ALGEBRA II R W CZASACH ZARAZY
(8. CZERWCA 2020 R.)

Kwadryki

Przedmiotem naszych rozważań będą pewne szczególne struktury geometryczne (uogólnione hiperpowierzchnie) w euklidesowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n \equiv \mathbb{R}^n$, modelowanej na euklidesowej przestrzeni kwadratowej $(\mathbb{R}^n, \delta)$, $\delta = \sum_{i=1}^n e^i \otimes e^i$ (w której zapisie $\{e^i\}^{i\in\overline{1,n}}$ jest bazą dualną względem bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$), stowarzyszone z trójkami (Q, φ, c) złożonymi z formy kwadratowej $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, formy liniowej $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i stałej $c \in \mathbb{R}$. Struktury te opisuje

Definicja 1. We wprowadzonym powyżej zapisie **funkcją kwadratową na $\mathbb{E}^n$ stowarzyszoną z (Q, φ, c)** nazywamy odwzorowanie

$$F_{(Q,\varphi,c)} := Q + \varphi + c \; : \; \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; x \longmapsto Q(x) + \varphi(x) + c\,.$$

Kwadryka w $\mathbb{E}^n$ stowarzyszona z (Q, φ, c) to poziomica

$$K_n(Q, \varphi, c) := F^{-1}_{(Q,\varphi,c)}\big(\{0\}\big)\,.$$

Zachodzi fundamentalne

Twierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $B_Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie symetryczną formą dwuliniową stowarzyszoną z Q wedle formuły

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n} \; : \; Q(x) = B_Q(x, x)\,.$$

Ilekroć istnieje wektor $x_* \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$\varphi = -2B_Q(x_*, \cdot)\,, \tag{1}$$

istnieje ruch euklidesowy $(R, x_*) \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta) \times \mathbb{R}^n \equiv \mathrm{SISO}(n)$ i stowarzyszony z nim układ współrzędnych ortogonalnych

$$\big(Y^1, Y^2, \ldots, Y^n\big) \; : \; \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}_n$$

o początku w x_* powiązany z wyjściowym (standardowym) układem współrzędnych

$$\big(X^1, X^2, \ldots, X^n\big) \; : \; \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}_n \; : \; (x^1, x^2, \ldots, x^n)^{\mathrm{T}} \longmapsto (x^1, x^2, \ldots, x^n)\,,$$

$$x_i \equiv X_i\big((x^1, x^2, \ldots, x^n)^{\mathrm{T}}\big)\,, \qquad i \in \overline{1,n}$$

(o początku w 0) poprzez transformację afiniczną (zapiasaną dla $x^j_* \equiv X^j(x_*)$, $j \in \overline{1,n}$)

$$Y^i = \big(R^{-1}\big)^i{}_j\,\big(X^j - x^j_*\big)\,, \qquad i \in \overline{1,n}\,,$$

w którym kwadryka $K_n(Q, \varphi, c)$ jest miejscem geometrycznym równania

$$\text{(S)} \quad : \quad \sum_{i_+=1}^{p} \lambda_{i_+}\,\big(Y^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \lambda_{i_-}\,\big(Y^{i_-}\big)^2 + c - B_Q(x_*, x_*) = 0$$

o stałych współczynnikach $\lambda_{i_\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$, przy czym $(p, q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ jest sygnaturą Q. W szczególności więc jeśli pośród wektorów x_* określonych powyżej istnieje taki, który spełnia równość

$$B_Q(x_*, x_*) = c\,,$$

kwadrykę $K_n(Q, \varphi, c)$ w odnośnym układzie współrzędnych opisuje równanie

$$\text{(sS)} \quad : \quad \sum_{i_+=1}^{p} \lambda_{i_+}\,\big(Y^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \lambda_{i_-}\,\big(Y^{i_-}\big)^2 = 0\,.$$

W przeciwnym przypadku, tj., gdy równanie (1) nie ma rozwiązania, istnieje ruch euklidesowy $(S, o_*) \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta) \times \mathbb{R}^n \equiv \mathrm{SISO}(n)$ i stowarzyszony z nim układ współrzędnych ortogonalnych

$$\big(Z^1, Z^2, \ldots, Z^n\big) \;:\; \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}_n$$

o początku w o_* powiązany z wyjściowym (standardowym) układem współrzędnych $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ (j/w) poprzez transformację afiniczną (zapiasaną dla $o_*^j \equiv X^j(o_*)$, $j \in \overline{1,n}$)

$$Z^i = \big(S^{-1}\big)^i{}_j \,\big(X^j - o_*^j\big)\,, \qquad\qquad i \in \overline{1,n}\,,$$

w którym kwadryka $K_n(Q, \varphi, c)$ jest miejscem geometrycznym równania

$$\sum_{i_+=1}^{p} \mu_{i_+}\,\big(Z^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \mu_{i_-}\,\big(Z^{i_-}\big)^2 + \mu\, Z^{p+q+1} + c - B_Q(o_*, o_*) = 0$$

o stałych współczynnikach $\mu_{i_\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$ i $\mu \in \mathbb{R}^\times$, zatem w układzie otrzymanym z tego ostatniego poprzez przesunięcie

$$Z^i \longmapsto Z^i + \mu^{-1}\,\big(c - B_Q(o_*, o_*)\big)\,\delta^i{}_{p+q+1} =: \tfrac{\mu}{|\mu|}\,U^i\,, \qquad i \in \overline{1,n}$$

jego początku równanie to przyjmuje prostszą postać

$$(\mathrm{bS}) \qquad : \qquad \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,\big(U^{i_+}\big)^2 - \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,\big(U^{i_-}\big)^2 + U^{p+q+1} = 0$$

ze stałymi współczynnikami $\nu_{i_\pm} \equiv |\mu|^{-1}\,\mu_{i_\pm} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Dowód: Funkcję kwadratową $F_{(Q,\varphi,c)}$ możemy zapisać w terminach współrzędnych standardowych jako

$$F_{(Q,\varphi,c)} = b_{ij}\,X^i\,X^j + f_i\,X^i + c\,,$$

gdzie $b_{ij} = b_{ji}$ (wzgl. f_i) są elementami macierzy

$$\mathbb{B}_Q \equiv [B_Q]_E$$

formy dwuliniowej B_Q (wzgl. formy liniowej φ) w bazie standardowej $\mathbb{R}^n$. Istnienie x_* pozwala przepisać powyższe w nowych współrzędnych

$$\widetilde{Y}^i := X^i - x_*^i\,, \qquad i \in \overline{1,n}$$

w zredukowanej postaci

$$\begin{aligned}
F_{(Q,\varphi,c)} &= b_{ij}\,\big(\widetilde{Y}^i + x_*^i\big)\,\big(\widetilde{Y}^j + x_*^j\big) + f_i\,\big(\widetilde{Y}^i + x_*^i\big) + c \\
&= b_{ij}\,\widetilde{Y}^i\,\widetilde{Y}^j + \big(2b_{ij}\,x_*^i + f_i\big)\,\widetilde{Y}^j + c + b_{ij}\,x_*^i\,x_*^j + f_i\,x_*^i \\
&\equiv b_{ij}\,\widetilde{Y}^i\,\widetilde{Y}^j + \big(2B_Q(x_*,\cdot) + \varphi\big)\big(\widetilde{Y}^i(\cdot)\,e_i\big) + c + \big(2B_Q(x_*,\cdot) + \varphi\big)(x_*) - B_Q(x_*, x_*) \\
&= b_{ij}\,\widetilde{Y}^i\,\widetilde{Y}^j + c - B_Q(x_*, x_*)\,,
\end{aligned}$$

która prowadzi wprost do tej postulowanej, a to na gruncie Twierdzenia Widmowego odniesionego do operatora symetrycznego (więc normalnego) $\mathbb{B}_Q$, stwierdzającego istnienie macierzy (ortogonalnej zmiany baz) $R \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta)$ o własności

$$\mathbb{B}_Q = R \cdot \mathrm{diag}\,\big(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\big) \cdot R^{-1}\,.$$

Nieistnienie x_* implikuje, w szczególności, nieodwracalność macierzy $\mathbb{B}_Q$, a zatem istnienie niezerowej podprzestrzeni $\mathrm{Ker}\,B_Q \subset \mathbb{R}^n$ o dopełnieniu ortogonalnym $\mathrm{Ker}\,B_Q^\perp$ (względem euklidesowego iloczynu skalarnego $(\cdot|\cdot)_\delta$ zadawanego przez δ),

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,B_Q \oplus \mathrm{Ker}\,B_Q^\perp\,.$$

Z powyższym rozkładem ortogonalnym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest związana (zupełna) para rzutów prostopadłych $(\mathsf{P}_Q, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathsf{P}_Q)$, z których pierwszy jest rzutem na $\mathrm{Ker}\,B_Q \equiv \mathrm{Im}\,P_Q$ wzdłuż $\mathrm{Ker}\,B_Q^\perp$.

Oznaczywszy wektor kolumnowy utworzony ze współczynników f_i rozkładu φ w bazie dualnej do E symbolem

$$\phi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}\,,$$

związanym warunkiem

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n} \;:\; \varphi(x) \equiv (\phi|x)_\delta\,,$$

dokonujemy rozkładu (prostopadłego)

$$\phi = \phi_0 + \phi_1\,,$$

$$\phi_0 \equiv \mathsf{P}_Q(\phi)\,, \qquad\qquad \phi_1 \equiv (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathsf{P}_Q)(\phi)$$

i stwierdzamy istnienie wektora $o_* \in \mathbb{R}^n$ o własności (zapisanej w terminach $o_*^j = X^j(o_*)$ i $\phi_1^j = X^j(\phi_1)$)

$$2b_{ij}\, o_*^j + \delta_{ij}\, \phi_1^j = 0\,,$$

czyli – równoważnie –

$$2B_Q(o_*, \cdot) + \varphi \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathsf{P}_Q) = 0\,, \tag{2}$$

co znacza, że w nowych współrzędnych

$$\widetilde{Z}^i := X^i - o_*^i\,, \qquad i \in \overline{1,n}$$

funkcja kwadratowa $F_{(Q,\varphi,c)}$ przepisuje się w postaci (otrzymanej analogicznie jak poprzednio)

$$F_{(Q,\varphi,c)} = b_{ij}\, \widetilde{Z}^i\, \widetilde{Z}^j + \big(\varphi \circ \mathsf{P}_Q\big)_i\, \widetilde{Z}^i + c + \varphi \circ \mathsf{P}_Q(o_*) - B_Q(o_*, o_*)\,.$$

Oczywiście przy rozwiązywaniu równania (2) składową o_* z podprzestrzeni $\mathrm{Ker}\, B_Q$ można położyć równą zeru, a wówczas otrzymujemy prostszą postać funkcji

$$F_{(Q,\varphi,c)} = b_{ij}\, \widetilde{Z}^i\, \widetilde{Z}^j + \big(\varphi \circ \mathsf{P}_Q\big)_i\, \widetilde{Z}^i + c - B_Q(o_*, o_*)\,.$$

W tym momencie wystarczy po raz kolejny przywołać Twierdzenie Widmowe dla operatora symetrycznego $\mathbb{B}_Q$, aby skonstatować istnienie macierzy (ortogonalnej zmiany baz) $S \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \delta)$ o własności

$$\mathbb{B}_Q = S \cdot \mathrm{diag}\,\big(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\big) \cdot S^{-1}\,,$$

przy czym zawsze możliwy jest wybór takiej bazy ortogonalnej w podprzestrzeni własnej $\mathrm{Ker}\, B_Q \equiv V_0(B_Q)$, której pierwszym elementem (o indeksie $p+q+1$) jest wektor dualny do formy $\varphi \circ \mathsf{P}_Q$, a wówczas w nowych współrzędnych

$$Z^i = \big(S^{-1}\big)^i{}_j\, \widetilde{Z}^j\,, \qquad\qquad i \in \overline{1,n}\,,$$

otrzymujemy postulowaną postać $F_{(Q,\varphi,c)}$ z $\mu \equiv (\varphi \circ \mathsf{P}_Q)_i\, S^i{}_{p+q+1} \neq 0$. □

Ażeby w pełni zrozumieć terminologię stosowaną w odniesieniu do kwadryk stowarzyszonych z funkcjami kwadratowymi redukowalnymi do dwóch strukturalnie odmiennych postaci: (S) (i podpostaci (sS)) oraz (bS) z tezy Tw. 1, potrzebujemy jeszcze

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. **Środkiem symetrii** kwadryki $K_n(Q,\varphi,c)$ nazywamy dowolny punkt $x_s \in \mathbb{E}^n$ o własności

$$(\mathrm{Sym})(x_s) \qquad : \qquad \forall_{x\in\mathbb{E}^n} \;:\; \big(\; x \in K_n(Q,\varphi,c) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x_s - x \in K_n(Q,\varphi,c)\;\big)\,.$$

Zbiór środków symetrii będziemy oznaczać symbolem

$$C\big(K_n(Q,\varphi,c)\big) \equiv \{\; x_s \in \mathbb{E}^n \quad | \quad (\mathrm{Sym})(x_s)\;\}\,.$$

Bez trudu dowodzimy

Twierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Każdy punkt $x_* \in \mathbb{E}^n$ spełniający Równ. (1) jest środkiem symetrii odnośnej kwadryki. W szczególności więc kwadryki stowarzyszone z funkcjami kwadratowymi redukowalnymi (w sposób zdefiniowany w treści Tw. 1) do postaci (S) mają środek symetrii, skąd też ich nazwa – są to **kwadryki środkowosymetryczne**. Te spośród nich, które można sprowadzić do postaci (sS), nazywamy **stożkowymi**, gdyż zawierają x_*, a wraz z dowolnym punktem $x \in K_n(Q, \varphi, c)$ także prostą łączącą ten punkt z x_*.

Dowód: Oczywisty. □

Mamy też nieco mniej oczywiste

Twierdzenie 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. Kwadryki stowarzyszone z funkcjami kwadratowymi redukowalnymi (w sposób zdefiniowany w treści Tw. 1) do postaci (bS) nie mają środka symetrii, skąd też ich nazwa – są to **kwadryki bez środka symetrii**, zwane też **parabolicznymi**.

Dowód: Rozważmy definiującą kwadrykę $K_n(Q, \varphi, c)$ funkcję kadratową $F_{(Q,\varphi,c)}$ w zapisie zredukowanym (bS). Zauważmy, że więzy

$$F^{-1}_{(Q,\varphi,c)}\big(\{0\}\big) = K_n(Q, \varphi, c)$$

można rozwikłać ze względu na współrzędną $u \equiv U_{p+q+1}$ czyniąc współrzędne $U_{j\neq p+q+1} \in \mathbb{R}$ zmiennymi niezależnymi, przebiegającymi swobodnie pełen zakres $\mathbb{R}$, od których ta pierwsza zależy funkcjonalnie wedle formuły (zależność of zmiennych $U_{k>p+q+1}$ jest trywialna)

$$u = f\big(U_{i_+}, U_{i_-}, U_{k>p+q+1}\big)\,, \qquad f\big(U_{i_+}, U_{i_-}, U_{k>p+q+1}\big) = \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,\big(U^{i_-}\big)^2 - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,\big(U^{i_+}\big)^2\,.$$

Z powyższego zapisu wynika jasno, że punktu $x_0 \in \mathbb{E}^n$ o współrzędnych $U_{i_+}(x_0) = 0 = U_{i_-}(x_0)$, $(i_+, i_-) \in \overline{1,p} \times \overline{p+1, p+q}$ i (w konsekwencji) $u(x_0) = 0$ należą do kwadryki,

$$x_0 \in K_n(Q, \varphi, c)\,.$$

Odnosząc do dowolnego z nich definicyjną własność środka symetrii, stwierdzamy (wobec liniowości funkcji współrzędniowych), że także

$$2x_s \in K_n(Q, \varphi, c)\,,$$

wobec czego z równości (definicyjnej), zapisanej dla dowolnego $x \in K_n(Q, \varphi, c)$,

$$\begin{aligned} u(2x_s) - u(x) \quad = \quad & \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,\big(U^{i_-}(2x_s)\big)^2 - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,\big(U^{i_+}(2x_s)\big)^2 \\ & + \sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,\big(U^{i_-}(x)\big)^2 - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,\big(U^{i_+}(x)\big)^2 \\ & -4\left(\sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,U^{i_-}(x_s)\,U^{i_-}(x) - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,U^{i_+}(2x_s)\,U^{i_+}(x)\right) \end{aligned}$$

wyprowadzamy tożsamość

$$u(x) = 2\left(\sum_{i_-=p+1}^{p+q} \nu_{i_-}\,U^{i_-}(x_s)\,U^{i_-}(x) - \sum_{i_+=1}^{p} \nu_{i_+}\,U^{i_+}(2x_s)\,U^{i_+}(x)\right).$$

Zauważmy jednak, że ilekroć $x \in K_n(Q, \varphi, c)$, do kwadryki należy też punkt „sprzężony" $x' \in \mathbb{E}^n$ o współrzędnych związanych ze współrzędnymi x relacją

$$U^{i_\pm}(x') = -U^{i_\pm}(x)$$

(istnienie takich par (x, x') wynika ze swobody zmienności zmiennych niezależnych), z której już *wynika* relacja

$$u(x') = u(x)\,.$$

Jednakowoż w świetle wyprowadzonej powyżej tożsamości jest zarazem

$$u(x') = -u(x)\,,$$

co prowadzi do wniosku

$$u(x) = 0\,,$$

sprzecznego z wyjściowym założeniem o (nieredukowalnym) typie rozważanej kwadryki. □

Na koniec wprowadzimy jeszcze pojęcia kwantyfikujące własności symetrii rozpatrywanych geometrii. Oto więc mamy

Definicja 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $K_n(Q, \varphi, c)$ będzie kwadryką w przestrzeni afinicznej $\mathbb{E}^n$. Oś ortogonalnego układu współrzędnych normalizującego postać funkcji kwadratowej definiującej $K_n(Q, \varphi, c)$ (czyli sprowadzającego ją do jednej z postaci **normalnych**: (S), (sS) lub (bS)) będąca osią symetrii (odbiciowej) kwadryki, tj. taka, w której odbicie (prostopadłe) dowolnego punktu kwadryki przeprowadza tenże punkt na punkt kwadryki, jest nazywana **osią główną kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$. **Cięciwa kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$ to odcinek prostej w $\mathbb{E}^n$, którego końce należą do kwadryki i którego żaden punkt wewnętrzny nie ma tej własności. **Hiperpłaszczyzna średnicowa kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$ sprzężona z daną cięciwą, to taka, która przecina na równe połowy wszystkie cięciwy równoległe do tejże. Ilekroć hiperpłaszczyzna ta przecina definiujące ją cięciwy prostopadle, jest ona hiperpłaszczyzną symetrii (odbiciowej) kwadryki, zwaną **hiperpłaszczyzną (średnicową) główną kwadryki** $K_n(Q, \varphi, c)$.

Poniżej zilustrujemy wszystkie (nietrywialne) rozważone powyżej ewentualności.

Zadanie 1. Określ typ kwadryki $K_3(Q, \varphi, c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ (x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}} \longmapsto 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 2x^1x^2\,,$$

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ (x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}} \longmapsto \tfrac{3}{\sqrt{2}}\,(x^1 - x^2)\,,$$

$$c = \tfrac{1}{2}\,.$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

Rozwiązanie: Rozważana kwadryka to miejsce geometryczne warunku współrzędniowego

$$2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 3(x^3)^2 - 2x^1x^2 + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\,(x^1 - x^2) + \tfrac{1}{2} = 0\,.$$

Zaczniemy od sprawdzenia rozwiązywalności warunku (istnienia środka)

$$2\mathbb{B}_Q\, x_* \equiv 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_*^1 \\ x_*^2 \\ x_*^3 \end{pmatrix} = \tfrac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -\phi\,.$$

Wobec odwracalności macierzy układu (będącej macierzą formy kwadratowej w bazie standardowej),

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 9 \neq 0\,,$$

stwierdzamy istnienie jednoznacznego rozwiązania:

$$x_* \equiv \begin{pmatrix} x_*^1 \\ x_*^2 \\ x_*^3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

o własności

$$B_Q(x_*, x_*) = \tfrac{3}{4} \neq \tfrac{1}{2} \equiv c\,,$$

mamy zatem do czynienia z kwadryką środkowosymetryczną typu niestożkowego, której równanie definiujące we współrzędnych

$$\widetilde{y}^1 = x^1 + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,, \qquad \widetilde{y}^2 = x^2 - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,, \qquad \widetilde{y}^3 = x^3$$

przyjmuje postać

$$2\big(\widetilde{y}^1\big)^2 + 2\big(\widetilde{y}^2\big)^2 + 3\big(\widetilde{y}^3\big)^2 - 2\widetilde{y}^1\widetilde{y}^2 - \tfrac{1}{4} = 0\,.$$

Na obecnym etapie pozostaje sprowadzić funkcję definiującą kwadryki na osie główne, co czynimy znajdując ortonormalną bazę własną $\mathbb{B}_Q$. W tym celu wyznaczamy widmo tej macierzy na podstawie analizy jej wielomianu charakterystycznego

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)\,(\lambda-3)^2$$

w postaci

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{B}_Q) = \big\{1^{(1)}, 3^{(2)}\big\}\,.$$

Wyznaczamy wektory własne $\mathbb{B}_Q$ stowarzyszone z wartościami własnymi: $\lambda = 1$,

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Big\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv f_1 \Big\rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

oraz $\lambda = 3$,

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Big\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv f_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv f_3 \Big\rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Baza $F = (f_1, f_2, f_3)$ jest jawnie ortonormalna, a ze standardową wiąże ją macierz przejścia

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

W obróconych współrzędnych

$$\begin{pmatrix} \widetilde{y}^1 \\ \widetilde{y}^2 \\ \widetilde{y}^3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix},$$

związanych z wyjściowymi relacjami

$$\big(y^1, y^2, y^3\big) = \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(x^1 + x^2\big), \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(x^1 - x^2\big) + \tfrac{1}{2}, x^3\big)\,,$$

równanie kwadryki przybiera postać normalną

$$\big(y^1\big)^2 + 3\,\big(y^2\big)^2 + 3\,\big(y^3\big)^2 - \tfrac{1}{4} = 0\,,$$

z której odczytujemy bez trudu typ kwadryki: jest to elipsoida obrotowa o półosiach o długościach $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\big)$ i wcześniej wyznaczonym środku symetrii,

$$C\big(K_3(Q, \varphi, c)\big) = \big\{\ \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}\ \big\}\,.$$

Jej osie główne to

$$\Lambda_i = x_* + \langle f_i \rangle_{\mathbb{R}}\,, \qquad i \in \{1, 2, 3\}\,,$$

a płaszczyzny główne to

$$\Pi_{ij} = x_* + \langle f_i, f_j \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \{\ x \in \mathbb{E}^3 \quad | \quad \varepsilon_{ijk}\, y^k(x) = 0\ \}\,, \qquad (i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}\,.$$

$\diamond$

Zadanie 2. Określ typ kwadryki $K_3(Q,\varphi,c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ \left(x^1,x^2,x^3\right)^{\mathrm{T}} \longmapsto \left(x^1\right)^2 - 11\left(x^2\right)^2 - 8\left(x^3\right)^2 + 8x^1x^2 - 20x^1x^3 + 28x^2x^3\,,$$

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ \left(x^1,x^2,x^3\right)^{\mathrm{T}} \longmapsto 18x^1 + 36x^2 - 54x^3\,,$$

$$c = -9\,.$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

<u>*Rozwiązanie:*</u> Rozpatrywana kwadryka to miejsce geometryczne warunku współrzędniowego

$$\left(x^1\right)^2 - 11\left(x^2\right)^2 - 8\left(x^3\right)^2 + 8x^1x^2 - 20x^1x^3 + 28x^2x^3 + 18x^1 + 36x^2 - 54x^3 - 9 = 0\,.$$

Zaczniemy od sprawdzenia rozwiązywalności warunku

$$2\mathbb{B}_Q\,x_* \equiv 2\begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ 4 & -11 & 14 \\ -10 & 14 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_*^1 \\ x_*^2 \\ x_*^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -36 \\ 54 \end{pmatrix} \equiv -\phi\,.$$

Poddawszy macierz rozszerzoną powyższego układu redukcji wierszowej,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -10 & -9 \\ 4 & -11 & 14 & -18 \\ -10 & 14 & -8 & 27 \end{array}\right) \sim_W \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -10 & -9 \\ 0 & 27 & -54 & -18 \\ 0 & 54 & -108 & -63 \end{array}\right),$$

stwierdzamy brak punktów spełniających powyższy warunek, więc też brak środka symetrii kwadryki,

$$C\big(K_3(Q,\varphi,c)\big) = \varnothing\,,$$

która przeto ma naturę paraboliczną.

W następnej kolejności wyznaczamy jądro formy kwadratowej Q,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\mathbb{B}_Q \quad &\equiv \quad \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ 4 & -11 & 14 \\ -10 & 14 & -8 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \quad \left\langle \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv f_3 \right\rangle_{\mathbb{R}}\,,\end{aligned}$$

i na tej podstawie wypisujemy operator rzutu na $\operatorname{Ker}\mathbb{B}_Q^\perp$,

$$\mathsf{P}_Q^\perp \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - \mathsf{P}_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rzutujemy następnie wektor

$$\phi = \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ -54 \end{pmatrix}$$

na $\operatorname{Ker}\mathbb{B}_Q^\perp$,

$$\phi_1 \equiv \mathsf{P}_Q^\perp\,\phi = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ -60 \end{pmatrix},$$

i poszukujemy rozwiązania zagadnienia

$$2\mathbb{B}_Q\, o_* \equiv 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ 4 & -11 & 14 \\ -10 & 14 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o_*^1 \\ o_*^2 \\ o_*^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix} \equiv -\phi_1$$

przeprowadzając stosowną redukcję wierszową,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 & | & -3 \\ 4 & -11 & 14 & | & -12 \\ -10 & 14 & -8 & | & 30 \end{pmatrix} \sim_W \begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 & | & -3 \\ 0 & -27 & 54 & | & 0 \\ 0 & 54 & -108 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim_W \begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 & | & -3 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim_W \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix},$$

która daje nam

$$o_* \in \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle f_3 \rangle_{\mathbb{R}} .$$

Narzucając dodatkowy warunek

$$0 \stackrel{!}{=} \mathsf{P}_Q\, o_* = \tfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3+2s \\ 2s \\ s \end{pmatrix} = \tfrac{3(3s-2)}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dookreślamy rozwiązanie:

$$o_* = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

o własności

$$B_Q(o_*, o_*) = 9 ,$$

przy którym w nowych współrzędnych

$$\widetilde{z}^1 = x^1 + \tfrac{5}{3} , \qquad \widetilde{z}^2 = x^2 - \tfrac{4}{3} , \qquad \widetilde{z}^3 = x^3 - \tfrac{2}{3}$$

zapisujemy równanie definiujące w częściowo zredukowanej postaci

$$\big(\widetilde{z}^1\big)^2 - 11\big(\widetilde{z}^2\big)^2 - 8\big(\widetilde{z}^3\big)^2 + 8\widetilde{z}^1\widetilde{z}^2 - 20\widetilde{z}^1\widetilde{z}^3 + 28\widetilde{z}^2\widetilde{z}^3 + 6\big(2\widetilde{z}^1 + 2\widetilde{z}^2 + \widetilde{z}^3\big) - 18 = 0 ,$$

przy czym część liniowa to

$$\big(\varphi \circ \mathsf{P}_Q\big)_i\, \widetilde{z}^i \equiv \delta_{ij}\, (\phi - \phi_1)^i\, \widetilde{z}^j = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{z}^1 \\ \widetilde{z}^2 \\ \widetilde{z}^3 \end{pmatrix} .$$

Na koniec przechodzimy do układu współrzędnych związanego z ortonormalną bazą własną $\mathbb{B}_Q$ dostosowaną do rozkładu

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} \mathbb{B}_Q^{\perp} \oplus \operatorname{Ker} \mathbb{B}_Q ,$$

dbając przy tym o to, by *pierwszym* wektorem podbazy w $\operatorname{Ker} \mathbb{B}_Q$ był ten, do którego dualną jest forma $\varphi \circ \mathsf{P}_Q$ (co akurat w naszym przypadku, w którym $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \mathbb{B}_Q = 1$, jest spełnione automatycznie). W tym celu wyznaczamy widmo $\mathbb{B}_Q$, licząc

$$w_{\mathbb{B}_Q}(\lambda) = \det\big(\mathbb{B}_Q - \lambda \rhd \mathbf{1}_3\big) = -\lambda\, (\lambda - 9)\, (\lambda + 27) ,$$

skąd wniosek:

$$\operatorname{Sp}(\mathbb{B}_Q) = \big\{(-27)^{(1)}, 0^{(1)}, 9^{(1)}\big\} .$$

Znajdujemy wektory własne $\mathbb{B}_Q$ stowarzyszone z niezerowymi wartościami własnymi: $\lambda = 9$,

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -8 & 4 & -10 \\ 4 & -20 & 14 \\ -10 & 14 & -17 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv f_1 \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

oraz $\lambda = -27$,

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 28 & 4 & -10 \\ 4 & 16 & 14 \\ -10 & 14 & 19 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv f_2 \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

Bazę $F = (f_1, f_2, f_3)$, jawnie ortonormalną, wiąże ze standardową macierz przejścia

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

W obróconych współrzędnych

$$\begin{pmatrix} \widetilde{z}^1 \\ \widetilde{z}^2 \\ \widetilde{z}^3 \end{pmatrix} =: \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix},$$

związanych z wyjściowymi relacjami

$$\left(z^1, z^2, z^3\right) = \left(\tfrac{1}{3}\left(-2x^1 + x^2 + 2x^3\right) - 2, \tfrac{1}{3}\left(x^1 - 2x^2 + 2x^3\right) + 1, \tfrac{1}{3}\left(2x^1 + 2x^2 + x^3\right)\right),$$

równanie kwadryki upraszcza się istotnie,

$$9\left(z^1\right)^2 - 27\left(z^2\right)^2 + 18z^3 - 18 = 0\,,$$

i po ostatniej korekcie polegającej na wprowadzeniu współrzędnych

$$\begin{aligned} \left(u^1, u^2, u^3\right) &:= \left(z^1, z^2, z^3 - 1\right) \\ &\equiv \left(\tfrac{1}{3}\left(-2x^1 + x^2 + 2x^3\right) - 2, \tfrac{1}{3}\left(x^1 - 2x^2 + 2x^3\right) + 1, \tfrac{1}{3}\left(2x^1 + 2x^2 + x^3\right) - 1\right) \end{aligned}$$

przybiera postać normalną

$$\tfrac{1}{2}\left(u^1\right)^2 - \tfrac{3}{2}\left(u^2\right)^2 + u^3 = 0\,,$$

na podstawie której rozpoznajemy w rozważanej kwadryce paraboloidę hiperboliczną (czyli tzw. „małpie siodło"). Jej oś główna to

$$\Lambda_i = x_0 + \langle f_3 \rangle_{\mathbb{R}}\,,$$

gdzie $x_0 \in \mathbb{E}^3$ jest punktem o znikających współrzędnych $u^i(x_0) = 0,\ i \in \{1, 2, 3\}$, czyli

$$x_0 = (-1, 2, 1)^{\mathrm{T}}\,.$$

Płaszczyzny główne to

$$\Pi_{j3} = x_0 + \langle f_j, f_3 \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \{\ x \in \mathbb{E}^3 \quad | \quad \varepsilon_{3jk}\, u^k(x) = 0\ \}\,, \qquad j \in \{1, 2\}\,.$$

◇

Zadanie 3. Określ typ kwadryki $K_3(Q, \varphi, c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ \left(x^1, x^2, x^3\right)^{\mathrm{T}} \longmapsto 7x^1x^2 + 2x^2x^3 + 2x^1x^3\,,$$

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ \left(x^1, x^2, x^3\right)^{\mathrm{T}} \longmapsto -x^1 - x^2 - 4x^3\,,$$

$$c = -6\,.$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

<u>*Rozwiązanie:*</u> Kwadryka z treści zadana to miejsce geometryczne warunku współrzędniowego
$$7x^1x^2 + 2x^2x^3 + 2x^1x^3 - x^1 - x^2 - 4x^3 - 6 = 0\,.$$
Zaczniemy od sprawdzenia rozwiązywalności warunku (istnienia środka)
$$2\mathbb{B}_Q\, x_* \equiv 2\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_*^1 \\ x_*^2 \\ x_*^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \equiv -\phi\,.$$
Wobec odwracalności macierzy układu (będącej macierzą formy kwadratowej w bazie standardowej),
$$\det\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 56 \neq 0\,,$$
stwierdzamy istnienie jednoznacznego rozwiązania:
$$x_* \equiv \begin{pmatrix} x_*^1 \\ x_*^2 \\ x_*^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$
o własności
$$B_Q(x_*, x_*) = -5 \neq -6 \equiv c\,,$$
mamy zatem do czynienia z kwadryką środkowosymetryczną typu niestożkowego, której równanie definiujące we współrzędnych
$$\widetilde{y}^1 = x^1 - 1\,, \qquad \widetilde{y}^2 = x^2 - 1\,, \qquad \widetilde{y}^3 = x^3 + 3$$
przyjmuje postać
$$7\widetilde{y}^1\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{y}^2\widetilde{y}^3 + 2\widetilde{y}^1\widetilde{y}^3 - 1 = 0\,.$$
Na obecnym etapie pozostaje sprowadzić funkcję definiującą kwadryki na osie główne, co czynimy znajdując ortonormalną bazę własną $\mathbb{B}_Q$. W tym celu wyznaczamy widmo tej macierzy na podstawie analizy jej wielomianu charakterystycznego
$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 4)\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)\left(\lambda + \tfrac{7}{2}\right)$$
w postaci
$$\mathrm{Sp}(\mathbb{B}_Q) = \left\{\left(-\tfrac{7}{2}\right)^{(1)}, \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{(1)}, 4^{(1)}\right\}.$$
Wyznaczamy wektory własne $\mathbb{B}_Q$ stowarzyszone z wartościami własnymi: $\lambda = -\frac{7}{2}$,
$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv f_1 \right\rangle_{\mathbb{R}},$$
następnie $\lambda = -\frac{1}{2}$,
$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \equiv f_2 \right\rangle_{\mathbb{R}},$$
i wreszcie $\lambda = 4$,
$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -4 & \frac{7}{2} & 1 \\ \frac{7}{2} & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv f_3 \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Baza $F = (f_1, f_2, f_3)$ jest jawnie ortonormalna, TU a ze standardową wiąże ją macierz przejścia

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} .$$

W obróconych współrzędnych

$$\begin{pmatrix} \widetilde{y}^1 \\ \widetilde{y}^2 \\ \widetilde{y}^3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} ,$$

związanych z wyjściowymi relacjami

$$\left(y^1, y^2, y^3\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x^1 - x^2\right), \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\left(x^1 + x^2 - 4x^3 - 14\right), \tfrac{1}{2}\left(2x^1 + 2x^2 + x^3 - 1\right)\right) ,$$

równanie kwadryki przybiera postać normalną

$$7\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2 - 8\left(y^3\right)^2 + 2 = 0 ,$$

z której odczytujemy bez trudu typ kwadryki: jest to hiperboloida dwupowłokowa o wyznaczonym wcześniej środku symetrii,

$$C\big(K_3(Q, \varphi, c)\big) = \left\{ (1, 1, -3)^{\mathrm{T}} \right\} .$$

Jej osie główne to

$$\Lambda_i = x_* + \langle f_i \rangle_{\mathbb{R}} , \qquad i \in \{1, 2, 3\} ,$$

a płaszczyzny główne to

$$\Pi_{ij} = x_* + \langle f_i, f_j \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \left\{ x \in \mathbb{E}^3 \quad | \quad \varepsilon_{ijk}\, y^k(x) = 0 \right\} , \qquad (i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} .$$

◇

Zadanie 4. Określ typ kwadryki $K_3(Q, \varphi, c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \left(x^1, x^2, x^3\right)^{\mathrm{T}} \longmapsto 280\left(x^1\right)^2 + 343\left(x^2\right)^2 + 7\left(x^3\right)^2 - 700x^1x^2 - 100x^1x^3 + 152x^2x^3 ,$$

$$\varphi \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \left(x^1, x^2, x^3\right)^{\mathrm{T}} \longmapsto 780x^1 - 1110x^2 - 120x^3 ,$$

$$c = 720 .$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

Rozwiązanie: Kwadryka, w której mowa w zadaniu, to miejsce geometryczne warunku współrzędniowego

$$280\left(x^1\right)^2 + 343\left(x^2\right)^2 + 7\left(x^3\right)^2 - 700x^1x^2 - 100x^1x^3 + 152x^2x^3 + 780x^1 - 1110x^2 - 120x^3 + 720 = 0 .$$

Zaczniemy od sprawdzenia rozwiązywalności warunku (istnienia środka)

$$2\mathbb{B}_Q\, x_* \equiv 2 \begin{pmatrix} 280 & -350 & -50 \\ -350 & 343 & 76 \\ -50 & 76 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_*^1 \\ x_*^2 \\ x_*^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -780 \\ 1110 \\ 120 \end{pmatrix} \equiv -\phi .$$

Nieodwracalność macierzy układu (będącej macierzą formy kwadratowej w bazie standardowej),

$$\det \begin{pmatrix} 280 & -350 & -50 \\ -350 & 343 & 76 \\ -50 & 76 & 7 \end{pmatrix} = 0 ,$$

pozostawia dwie możliwości: albo mamy do czynienia z kwadryką paraboliczną, albo też – z kwadryką środkowosymetryczną, której zbiór środków zawiera przestrzeń afiniczną wymiaru co najmniej 1 (modelowaną na przestrzeni wektorowej $\operatorname{Ker}\mathbb{B}_Q$). Dokonując redukcji wierszowej macierzy rozszerzonej

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 280 & -350 & -50 & -390 \\ -350 & 343 & 76 & 555 \\ -50 & 76 & 7 & 60 \end{array}\right) \sim_W \left(\begin{array}{ccc|c} -28 & 35 & 5 & 39 \\ -350 & 343 & 76 & 555 \\ 50 & -76 & -7 & -60 \end{array}\right)$$
$$\sim_W \left(\begin{array}{ccc|c} -28 & 35 & 5 & 39 \\ 0 & -189 & 27 & 135 \\ 50 & -76 & -7 & -60 \end{array}\right) \sim_W \left(\begin{array}{ccc|c} -28 & 35 & 5 & 39 \\ 0 & -7 & 1 & 5 \\ 50 & -76 & -7 & -60 \end{array}\right)$$
$$\sim_W \left(\begin{array}{ccc|c} -28 & 70 & 0 & 14 \\ 0 & 7 & -1 & -5 \\ 50 & -125 & 0 & -25 \end{array}\right) \sim_W \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -5 \end{array}\right),$$

wyznaczamy przestrzeń afiniczną rozwiązań:

$$x_* \equiv \begin{pmatrix} x_*^1 \\ x_*^2 \\ x_*^3 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \left\langle \tfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \equiv f_3 \right\rangle_{\mathbb{R}},$$

w której zapisie f_1 jest unormowanym wektorem własnym stowarzyszonym z wartością własną $\lambda = 0$,

$$\langle f_3 \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \operatorname{Ker}\mathbb{B}_Q\,,$$

zatem dowolny jej element spełnia warunek

$$B_Q(x_*, x_*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -390 \\ 555 \\ 60 \end{pmatrix} = 495 \neq 720 \equiv c\,,$$

mamy więc do czynienia z kwadryką środkowosymetryczną typu niestożkowego, której równanie definiujące we współrzędnych

$$\widetilde{y}^1 = x^1 - 2\,, \qquad \widetilde{y}^2 = x^2 - 1\,, \qquad \widetilde{y}^3 = x^3 - 12$$

przyjmuje postać

$$280\big(\widetilde{y}^1\big)^2 + 343\big(\widetilde{y}^2\big)^2 + 7\big(\widetilde{y}^3\big)^2 - 700\widetilde{y}^1\widetilde{y}^2 - 100\widetilde{y}^1\widetilde{y}^3 + 152\widetilde{y}^2\widetilde{y}^3 + 225 = 0\,.$$

Na obecnym etapie pozostaje sprowadzić funkcję definiującą kwadryki na osie główne, co czynimy znajdując ortonormalną bazę własną $\mathbb{B}_Q$. W tym celu wyznaczamy widmo tej macierzy na podstawie analizy jej wielomianu charakterystycznego

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\,(\lambda + 45)\,(\lambda - 675)$$

w postaci

$$\operatorname{Sp}(\mathbb{B}_Q) = \big\{(-45)^{(1)}, 0^{(1)}, 675^{(1)}\big\}\,.$$

Wyznaczamy unormowane wektory własne $\mathbb{B}_Q$ stowarzyszone z niezerowymi wartościami własnymi: $\lambda = -45$,

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 325 & -350 & -50 \\ -350 & 388 & 76 \\ -50 & 76 & 52 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv f_1 \right\rangle_{\mathbb{R}},$$

i wreszcie $\lambda = 675$,

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -395 & -350 & -50 \\ -350 & -332 & 76 \\ -50 & 76 & -668 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -11 \end{pmatrix} = \left\langle \tfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv f_2 \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Baza $F = (f_1, f_2, f_3)$ jest jawnie ortonormalna, a ze standardową wiąże ją macierz przejścia

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 10 & -11 & -2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

W obróconych współrzędnych

$$\begin{pmatrix} \widetilde{y}^1 \\ \widetilde{y}^2 \\ \widetilde{y}^3 \end{pmatrix} =: \tfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 10 & -11 & 2 \\ -5 & -2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix},$$

związanych z wyjściowymi relacjami

$$\big(y^1, y^2, y^3\big) = \big(\tfrac{1}{15}\big(10x^1 + 10x^2 - 5x^3\big) + 2, \tfrac{1}{15}\big(10x^1 - 11x^2 - 2x^3\big) + 1, \tfrac{1}{15}\big(5x^1 + 2x^2 + 14x^3\big) - 12\big),$$

równanie kwadryki przybiera postać normalną

$$\big(y^1\big)^2 - 15\,\big(y^2\big)^2 - 5 = 0\,,$$

z której odczytujemy bez trudu typ kwadryki: jest to walec hiperboliczny o zbiorze środków symetrii,

$$C\big(K_3(Q, \varphi, c)\big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \langle f_3 \rangle_{\mathbb{R}}\ .$$

Jej osie główne to

$$\Lambda_{x_*} = x_* + \langle f_1 \rangle_{\mathbb{R}}\,, \qquad x_* \in C\big(K_3(Q, \varphi, c)\big)\,,$$

a płaszczyzny główne to

$$\Pi_{j3} = x_* + \langle f_j, f_3 \rangle_{\mathbb{R}} \equiv \{\ x \in \mathbb{E}^3 \quad | \quad \varepsilon_{3jk}\, y^k(x) = 0\ \}\,, \qquad j \in \{1, 2\}\,.$$

Oczywiście także płaszczyzny

$$\Pi_{x_*} = x_* + \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{R}}\,, \qquad x_* \in C\big(K_3(Q, \varphi, c)\big)$$

są płaszczyznami symetrii kwadryki.

◇

Na zakończenie zostawiamy Czytelnikowi zagadnienie do samodzielnego rozważenia i rozwiązania.

Zadanie domowe 1. Określ typ kwadryki $K_3(Q, \varphi, c)$ stowarzyszonej z trójką

$$Q\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ \big(x^1, x^2, x^3\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 10\big(x^1\big)^2 + 19\big(x^2\big)^2 + 7\big(x_3\big)^2 + 20x^1x^2 + 28x^1x^3 - 8x^2x^3\,,$$

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ \big(x^2\big)^{\mathrm{T}} \longmapsto 48x^1 - 24x^2 + 114x^3\,,$$

$$c = 144\,.$$

Wyznacz jej osie główne, (hiper)płaszczyzny główne i zbiór środków.

Powodzenia!