\mathrm{E}} \\ -(\Delta|v_2)_{\mathrm{E}} \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy powyższego układu równań liniowych z niejednorodnością to (w napisie jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania)

$$\det \begin{pmatrix} \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 & -(v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\ -(v_1|v_2)_{\mathrm{E}} & \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 \cdot \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \left(1 - \left(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\right)_{\mathrm{E}}^2\right).$$

Rozpatrujemy dwa jakościowo różne przypadki:

(2.i) $\Lambda_2 \parallel \Lambda_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{v}_2 = \epsilon \rhd \widehat{v}_1,\ \epsilon \in \{-1, +1\}$, a wtedy powyższy wyznacznik jest tożsamościowo równy 0 i jako jedyne równanie wiążące s_1^* i s_2^* otrzymujemy

$$\|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 \cdot \left(s_1^* - s_2^* \frac{\|v_2\|_{\mathrm{E}}}{\|v_1\|_{\mathrm{E}}} \left(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\right)_{\mathrm{E}} - \frac{\left(\Delta|\widehat{v}_1\right)_{\mathrm{E}}}{\|v_1\|_{\mathrm{E}}} \right) = 0,$$

skąd

$$D\left(s_1^*, s_2^*\right) = \|\Delta - \left(\Delta|\widehat{v}_1\right)_{\mathrm{E}} \widehat{v}_1\|_{\mathrm{E}}^2,$$

. Wziąwszy pod uwagę rozkład prostopadły

$$\mathbb{R}^3 = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}} \ominus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} ,$$

względem którego dostajemy rozkład

$$\Delta = \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}}\, \widehat{v}_1 + \Delta^{\perp} ,$$

stwierdzamy równość

$$D\big(s_1^*, s_2^*\big) = \|\Delta^{\perp}\|_{\mathrm{E}}^2 ,$$

czyli też – w tym przypadku –

$$d_{\Lambda_1,\Lambda_2} = \|\Delta^{\perp}\|_{\mathrm{E}} , \qquad \Delta^{\perp} = \Delta - \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}}\, \widehat{v}_1 .$$

Wektory kierunkowe v_1 i v_2 naszych dwóch prostych nie są liniowo zależne, przeto zostawiamy powyższy wzór do przyszłego wykorzystania i przechodzimy do omówienia drugiej ewentualności, zrealizowanej w naszym zadaniu.

(2.ii) $\dim_{\mathbb{R}} \langle \widehat{v}_1, \widehat{v}_2 \rangle_{\mathbb{R}} = 2$, a wtedy wyznacznik policzony powyżej nie znika i mamy jednoznaczne rozwiązanie

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix} &= \frac{1}{\|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 \cdot \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 \left(1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2\right)} \begin{pmatrix} \|v_2\|_{\mathrm{E}}^2 & (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} \\ (v_1|v_2)_{\mathrm{E}} & \|v_1\|_{\mathrm{E}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta|v_1)_{\mathrm{E}} \\ -(\Delta|v_2)_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \begin{pmatrix} \|v_1\|_{\mathrm{E}}^{-1} \Big(\big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} - \big(\Delta|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}} \cdot \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}}\Big) \\ -\|v_2\|_{\mathrm{E}}^{-1} \Big(\big(\Delta|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}} - \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \cdot \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}\Big) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

W tej sytuacji powtarzamy kroki z rozwiązania Zadania 1., dostając identyczny wynik:

$$d_{\Lambda_1,\Lambda_2} \equiv \sqrt{D(s_1^*, s_2^*)} = \|\Delta^{\perp}\|_{\mathrm{E}} ,$$

$$\Delta^{\perp} \equiv \Delta - \big(\Delta|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1 - \frac{1}{1 - \big(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\big)_{\mathrm{E}}^2} \Big(\Delta|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\Big)_{\mathrm{E}} \rhd \Big(\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\Big) .$$

W szczególnym przypadku prostych nierównoległych w $\mathbb{R}^3$ mamy do dyspozycji dodatkową strukturę, którą możemy wykorzystać do policzenia $\Delta^{\perp}$, a mianowicie: iloczyn wektorowy wektorów kierunkowych v_1 i v_2, który – jak łatwo się przekonać (namawiam Czytelnika, który nie ma jeszcze tego rachunku za sobą, do jego przeprowadzenia) – zwraca wektor prostopadły do obu czynników. Możemy tedy zapisać – w $\mathbb{R}^3$ –

$$d_{\Lambda_1,\Lambda_2} = \frac{\big|\big(\Delta|v_1 \times v_2\big)_{\mathrm{E}}\big|}{\|v_1 \times v_2\|_{\mathrm{E}}} .$$

Dla danych z zadania obliczamy

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

i na tej podstawie

$$d_{\Lambda_1,\Lambda_2} = \frac{4}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{4}{\sqrt{21}} .$$

◇

Zadanie 3. Wyznacz odległość, mierzoną w metryce euklidesowej, między prostą

$$\Lambda := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3 + 1}{4} = \frac{x_4 + 2}{5} \right\}$$

i płaszczyzną

$$\Pi = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 7 \quad \wedge \quad 3x_1 - 4x_3 + x_4 = 5 \right\}.$$

<u>*Rozwiązanie:*</u> Rozwiązujemy układ równań definiujących Λ w terminach zmiennej niezależnej x_1,

$$(x_2, x_3, x_4) = \left(\tfrac{3}{2}\, x_1 - \tfrac{3}{2}, 2x_1 - 3, \tfrac{5}{2}\, x_1 - \tfrac{9}{2}\right)$$

i na tej podstawie przepisujemy

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Następnie rozwiązujemy układ równań definiujących Π w terminach zmiennych niezależnych x_1, x_2,

$$(x_3, x_4) = (7 - 2x_1 + x_2, 33 - 11x_1 + 4x_2)\,,$$

co daje nam definicję parametryczną

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 33 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Możemy zatem zapisać punkty w każdym ze zbiorów w wygodnej postaci

$$\Lambda \ni x_\Lambda + s \rhd v_\Lambda\,, \qquad \Pi \ni x_\Pi + s_1 \rhd v_1 + s_2 \rhd v_2$$

przy użyciu wektorów

$$(x_\Lambda, v_\Lambda) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \qquad (x_\Pi, v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

To otwiera nam drogę do wykorzystania wyniku ogólnego zadania 1. w oczywisty sposób: oto odległość punktu prostej Λ postaci $\xi(s) = x_\Lambda + s \rhd v_\Lambda$ od płaszczyzny Π przyjmuje postać

$$d_{\xi(s),\Pi} = \|\Delta(s)^\perp\|_{\mathrm{E}}\,,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= x_\Pi - \xi(s)\,, \\ \Delta(s)^\perp &= \Delta(s) - \big(\Delta(s)|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1 - \tfrac{1}{1-\left(\widehat{v}_1|\widehat{v}_2\right)_{\mathrm{E}}^2} \big(\Delta(s)|\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \big(\widehat{v}_2 - \big(\widehat{v}_2|\widehat{v}_1\big)_{\mathrm{E}} \rhd \widehat{v}_1\big)\,, \end{aligned}$$

por. Równanie (1). Wektor $\Delta(s)^\perp$ zależy liniowo od $\Delta(s)$ – w istocie jest on wynikiem zrzutowania $\Delta(s)$ na dopełnienie prostopadłe $\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ podprzestrzeni $\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}$ w $\mathbb{R}^n$ wzdłuż $\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}$ (w naszym przypadku $n=4$), tj.

$$\Delta(s)^\perp \equiv \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(s)\big)\,,$$

gdzie $\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ jest operatorem rzutu prostopadłego na $\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp$ wzdłuż $\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}$. Mamy zatem

$$d_{\xi(s),\Pi} = \big\|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(s)\big)\big\|_{\mathrm{E}}$$

i w następnym kroku musimy jedynie wyznaczyć minimum tak określonej funkcji gładkiej argumentu $s\in\mathbb{R}$. Równoważnie, a przy tym wygodniej, możemy poddać minimalizacji funkcję

$$F\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_{\geqslant 0}\ :\ s\longmapsto \big(\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(s)\big)\big|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(s)\big)\big)_{\mathrm{E}} = \big\|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(s)\big)\big\|_{\mathrm{E}}^2 \equiv d^2_{\xi(s),\Pi}\,.$$

Uwzględniając liniowy i idempotentny charakter $\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}$, obliczamy

$$0 \stackrel{!}{=} -\tfrac{1}{2}\,\tfrac{\mathsf{d}F}{\mathsf{d}s}(s_*) = \big(\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(v_\Lambda\big)\big|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(s_*)\big)\big)_{\mathrm{E}} = \big(\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(v_\Lambda\big)\big|\Delta(s_*)\big)_{\mathrm{E}}\,,$$

czyli

$$s_*\cdot\big(v_\Lambda\big|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(v_\Lambda\big)\big)_{\mathrm{E}} = \big(\Delta(0)\big|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(v_\Lambda\big)\big)_{\mathrm{E}}\,.$$

I znów natrafiamy na dwa jakościowo różne przypadki

(3.i) $v_\Lambda\in\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}} \iff \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda)=0$, a wówczas odległość Λ od Π (do której Λ jest równoległa) jest równa

$$d_{\Lambda,\Pi} = \big\|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(0)\big)\big\|_{\mathrm{E}}\,.$$

Jako że nie jest to sytuacja, z którą mamy do czynienia w zadaniu, przechodzimy do rozpatrzenia drugiego z możliwych przypadków.

(3.ii) $v_\Lambda\notin\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}} \iff \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda)\neq 0 \iff (v_\Lambda|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda)) = (\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda)|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda))\neq 0$, a wówczas znajdujemy jednoznaczne rozwiązanie (najbliższy Π punkt na Λ):

$$s_* = \frac{(\Delta(0)|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda))_{\mathrm{E}}}{(v_\Lambda|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda))_{\mathrm{E}}}$$

i

$$d_{\Lambda,\Pi} = \left\|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\Delta(0)\big) - \frac{(\Delta(0)|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda))_{\mathrm{E}}}{(v_\Lambda|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda))_{\mathrm{E}}} \rhd \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(v_\Lambda\big)\right\|_{\mathrm{E}} \equiv \|\mathsf{P}\big(\Delta(0)\big)\|_{\mathrm{E}}\,,$$

gdzie

$$\mathsf{P} := \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp} - \frac{(\cdot|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda))_{\mathrm{E}}}{(v_\Lambda|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(v_\Lambda))_{\mathrm{E}}} \rhd \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(v_\Lambda\big)$$

jest operatorem $\mathbb{R}$-liniowym. Oznaczmy

$$v_\Lambda^\perp := \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(v_\Lambda\big)\,,$$

a następnie

$$\widehat{v}_\Lambda^\perp := \|v_\Lambda^\perp\|_{\mathrm{E}}^{-1}\rhd v_\Lambda^\perp\,,$$

by móc przepisać ów operator w sugestywnej postaci

$$\mathsf{P} \equiv \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp} - \big(\cdot\big|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\mathrm{E}}\rhd\widehat{v}_\Lambda^\perp\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że mamy do czynienia z rzutem prostopadłym,

$$\mathsf{P}\circ\mathsf{P} \;=\; \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\circ\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp} - \big(\cdot\big|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\mathrm{E}}\rhd\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(\widehat{v}_\Lambda^\perp\big) - \big(\cdot\big|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\mathrm{E}}\rhd\widehat{v}_\Lambda^\perp\circ\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}$$

$$
\begin{aligned}
&+\big((\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp\big) \circ \big((\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp\big) \\
=\ & \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp} - \big(\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp - \big(\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(\cdot)|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp + \big((\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp \\
=\ & \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp} - \big(\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp - \big(\cdot|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(\widehat{v}_\Lambda^\perp)\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp + \big(\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \cdot \big(\widehat{v}_\Lambda^\perp|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp \\
=\ & \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp} - 2\big(\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp + \big(\cdot|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp \equiv \mathsf{P}
\end{aligned}
$$

i – dla dowolnych $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ –

$$
\begin{aligned}
\big(w_1|\mathsf{P}(w_2)\big)_{\rm E} &\equiv \big(w_1|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(w_2)\big)_{\rm E} - \big(w_1|\big(w_2|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \\
&= \big(\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(w_1)|w_2\big)_{\rm E} - \big(w_2|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \cdot \big(w_1|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \\
&\equiv \big(\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}(w_1)|w_2\big)_{\rm E} - \big(\big(w_1|\widehat{v}_\Lambda^\perp\big)_{\rm E} \rhd \widehat{v}_\Lambda^\perp|w_2\big)_{\rm E} \equiv \big(\mathsf{P}(w_1)|w_2\big)_{\rm E}\,.
\end{aligned}
$$

Ażeby go zidentyfikować, dokonujemy rozkładu prostopadłego

$$\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp = \langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}} \ominus_{\underline{\rm E}} \langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}}^{\underline{\perp}}\,,$$

przy czym drugi składnik prosty jest dopełnieniem prostopadłym $\langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}}$ w przestrzeni $\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp$, wyposażonej w iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_{\rm E}|_{\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp \times \langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}$, co zaznaczamy stosownymi podkreśleniami. W obecnym zapisie P jest operatorem rzutu prostopadłego na $\langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}}^{\underline{\perp}}$, a ponieważ

$$\mathbb{R}^4 = \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}} \ominus_{\rm E} \big(\langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}} \ominus_{\underline{\rm E}} \langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}}^{\underline{\perp}}\big) \equiv \langle v_1, v_2, v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}} \ominus_{\rm E} \langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}}^{\underline{\perp}}\,,$$

czyli

$$\langle \widehat{v}_\Lambda^\perp\rangle_{\mathbb{R}}^{\underline{\perp}} \equiv \langle v_1, v_2, v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}}^\perp\,,$$

możemy zapisać

$$\mathsf{P} \equiv \mathsf{P}^{\langle v_1,v_2,v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2,v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}$$

i ostatecznie

$$d_{\Lambda,\Pi} = \big\|\mathsf{P}^{\langle v_1,v_2,v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}}}_{\langle v_1,v_2,v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}}^\perp}\big(x_\Pi - x_\Lambda\big)\big\|_{\rm E}\,.$$

Dopełnienie (prostopadłe) trójwymiarowej (z założenia) podprzestrzeni $\langle v_1, v_2, v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^4$ jest jednowymiarową przestrzenią $\mathbb{R}$-liniową, której generator $n \in \langle v_1, v_2, v_\Lambda\rangle_{\mathbb{R}}^\perp \setminus \{0\}$ wyznaczamy bez trudu z warunku

$$(v_1|n)_{\rm E} = 0 = (v_2|n)_{\rm E} = 0 = (v_\Lambda|n)_{\rm E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} v_1^{\rm T} \\ v_2^{\rm T} \\ v_\Lambda^{\rm T}\end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3\times 4;\mathbb{R})\,.$$

Dla tak wyznaczonego n możemy zapisać

$$d_{\Lambda,\Pi} = \frac{|(x_\Pi - x_\Lambda|n)_{\rm E}|}{\|n\|_{\rm E}}$$

W konkretnym przypadku z zadania otrzymujemy

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} v_1^{\rm T} \\ v_2^{\rm T} \\ v_\Lambda^{\rm T}\end{pmatrix} \equiv \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv n \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

oraz

$$x_\Pi - x_\Lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

zatem

$$d_{\Lambda,\Pi} = \tfrac{6}{\sqrt{25+1+9+1}} = \tfrac{6}{\sqrt{36}} = 1\,.$$

◇

Na zakończenie zostawiamy Czytelnikowi zadanie rachunkowe do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie domowe 1. Wyznacz odległość, mierzoną w metryce euklidesowej, między prostą

$$\Lambda := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad x_1 - 1 = 0 \quad \wedge \quad \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3 - 2}{2} = \frac{x_4 + 2}{1} \right\}$$

i płaszczyzną

$$\Pi = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad x_1 + x_2 - x_4 = 0 \quad \wedge \quad 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \right\}.$$

Powodzenia!