KWADRYKI - ELEMENTY TEORII Z PRZYKŁADAMI

Kwadryki

Przedmiotem naszych rozważań będą pewne szczególne struktury geometryczne (uogólnione hiperpowierzchnie) w euklidesowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n \equiv \mathbb{R}^n$, modelowanej na euklidesowej przestrzeni kwadratowej $(\mathbb{R}^n, \delta)$, $\delta = \sum_{i=1}^n e^i \otimes e^i$ (w której zapisie $\{e^i\}^{i\in\overline{1,n}}$ jest bazą dualną względem bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$), stowarzyszone z trójkami (Q, φ, c) złożonymi z formy kwadratowej $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, formy liniowej $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i stałej $c \in \mathbb{R}$. Struktury te opisuje

Definicja 1. We wprowadzonym powyżej zapisie **funkcją kwadratową na $\mathbb{E}^n$ stowarzyszoną z** (Q, φ, c) nazywamy odwzorowanie

$$F_{(Q,\varphi,c)} := Q + \varphi + c \; : \; \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; x \longmapsto Q(x) + \varphi(x) + c\,.$$

Kwadryka w $\mathbb{E}^n$ stowarzyszona z (Q, φ, c) to poziomica

$$K_n(Q, \varphi, c) := F^{-1}_{(Q,\varphi,c)}\big(\{0\}\big)\,.$$

Zachodzi fundamentalne

Twierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $B_Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie symetryczną formą dwuliniową stowarzyszoną z Q wedle formuły

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n} \; : \; Q(x) = B_Q(x, x)\,.$$

Ilekroć istnieje wektor $x_* \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$\varphi = -2B_Q(x_*, \cdot)\,, \tag{1}$$

istnieje ruch euklidesowy $(R, x_*) \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta) \times \mathbb{R}^n \equiv \mathrm{SISO}(n)$ i stowarzyszony z nim układ współrzędnych ortogonalnych

$$\big(Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\big) \; : \; \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}_n$$

o początku w x_* powiązany z wyjściowym (standardowym) układem współrzędnych

$$\big(X^1, X^2, \ldots, X^n\big) \; : \; \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}_n \; : \; (x^1, x^2, \ldots, x^n)^{\mathrm{T}} \longmapsto (x^1, x^2, \ldots, x^n)\,,$$

$$x_i \equiv X_i\big((x^1, x^2, \ldots, x^n)^{\mathrm{T}}\big)\,, \qquad i \in \overline{1,n}$$

(o początku w 0) poprzez transformację afiniczną (zapiasaną dla $x_*^j \equiv X^j(x_*)$, $j \in \overline{1,n}$)

$$Y^i = \big(R^{-1}\big)^i{}_j \, \big(X^j - x_*^j\big)\,, \qquad i \in \overline{1,n}\,,$$

w którym kwadryka $K_n(Q, \varphi, c)$ jest miejscem geometrycznym równania

$$(\mathrm{S}) \qquad : \qquad \sum_{i_+=1}^{p} \lambda_{i_+} \big(Y^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \lambda_{i_-} \big(Y^{i_-}\big)^2 + c - B_Q(x_*, x_*) = 0$$

o stałych współczynnikach $\lambda_{i_\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$, przy czym $(p, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ jest sygnaturą Q. W szczególności więc jeśli pośród wektorów x_* określonych powyżej istnieje taki, który spełnia równość

$$B_Q(x_*, x_*) = c\,,$$

kwadrykę $K_n(Q, \varphi, c)$ w odnośnym układzie współrzędnych opisuje równanie

$$(\mathrm{sS}) \qquad : \qquad \sum_{i_+=1}^{p} \lambda_{i_+} \big(Y^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \lambda_{i_-} \big(Y^{i_-}\big)^2 = 0\,.$$

W przeciwnym przypadku, tj., gdy równanie (1) nie ma rozwiązania, istnieje ruch euklidesowy $(S, o_*) \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta) \times \mathbb{R}^n \equiv \mathrm{SISO}(n)$ i stowarzyszony z nim układ współrzędnych ortogonalnych

$$\big(Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\big) \ : \ \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}_n$$

o początku w o_* powiązany z wyjściowym (standardowym) układem współrzędnych $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ (j/w) poprzez transformację afiniczną (zapiasaną dla $o_*^j \equiv X^j(o_*)$, $j \in \overline{1,n}$)

$$Z^i = \big(S^{-1}\big)^i{}_j \, \big(X^j - o_*^j\big)\,, \qquad\qquad i \in \overline{1,n}\,,$$

w którym kwadryka $K_n(Q, \varphi, c)$ jest miejscem geometrycznym równania

$$\sum_{i_+=1}^{p} \mu_{i_+} \big(Z^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \mu_{i_-} \big(Z^{i_-}\big)^2 + \mu\, Z^{p+q+1} + c - B_Q(o_*, o_*) = 0$$

o stałych współczynnikach $\mu_{i_\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$ i $\mu \in \mathbb{R}^\times$, zatem w układzie otrzymanym z tego ostatniego poprzez przesunięcie

$$Z^i \longmapsto Z^i + \mu^{-1}\big(c - B_Q(o_*, o_*)\big)\, \delta^i{}_{p+q+1} =: \tfrac{\mu}{|\mu|}\, U^i\,, \qquad i \in \overline{1,n}$$

jego początku równanie to przyjmuje prostszą postać

$$(\mathrm{bS}) \qquad : \qquad \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+} \big(U^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-} \big(U^{i_-}\big)^2 + U^{p+q+1} = 0$$

ze stałymi współczynnikami $\nu_{i_\pm} \equiv |\mu|^{-1}\, \mu_{i_\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Dowód: Funkcję kwadratową $F_{(Q,\varphi,c)}$ możemy zapisać w terminach współrzędnych standardowych jako

$$F_{(Q,\varphi,c)} = b_{ij}\, X^i\, X^j + f_i\, X^i + c\,,$$

gdzie $b_{ij} = b_{ji}$ (wzgl. f_i) są elementami macierzy

$$\mathbb{B}_Q \equiv [B_Q]_E$$

formy dwuliniowej B_Q (wzgl. formy liniowej φ) w bazie standardowej $\mathbb{R}^n$. Istnienie x_* pozwala przepisać powyższe w nowych współrzędnych

$$\widetilde{Y}^i := X^i - x_*^i\,, \qquad i \in \overline{1,n}$$

w zredukowanej postaci

$$\begin{aligned}
F_{(Q,\varphi,c)} &= b_{ij}\,\big(\widetilde{Y}^i + x_*^i\big)\,\big(\widetilde{Y}^j + x_*^j\big) + f_i\,\big(\widetilde{Y}^i + x_*^i\big) + c \\
&= b_{ij}\,\widetilde{Y}^i\,\widetilde{Y}^j + \big(2b_{ij}\,x_*^i + f_i\big)\,\widetilde{Y}^j + c + b_{ij}\,x_*^i\,x_*^j + f_i\,x_*^i \\
&\equiv b_{ij}\,\widetilde{Y}^i\,\widetilde{Y}^j + \big(2B_Q(x_*,\cdot) + \varphi\big)\big(\widetilde{Y}^i(\cdot)\,e_i\big) + c + \big(2B_Q(x_*,\cdot) + \varphi\big)(x_*) - B_Q(x_*, x_*) \\
&= b_{ij}\,\widetilde{Y}^i\,\widetilde{Y}^j + c - B_Q(x_*, x_*)\,,
\end{aligned}$$

która prowadzi wprost do tej postulowanej, a to na gruncie Twierdzenia Widmowego odniesionego do operatora symetrycznego (więc normalnego) $\mathbb{B}_Q$, stwierdzającego istnienie macierzy (ortogonalnej zmiany baz) $R \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta)$ o własności

$$\mathbb{B}_Q = R \cdot \mathrm{diag}\,\big(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\big) \cdot R^{-1}\,.$$

Nieistnienie x_* implikuje, w szczególności, nieodwracalność macierzy $\mathbb{B}_Q$, a zatem istnienie niezerowej podprzestrzeni $\mathrm{Ker}\, B_Q \subset \mathbb{R}^n$ o dopełnieniu ortogonalnym $\mathrm{Ker}\, B_Q^\perp$ (względem euklidesowego iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)_\delta$ zadawanego przez δ),

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, B_Q \oplus \mathrm{Ker}\, B_Q^\perp\,.$$

Z powyższym rozkładem ortogonalnym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest związana (zupełna) para rzutów prostopadłych $(\mathsf{P}_Q, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathsf{P}_Q)$, z których pierwszy jest rzutem na $\mathrm{Ker}\, B_Q \equiv \mathrm{Im}\, P_Q$ wzdłuż $\mathrm{Ker}\, B_Q^\perp$.

Oznaczywszy wektor kolumnowy utworzony ze współczynników f_i rozkładu φ w bazie dualnej do E symbolem

$$\phi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} ,$$

związanym warunkiem

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \ : \ \varphi(x) \equiv (\phi|x)_\delta ,$$

dokonujemy rozkładu (prostopadłego)

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 ,$$

$$\phi_0 \equiv \mathsf{P}_Q(\phi) , \qquad\qquad \phi_1 \equiv (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathsf{P}_Q)(\phi)$$

i stwierdzamy istnienie wektora $o_* \in \mathbb{R}^n$ o własności (zapisanej w terminach $o_*^j = X^j(o_*)$ i $\phi_1^j = X^j(\phi_1)$)

$$2b_{ij}\, o_*^j + \delta_{ij}\, \phi_1^j = 0 ,$$

czyli – równoważnie –

$$2B_Q(o_*, \cdot) + \varphi \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathsf{P}_Q) = 0 , \tag{2}$$

co znacza, że w nowych współrzędnych

$$\widetilde{Z}^i := X^i - o_*^i , \qquad i \in \overline{1, n}$$

funkcja kwadratowa $F_{(Q,\varphi,c)}$ przepisuje się w postaci (otrzymanej analogicznie jak poprzednio)

$$F_{(Q,\varphi,c)} = b_{ij}\, \widetilde{Z}^i\, \widetilde{Z}^j + \big(\varphi \circ \mathsf{P}_Q\big)_i\, \widetilde{Z}^i + c + \varphi \circ \mathsf{P}_Q(o_*) - B_Q(o_*, o_*) .$$

Oczywiście przy rozwiązywaniu równania (2) składową o_* z podprzestrzeni $\operatorname{Ker} B_Q$ można położyć równą zeru, a wówczas otrzymujemy prostszą postać funkcji

$$F_{(Q,\varphi,c)} = b_{ij}\, \widetilde{Z}^i\, \widetilde{Z}^j + \big(\varphi \circ \mathsf{P}_Q\big)_i\, \widetilde{Z}^i + c - B_Q(o_*, o_*) .$$

W tym momencie wystarczy po raz kolejny przywołać Twierdzenie Widmowe dla operatora symetrycznego $\mathbb{B}_Q$, aby skonstatować istnienie macierzy (ortogonalnej zmiany baz) $S \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta)$ o własności

$$\mathbb{B}_Q = S \cdot \mathrm{diag}\,\big(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\big) \cdot S^{-1} ,$$

przy czym zawsze możliwy jest wybór takiej bazy ortogonalnej w podprzestrzeni własnej $\operatorname{Ker} B_Q \equiv V_0(B_Q)$, której pierwszym elementem (o indeksie $p+q+1$) jest wektor dualny do formy $\varphi \circ \mathsf{P}_Q$, a wówczas w nowych współrzędnych

$$Z^i = \big(S^{-1}\big)^i{}_j\, \widetilde{Z}^j , \qquad\qquad i \in \overline{1, n} ,$$

otrzymujemy postulowaną postać $F_{(Q,\varphi,c)}$ z $\mu \equiv (\varphi \circ \mathsf{P}_Q)_i\, S^i{}_{p+q+1} \neq 0$. □

Ażeby w pełni zrozumieć terminologię stosowaną w odniesieniu do kwadryk stowarzyszonych z funkcjami kwadratowymi redukowalnymi do dwóch strukturalnie odmiennych postaci: (S) (i podpostaci (sS)) oraz (bS) z tezy Tw. 1, potrzebujemy jeszcze

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. **Środkiem symetrii** kwadryki $K_n(Q, \varphi, c)$ nazywamy dowolny punkt $x_s \in \mathbb{E}^n$ o własności

$$(\mathrm{Sym})(x_s) \qquad : \qquad \forall_{x \in \mathbb{E}^n} \ : \ \big(\ x \in K_n(Q, \varphi, c) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_s - x \in K_n(Q, \varphi, c)\ \big) .$$

Zbiór środków symetrii będziemy oznaczać symbolem

$$C\big(K_n(Q, \varphi, c)\big) \equiv \{\ x_s \in \mathbb{E}^n \quad | \quad (\mathrm{Sym})(x_s)\ \} .$$

Bez trudu dowodzimy

Twierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Każdy punkt $x_* \in \mathbb{E}^n$ spełniający Równ. (1) jest środkiem symetrii odnośnej kwadryki. W szczególności więc kwadryki stowarzyszone z funkcjami kwadratowymi redukowalnymi (w sposób zdefiniowany w treści Tw. 1) do postaci (S) mają środek symetrii, skąd też ich nazwa – są to **kwadryki środkowosymetryczne**. Te spośród nich, które można sprowadzić do postaci (sS), nazywamy **stożkowymi**, gdyż zawierają x_*, a wraz z dowolnym punktem $x \in K_n(Q, \varphi, c)$ także prostą łączącą ten punkt z x_*.

Dowód: Oczywisty. □

Mamy też nieco mniej oczywiste

Twierdzenie 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Kwadryki stowarzyszone z funkcjami kwadratowymi redukowalnymi (w sposób zdefiniowany w treści Tw. 1) do postaci (bS) nie mają środka symetrii, skąd też ich nazwa – są to **kwadryki bez środka symetrii**, zwane też **parabolicznymi**.

Dowód: Rozważmy definiującą kwadrykę $K_n(Q, \varphi, c)$ funkcję kadratową $F_{(Q,\varphi,c)}$ w zapisie zredukowanym (bS). Zauważmy, że więzy

$$F^{-1}_{(Q,\varphi,c)}\big(\{0\}\big) = K_n(Q, \varphi, c)$$

można rozwikłać ze względu na współrzędną $u \equiv U_{p+q+1}$ czyniąc współrzędne $U_{j\neq p+q+1} \in \mathbb{R}$ zmiennymi niezależnymi, przebiegającymi swobodnie pełen zakres $\mathbb{R}$, od których ta pierwsza zależy funkcjonalnie wedle formuły (zależność of zmiennych $U_{k>p+q+1}$ jest trywialna)

$$u = f\big(U_{i_+}, U_{i_-}, U_{k>p+q+1}\big)\,, \qquad f\big(U_{i_+}, U_{i_-}, U_{k>p+q+1}\big) = \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,\big(U^{i_-}\big)^2 - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,\big(U^{i_+}\big)^2\,.$$

Z powyższego zapisu wynika jasno, że punktu $x_0 \in \mathbb{E}^n$ o współrzędnych $U_{i_+}(x_0) = 0 = U_{i_-}(x_0)$, $(i_+, i_-) \in \overline{1,p} \times \overline{p+1, p+q}$ i (w konsekwencji) $u(x_0) = 0$ należą do kwadryki,

$$x_0 \in K_n(Q, \varphi, c)\,.$$

Odnosząc do dowolnego z nich definicyjną własność środka symetrii, stwierdzamy (wobec liniowości funkcji współrzędniowych), że także

$$2x_s \in K_n(Q, \varphi, c)\,,$$

wobec czego z równości (definicyjnej), zapisanej dla dowolnego $x \in K_n(Q, \varphi, c)$,

$$\begin{aligned} u(2x_s) - u(x) \quad = \quad & \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,\big(U^{i_-}(2x_s)\big)^2 - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,\big(U^{i_+}(2x_s)\big)^2 \\ & + \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,\big(U^{i_-}(x)\big)^2 - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,\big(U^{i_+}(x)\big)^2 \\ & -4\left(\sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,U^{i_-}(x_s)\,U^{i_-}(x) - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,U^{i_+}(2x_s)\,U^{i_+}(x)\right) \end{aligned}$$

wyprowadzamy tożsamość

$$u(x) = 2\left(\sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,U^{i_-}(x_s)\,U^{i_-}(x) - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,U^{i_+}(2x_s)\,U^{i_+}(x)\right).$$

Zauważmy jednak, że ilekroć $x \in K_n(Q, \varphi, c)$, do kwadryki należy też punkt „sprzężony" $x' \in \mathbb{E}^n$ o współrzędnych związanych ze współrzędnymi x relacją

$$U^{i_\pm}(x') = -U^{i_\pm}(x)$$

(istnienie takich par (x, x') wynika ze swobody zmienności zmiennych niezależnych), z której już *wynika* relacja

$$u(x') = u(x) .$$

Jednakowoż w świetle wyprowadzonej powyżej tożsamości jest zarazem

$$u(x') = -u(x) ,$$

co prowadzi do wniosku

$$u(x) = 0 ,$$

sprzecznego z wyjściowym założeniem o (nieredukowalnym) typie rozważanej kwadryki. □

Na koniec wprowadzimy jeszcze pojęcia kwantyfikujące własności symetrii rozpatrywanych geometrii. Oto więc mamy

Definicja 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $K_n(Q, \varphi, c)$ będzie kwadryką w przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. Oś ortogonalnego układu współrzędnych normalizującego postać funkcji kwadratowej definiującej $K_n(Q, \varphi, c)$ (czyli sprowadzającego ją do jednej z postaci **normalnych**: (S), (sS) lub (bS)) będąca osią symetrii (odbiciowej) kwadryki, tj. taka, w której odbicie (prostopadłe) dowolnego punktu kwadryki przeprowadza tenże punkt na punkt kwadryki, jest nazywana **osią główną kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$. **Cięciwa kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$ to odcinek prostej w $\mathbb{E}^n$, którego końce należą do kwadryki i którego żaden punkt wewnętrzny nie ma tej własności. **Hiperpłaszczyzna średnicowa kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$ sprzężona z daną cięciwą, to taka, która przecina na równe połowy wszystkie cięciwy równoległe do tejże. Ilekroć hiperpłaszczyzna ta przecina definiujące ją cięciwy prostopadle, jest ona hiperpłaszczyzną symetrii (odbiciowej) kwadryki, zwaną **hiperpłaszczyzną (średnicową) główną kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$.

Poniżej zilustrujemy wszystkie (nietrywialne) rozważone powyżej ewentualności.

Zadanie 1. Określ typ kwadryki $K_3(Q, \varphi, c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; (x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}} \longmapsto 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 2x^1x^2 ,$$

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; (x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}} \longmapsto \tfrac{3}{\sqrt{2}}\,(x^1 - x^2) ,$$

$$c = \tfrac{1}{2} .$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

<u>*Rozwiązanie:*</u> ...

◇

Zadanie 2. Określ typ kwadryki $K_3(Q, \varphi, c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^1, x^2, x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto \big(x^1\big)^2 - 11\big(x^2\big)^2 - 8\big(x^3\big)^2 + 8x^1x^2 - 20x^1x^3 + 28x^2x^3 ,$$

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^1, x^2, x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 18x^1 + 36x^2 - 54x^3 ,$$

$$c = -9 .$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

<u>*Rozwiązanie:*</u> ...

◇

Zadanie 3. Określ typ kwadryki $K_3(Q,\varphi,c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^1,x^2,x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 7x^1x^2 + 2x^2x^3 + 2x^1x^3\,,$$

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^1,x^2,x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto -x^1 - x^2 - 4x^3\,,$$

$$c = -6\,.$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

Rozwiązanie: …

◇

Zadanie 4. Określ typ kwadryki $K_3(Q,\varphi,c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^1,x^2,x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 280\big(x^1\big)^2 + 343\big(x^2\big)^2 + 7\big(x^3\big)^2 - 700x^1x^2 - 100x^1x^3 + 152x^2x^3\,,$$

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^1,x^2,x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 780x^1 - 1110x^2 - 120x^3\,,$$

$$c = 720\,.$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

Rozwiązanie: …

◇

Na zakończenie zostawiamy Czytelnikowi zagadnienie do samodzielnego rozważenia i rozwiązania.

Zadanie domowe 1. Określ typ kwadryki $K_3(Q,\varphi,c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^1,x^2,x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 10\big(x^1\big)^2 + 19\big(x^2\big)^2 + 7\big(x_3\big)^2 + 20x^1x^2 + 28x^1x^3 - 8x^2x^3\,,$$

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \big(x^2\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 48x^1 - 24x^2 + 114x^3\,,$$

$$c = 144\,.$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

Powodzenia!