

ALGEBRA IR – KONWENCJE

RAFAL R. SUSZEK (KMMF)

Konwencja 1. (Iloczyn kartezjański zbiorów) Mnożenie kartezjańskie zbiorów nie jest operacją łączną. W celu uniknięcia przeładowania zapisu formalnego niniejszego skryptu wskutek każdorazowego wypisywania w jawnej postaci naturalnych bijekcji pomiędzy wielokrotnymi iloczynami kartezjańskimi zbiorów różnie pogrupowanych (występującymi chociażby w diagramatycznym zapisie aksjomatyki struktur algebraicznych), np. $(X_1 \times X_2) \times X_3$ i $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ dla trójki zbiorów X_1, X_2 i X_3 , będziemy opuszczać nawiasy określające schemat pogrupowania czynników, pisząc np. $X_1 \times X_2 \times X_3$. Pełna informacja o domyślnym schemacie pogrupowania (i ukrytej obecności stosownych bijekcji) będzie zawarta w strukturze odwzorowań o tak (niejednoznacznie) zadanej dziedzinie. I tak, np., dla odwzorowań $f_1 : X_1 \rightarrow X_4$ i $f_3 : X_3 \rightarrow X_5$ oraz $f_{i,i+1} : X_i \times X_{i+1} \rightarrow X_{i+5}$, $i \in \{1, 2\}$ skrócony zapis

$$X_4 \times X_7 \xleftarrow{f_1 \times f_{2,3}} X_1 \times X_2 \times X_3 \xrightarrow{f_{1,2} \times f_3} X_6 \times X_5$$

należy odczytać jako

$$X_4 \times X_7 \xleftarrow{f_1 \times f_{2,3}} X_1 \times (X_2 \times X_3) \xrightarrow{\alpha_{1,2,3}} (X_1 \times X_2) \times X_3 \xrightarrow{f_{1,2} \times f_3} X_6 \times X_5,$$

przy czym utożsamienie $\alpha_{1,2,3}$ przyjmuje tu postać

$$\alpha_{1,2,3} : X_1 \times (X_2 \times X_3) \rightarrow (X_1 \times X_2) \times X_3 : (x_1, (x_2, x_3)) \mapsto ((x_1, x_2), x_3).$$

✓

Konwencja 2. (Zapis odwzorowań)

- Odwzorowanie identycznościowe zbioru X w siebie zapiszemy jako

$$\text{id}_X : X \rightarrow X : x \mapsto x.$$

- Odwzorowanie zbioru X w siebie zapiszemy jako $f : X \curvearrowright$.
- Niechaj będą dane zbiory X_1, X_2, Y_1, Y_2 oraz odwzorowania $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$. Zapiszemy

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

- Niechaj będą dane zbiory X, Y_1, Y_2 oraz odwzorowania $f_1 : X \rightarrow Y_1$, $f_2 : X \rightarrow Y_2$. Zapiszemy

$$(f_1, f_2) : X \rightarrow Y_1 \times Y_2 : x \mapsto (f_1(x), f_2(x)).$$

- W przypadku odwzorowania stałego $f : X \rightarrow Y : x \mapsto y_0$ zapiszemy $f \equiv y_0$.
- Transpozycję elementów zbioru X zapiszemy jako

$$\tau_X : X \times X \rightarrow X \times X : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1).$$

- Niechaj $S_1, S_2, \dots, S_N$ będą zbiorami. Kanoniczne odwzorowania rzutowe (zwane też rzutami kanonicznymi), określone na iloczynie kartezjańskim tych zbiorów i dla dowolnych indeksów $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N$, $n \in \overline{1, N}$, zapiszemy następująco

$$\text{pr}_{i_1, i_2, \dots, i_n} : \bigtimes_{i=1}^N S_i \rightarrow S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_n} : (x_1, x_2, \dots, x_N) \mapsto (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}).$$

✓

Konwencja 3. (Diagramy przemienne) Niechaj A, B, C oraz D będą zbiorami i niech $\alpha : A \rightarrow B$, $\beta : B \rightarrow D$, $\gamma : A \rightarrow C$ oraz $\delta : C \rightarrow D$ będą odwzorowaniami pomiędzy tymi zbiorami. Diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

nazywamy **przemienym**, gdy zachodzi relacja

$$\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma.$$

W przypadku bardziej złożonym mówimy o diagramie przemienym, ilekroć każdy z zamkniętych konturów wewnątrz diagramu jest diagramem przemienym w powyższym sensie.

✓

Konwencja 4. (Operacje wieloargumentowe na podzbiorach nośnika struktury algebraicznej) Niechaj S będzie zbiorem wyposażonym w operację n -argumentową $\phi_n : S^{\times n} \rightarrow S$ i niech $S_i \subset S$, $i \in \overline{1, n}$ będą podzbiorami S . Wówczas definiujemy zbiór

$$\phi_n(S_1, S_2, \dots, S_n) := \{ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall_{i \in \overline{1, n}} : x_i \in S_i \},$$

który będziemy nazywać **obrazem algebraicznym zbiorów $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ względem operacji ϕ_n** . W szczególności możemy mówić o sumie algebraicznej podzbiorów zbioru z dodawaniem i iloczynie algebraicznym podzbiorów zbioru z mnożeniem.

✓

Przykład(y) 1.

- Niech S będzie zbiorem, na którym jest zadana operacja 2-argumentowa $\phi_2 := \cdot$ zwana mnożeniem. Wówczas możemy określić **iloczyn algebraiczny** dowolnych dwóch podzbiorów $S_1, S_2 \subset S$ w postaci

$$S_1 \cdot S_2 := \{ x \cdot y \mid (x, y) \in S_1 \times S_2 \}.$$

- Analogicznie definiujemy **sumę algebraiczną** podzbiorów S , ilekroć na zbiorze tym jest zadana operacja 2-argumentowa $\phi_2 := +$ zwana dodawaniem,

$$S_1 + S_2 := \{ x + y \mid (x, y) \in S_1 \times S_2 \}.$$

- Jeśli na S określona jest relacja 1-argumentowa $\phi_1 := -(\cdot)$ zwana braniem przeciwności, to możemy zdefiniować **przeciwność algebraiczną** dowolnego podzbioru $S_1 \subset S$ jako zbiór

$$-S_1 := \{ -s \mid s \in S_1 \}.$$

- Analogicznie definiujemy **odwrotność algebraiczną** podzbioru S , zawsze gdy na zbiorze tym jest zadana operacja 1-argumentowa $\phi_1 := (\cdot)^{-1}$ zwana braniem odwrotności,

$$S_1^{-1} := \{ s^{-1} \mid s \in S_1 \}.$$

Address: KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI, WYDZIAŁ FIZYKI UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO, UL. HOŻA 74, PL-00-682 WARSZAWA, POLAND

E-mail address: suszek@fuw.edu.pl