

ALGEBRA IR – WYKŁADY IX I X (28. LISTOPADA I 5. GRUDNIA 2012 R.)
WERSJA OSTATECZNA

RAFAL R. SUSZEK (KMMF)

5. DZIAŁANIE GRUPY NA ZBIORZE

Zasada symetrii jest bezsprzecznie jedną z podstawowych zasad nowoczesnej fizyki, porządkującą – w duchu prac Wignera – strukturę teorii fizykalnych (w terminach tzw. teorii reprezentacji grup symetrii) i wyjaśniającą – za Noether – głęboki sens matematyczny fizykalnych zasad zachowania. W połączeniu z zasadą lokalności prowadzi ona wprost do mechanizmu cechowania symetrii globalnych, fundamentalnego dla obowiązującego opisu teoretycznego (części) oddziaływań elementarnych, jak również dla modeli fizyki matematycznej stanowiących rozwijane obecnie propozycje kwantowego opisu oddziaływań grawitacyjnych. Punktem wyjścia do strukturalnego zrozumienia zasady symetrii jest wprowadzenie pojęcia działania grupy na zbiorze.

Definicja 36. Przyjmijmy notację Def.19. Niechaj X będzie zbiorem i niech $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będzie grupą. **Lewostronne działanie grupy G na zbiorze X** to odwzorowanie

$$\lambda : G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto g \triangleright x$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(IDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\text{id}_G \times \lambda} & G \times X \\ \phi_2 \times \text{id}_X \downarrow & & \downarrow \lambda \\ G \times X & \xrightarrow{\lambda} & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g,h \in G} \forall_{x \in X} : g \triangleright (h \triangleright x) = \phi_2(g, h) \triangleright x;$$

(IDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{array}{ccc} \{\bullet\} \times X & \xrightarrow{\phi_0 \times \text{id}_X} & G \times X \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \lambda \\ & & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{x \in X} : e \triangleright x = x.$$

Parę (X, λ) określamy mianem **zbioru z działaniem lewostronnym G** (lub też – z angielska – **lewostronnym G -zbiorem**).

Prawostronne działanie grupy G na zbiorze X to odwzorowanie

$$\varrho : X \times G \longrightarrow X : (x, g) \longmapsto x \triangleleft g$$

spełniające następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(rDG1) (homomorficzność działania)

$$\begin{array}{ccc} X \times G \times G & \xrightarrow{\varrho \times \text{id}_G} & X \times G \\ \text{id}_X \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \varrho \\ X \times G & \xrightarrow{\varrho} & X \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g,h \in G} \forall_{x \in X} : (x \triangleleft h) \triangleleft g = x \triangleleft \phi_2(h, g);$$

(rDG2) (trywialność działania elementu neutralnego)

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_X \times \phi_0} & X \times G \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow e \\
 & & X
 \end{array}
 \quad \equiv \quad
 \forall_{x \in X} : x \triangleleft e = x.$$

Parę (X, ϱ) określamy mianem **zbioru z działaniem prawostronnym** G (lub też **prawostronnym G -zbiorem**).

Jako prosty wniosek z powyższej definicji otrzymujemy

Stwierdzenie 37. W notacji Def. 19 i 36 oznaczmy – dla dowolnego $g \in G$ –

$$\lambda_g : X \longrightarrow X : x \longmapsto g \triangleright x, \quad \varrho_g : X \longrightarrow X : x \longmapsto x \triangleleft g.$$

Wówczas odwzorowanie dane wzorem

$$\lambda : G \longrightarrow \text{Map}(X, X) : g \longmapsto \lambda_g$$

jest homomorfizmem monoidu (G, ϕ_2, ϕ_0) w monoid $(\text{Map}(X, X), \circ, \bullet \longmapsto \text{id}_X)$ odwzorowań zbioru X w siebie (ze składaniem odwzorowań oraz odwzorowaniem tożsamościowym jako elementem neutralnym). Homomorfizm ten określamy mianem **lewostronnej realizacji** (albo inaczej **reprezentacji**) grupy G na zbiorze X indukowanej przez działanie λ . Analogicznie odwzorowanie dane wzorem

$$\varrho : G \longrightarrow \text{Map}(X, X) : g \longmapsto \varrho_g$$

jest homomorfizmem monoidu $(G, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_0)$ w monoid $(\text{Map}(X, X), \circ, \bullet \longmapsto \text{id}_X)$. Homomorfizm ten określamy mianem **prawostronnej realizacji** (albo inaczej **reprezentacji**) grupy G na zbiorze X indukowanej przez działanie ϱ .

Notacja 4. O ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy czasem używać pojęcia „działanie” w odniesieniu do odwzorowania λ . (wzgl. ϱ).

✓

Obraz realizacji grupy daje się opisać dużo precyzyjniej.

Stwierdzenie 38. W notacji Def. 19 i 36 dowolna realizacja lewostronna (względnie prawostronna) G na X jest homomorfizmem tejże grupy (względnie grupy do niej przeciwnej) w grupę symetryczną na X . I odwrotnie, każdy taki homomorfizm definiuje pewną realizację grupy na G .

Dowód: Każdy homomorfizm grup jest zarazem homomorfizmem odnośnych monoidów, jedyną zatem nietrywialną częścią powyższego stwierdzenia jest ta mówiąca o bijektywnym charakterze odwzorowań λ_g i ϱ_g dla dowolnego $g \in G$. Ich surjektywność jest prostą konsekwencją tożsamości

$$\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \lambda_{g \cdot g^{-1}} = \lambda_e = \text{id}_X = \varrho_e = \varrho_{g^{-1} \cdot g} = \varrho_g \circ \varrho_{g^{-1}},$$

oto bowiem otrzymujemy – dla dowolnego $x \in X$ –

$$x = \lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}}(x) \in \text{Im } \lambda_g$$

oraz

$$x = \varrho_g \circ \varrho_{g^{-1}}(x) \in \text{Im } \varrho_g.$$

Injektywność odwzorowania λ_g dla dowolnego $g \in G$ stwierdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$\lambda_g(x) = \lambda_g(y) \implies x = \lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g(x) = \lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g(y) = y,$$

w którym $x, y \in X$ są dowolne. Analogiczny rachunek dowodzi injektywności ϱ_g . □

Kolejny wynik pozwala nam ograniczyć się w dalszych rozważaniach, bez jakiegokolwiek straty ogólności, do działań lewostronnych¹. Oto bowiem

¹Odstępstwem od reguły będzie dyskusja wiązek głównych o grupie strukturalnej G , co do których zwyczajowo zakłada się, że tzw. włókno typowe jest przestrzenią z (regularnym) działaniem prawostronnym G .

Stwierdzenie 39. W notacji Def. 19 i 36 izomorfizm grup $\phi_1 : (G, \phi_2, \phi_1, \phi_0) \xrightarrow{\cong} (G, \phi_2^{\text{opp}}, \phi_1, \phi_0)$ indukuje kanoniczną bijekcję między zbiorami $\text{Mor}_L(G, X)$ lewostronnych i $\text{Mor}_R(G, X)$ prawostronnych działań grupy G na zbiorze X , daną wzorem

$${}^L\phi_1^* : \text{Mor}_L(G, X) \xrightarrow{\cong} \text{Mor}_R(G, X) : \lambda \mapsto \lambda \circ \phi_1.$$

Dowód: Odwrotnością ${}^L\phi_1^*$ jest odwzorowanie

$${}^R\phi_1^* : \text{Mor}_R(G, X) \longrightarrow \text{Mor}_L(G, X) : \varrho \mapsto \varrho \circ \phi_1,$$

por. Stw. 15 (ii). □

Przykład(y) 25.

- (1) **Działanie trywialne:** $\lambda : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X : g \mapsto \text{id}_X$.
- (2) Naturalne działanie grupy symetrycznej $\mathfrak{S}_X$ na zbiorze X poprzez permutacje jego elementów: $\lambda = \text{id}_{\mathfrak{S}_X}$.
- (3) Działanie grupy $\mathbb{Z}$ (z dodawaniem) na zbiorze $\mathbb{R}$ przez przesunięcia, $\lambda = T : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} : n \mapsto T_n$, gdzie $T_n : \mathbb{R} \curvearrowright : r \mapsto r + n$. Innym typem działania tej samej grupy $\mathbb{Z}$ na tym samym zbiorze $\mathbb{R}$ jest odwzorowanie $\lambda = (-1)^\cdot : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{R}} : n \mapsto (-1)^n$, gdzie $(-1)^n : \mathbb{R} \curvearrowright : r \mapsto (-1)^n \cdot r$. Przykłady te dokumentują możliwość istnienia *całkowicie różnych* realizacji *tej samej* grupy na *tym samym* zbiorze.
- (4) **Działanie dołączone** grupy G na sobie: $\lambda = \text{Ad} : G \longrightarrow \text{Inn}(G) \subset \mathfrak{S}_G$. Elementy $g, \text{Ad}_h(g) \in G$ nazywamy (**wzajem**) **sprzężonymi**. Określenie to przenosimy także na podgrupy nazywając podgrupę $\text{Ad}_g(H)$ **podgrupą sprzężoną względem podgrupy** $H \subset G$.
- (5) **Działanie (lewostronne) regularne** grupy G na sobie: $\lambda = \ell : G \longrightarrow \mathfrak{S}_G : g \mapsto \ell_g$, gdzie $\ell_g : G \curvearrowright : h \mapsto g \cdot h$.
- (6) Działanie grupy symetrycznej $\mathfrak{S}_X$ na $\text{Map}(X, Y)$, dla dowolnej pary zbiorów X, Y , poprzez **cofnięcie** względem odwrotności permutacji,

$$(\cdot)^* \circ \text{Inv} : \mathfrak{S}_X \longrightarrow \mathfrak{S}_{\text{Map}(X, Y)} : \sigma \mapsto (\sigma^{-1})^*,$$

$$(\sigma^{-1})^* : \text{Map}(X, Y) \curvearrowright : f \mapsto f \circ \sigma^{-1}.$$

Jego złożenie z działaniem dowolnej grupy G na X prowadzi do realizacji tejże grupy na $\text{Map}(X, Y)$, szczególnie istotnej w kontekście fizykalnym (w którym najczęściej zbiór X jest nośnikiem dodatkowej struktury, np. struktury topologicznej lub różniczkowej, jak to ma miejsce choćby w przypadku czasoprzestrzeni, na której działa grupą izometrii, albo też wiązki pól rozważanego modelu dynamiki, na której to wiązce działa grupa symetrii teorii pola).

- (7) Działanie grupy $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \text{U}(1)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ przez obrót o środku $(0, 0)$, wedle definicji

$$R : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathbb{C}} : [\theta] \mapsto R_\theta,$$

$$R_\theta : \mathbb{C} \curvearrowright : z \mapsto e^{-i\theta} \cdot z.$$

W opisie kartezjańskim otrzymujemy znajome formuły:

$$\begin{aligned} \Re(R_\theta(z)) &= \frac{e^{-i\theta} \cdot z + \overline{e^{-i\theta} \cdot z}}{2} = \frac{(\cos \theta - i \sin \theta) \cdot (\Re(z) + i \Im(z)) + (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot (\Re(z) - i \Im(z))}{2} \\ &= \cos \theta \cdot \Re(z) + \sin \theta \cdot \Im(z), \end{aligned}$$

$$\Im(R_\theta(z)) = \cos \theta \cdot \Im(z) - \sin \theta \cdot \Re(z),$$

które możemy przedstawić zwięźle w zapisie macierzowym:

$$\begin{pmatrix} \Re(R_\theta(z)) \\ \Im(R_\theta(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Re(z) \\ \Im(z) \end{pmatrix}.$$

Zapis ten ilustruje ciąg izomorfizmów grup $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \text{U}(1) \cong \text{SO}(2, \mathbb{R})$.

- (8) Naturalne działanie grupy obrotów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o środku w punkcie o współrzędnych $(0, 0, 0)$ ogranicza się do dowolnej 2-sfery o środku w tymże punkcie.
- (9) Działanie grupy warkoczy na ...

Zgodnie z ogólną logiką wykładu dyskusję wstępną zakończymy opisem odwzorowań między nośnikami reprezentacji grupy, zgodnych z tą strukturą.

Definicja 37. Przyjmijmy notację Def.19 i 36 i niech $(X^{(\alpha)}, \lambda^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą zbiorami z działaniem lewostronnym grupy G . **Odwzorowanie lewostronnie G -ekwiwariantne** (albo inaczej **lewostronne G -odwzorowanie** względnie **lewostronny G -homomorfizm**) $(X^{(1)}, \lambda^{(1)})$ w $(X^{(2)}, \lambda^{(2)})$ to odwzorowanie

$$f : X^{(1)} \longrightarrow X^{(2)}$$

spełniające aksjomat (wyrażony przez diagram przemienności i równoważne zdanie logiczne):

$$\begin{array}{ccc} G \times X^{(1)} & \xrightarrow{\lambda^{(1)}} & X^{(1)} \\ \text{id}_G \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times X^{(2)} & \xrightarrow{\lambda^{(2)}} & X^{(2)} \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{(g,x) \in G \times X^{(1)}} : f \circ \lambda_g^{(1)}(x) = \lambda_g^{(2)} \circ f(x). \quad (\text{IGE})$$

Jeśli f jest przy tym bijekcją, to mówimy o **G -ekwiwariantnym izomorfizmie zbiorów z działaniem lewostronnym**.

Odwzorowanie prawostronnie G -ekwiwariantne definiujemy analogicznie.

Przykład(y) 26.

- (1) Niechaj $\Delta_{(0,0)}$ będzie zbiorem trójkątów na płaszczyźnie o jednym z wierzchołków w punkcie $(0,0)$. Na zbiorze tym grupa $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ odwracalnych przekształceń liniowych punktów płaszczyzny działa w naturalny sposób: obrazem punkt trójkąta o współrzędnych (x, y) względem działania macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ jest punkt płaszczyzny o współrzędnych $(a \cdot x + b \cdot y, c \cdot x + d \cdot y)$. Odwzorowanie $A : \Delta_{(0,0)} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ przyporządkowujące trójkątowi jego pole powierzchni jest $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ -ekwiwariantne względem rzeczzonego działania na $\Delta_{(0,0)}$ i następującego działania na $\mathbb{R}_{>0}$:

$$\text{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, r \right) \longmapsto (a \cdot d - b \cdot c) \cdot r.$$

- (2) Dla pary grup $(G^{(\alpha)}, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dowolny komomorfizm $\chi : G^{(1)} \longrightarrow G^{(2)}$ jest odwzorowaniem $G^{(1)}$ -ekwiwariantnym względem działania dołączonego,

$$\chi : (G^{(1)}, \text{Ad}) \longrightarrow (G^{(2)}, \text{Ad} \circ (\chi \times \text{id}_{G^{(2)}})),$$

przy czym

$$\text{Ad} : G^{(1)} \times G^{(1)} \longrightarrow G^{(1)} : (g, h) \longmapsto \text{Ad}_g(h),$$

por. Przykł. 19 (2), jak również względem działania lewostronnego regularnego,

$$\chi : (G^{(1)}, \ell) \longrightarrow (G^{(2)}, \ell \circ (\chi \times \text{id}_{G^{(2)}})),$$

przy czym

$$\ell : G^{(1)} \times G^{(1)} \longrightarrow G^{(1)} : (g, h) \longmapsto g \cdot h,$$

por. Przykł. 25 (5). W tym ostatnim przypadku konkretnym przykładem jest automorfizm antypodalny $\alpha : \text{U}(1) \curvearrowright u \longmapsto -u$ na okręgu jednostkowym $\text{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$.

- (3) Niechaj $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ będzie grupą, $(\mathbf{k}, A, M, \text{P}, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ zaś – dowolnym ciałem, traktowanym jako zbiór z trywialnym działaniem $\lambda_0 : G \times \mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k} : (g, k) \longmapsto k$. **Funkcje klas grupy G o wartościach z ciała $\mathbf{k}$** są definiowane jako odwzorowania G -ekwiwariantne

$$f : (G, \text{Ad}) \longrightarrow (\mathbf{k}, \lambda_0).$$

Konkretnym przykładem takiej funkcji jest znak permutacji $\text{sign} : \mathfrak{S}_X \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Elementarnej charakteryzacji odwzorowań G -ekwiwariantnych dostarcza

Stwierdzenie 40. *Odwrotność dowolnego bijektywnego odwzorowania G -ekwiwariantnego jest także odwzorowaniem G -ekwiwariantnym.*

Dowód: Przykładając odwrotność f do obu stron równości

$$f \circ \lambda_g^{(1)}(x) = \lambda_g^{(2)} \circ f(x),$$

zapisanej dla dowolnych $g \in G$ oraz $x \in X^{(1)}$ i definiującej odwzorowanie G -ekwiwariantne, otrzymujemy

$$\lambda_g^{(1)}(x) = \text{id}_{X^{(1)}} \circ \lambda_g^{(1)}(x) = f^{-1} \circ f \circ \lambda_g^{(1)}(x) = f^{-1} \circ \lambda_g^{(2)} \circ f(x),$$

skoro jednak dla każdego $x \in X^{(1)}$ istnieje, i to dokładnie jedno, $y \in X^{(2)}$ o własności

$$x = f^{-1}(y),$$

a przy tym $X^{(2)} = f(X^{(1)})$, to wnioskujemy, że

$$\lambda_g^{(1)} \circ f^{-1}(y) = f^{-1} \circ \lambda_g^{(2)}(y)$$

dla dowolnych $g \in G$ i $y \in X^{(2)}$. □

Dalszej charakteryzacji tych odwzorowań dokonamy po wprowadzeniu dodatkowych pojęć.

Zbadamy teraz anatomię działania grupy na zbiorze zarówno od strony grupy, jak i od strony zbioru, po to by sklasyfikować w naturalny sposób typy działań i ostatecznie powiązać obie składowe opisu w terminach teorii mocy. Zaczniemy dyskusję od strony grupy.

Definicja 38. W notacji Def. 19 i 36 **stabilizator** (lub **grupa izotropii**) **elementu** $x \in X$ nośnika działania grupy G to zbiór

$$G_x := \{ g \in G \mid g \triangleright x = x \}.$$

Przykład(y) 27.

- (1) Cała grupa G jest stabilizatorem dowolnego elementu nośnika reprezentacji trywialnej.
- (2) Stabilizatorem elementu $x \in X$ względem naturalnego działania $\mathfrak{S}_X$ jest zbiór wszystkich tych permutacji σ elementów X , których **nośnik**

$$\text{supp}(\sigma) := \{ x \in X \mid \sigma(x) \neq x \},$$

nie zawiera x . I tak, np.,

$$(\mathfrak{S}_3)_1 = \{\text{id}_{\{1,2,3\}}, (23)\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

- (3) Stabilizatorem dowolnego elementu $\mathbb{R}$ względem działania T z Przykł. 25 (3) jest grupa trywialna. Stabilizatorem każdego elementu $r \neq 0$ względem działania $(-1)^\cdot$ z tego samego przykładu jest podgrupa $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. W przypadku $r = 0$ stabilizatorem względem tego działania jest pełna grupa $\mathbb{Z}$.
- (4) Stabilizator elementu $g \in G$ względem działania dołączonego Ad z Przykł. 25 (4) określamy mianem **centralizatora** x i oznaczamy jako

$$C_G(g) := \{ h \in G \mid \text{Ad}_h(g) = g \}.$$

Ogólniej, dla dowolnego podzbioru $H \subset G$ definiujemy centralizator S jako podgrupę

$$C_G(S) := \{ g \in G \mid \forall_{h \in H} : \text{Ad}_g(h) = h \}.$$

- (5) Stabilizatorem dowolnego punktu x 2-sfery o środku w punkcie o współrzędnych $(0,0,0)$ względem (ograniczenia) działania grupy obrotów z Przykł. 25 (8) jest podgrupa obrotów (płaskich) wokół osi przechodzącej przez x oraz przez punkt o współrzędnych $(0,0,0)$.
- (6) Stabilizatorem dowolnego wierzchołka n -kąta foremego względem działania jego grupy symetrii D_{2n} jest podgrupa (izomorficzna z) $\mathbb{Z}_2$ generowana przez odbicie symetryczne względem dwusiecznej kąta przy tymże wierzchołku.

Mamy oczywiście

Stwierdzenie 41. *Stabilizator dowolnego elementu nośnika działania grupy jest podgrupą tej ostatniej.*

Ponadto

Stwierdzenie 42. *W notacji Def. 19, 23 i 36 zachodzi tożsamość*

$$\text{Ker } \lambda = \bigcap_{x \in X} G_x.$$

Przykład(y) 28.

- (1) $\text{Ker } \lambda = G$ dla trywialnego działania λ grupy G na dowolnym zbiorze.

- (2) Jądro naturalnego działania $\mathfrak{S}_X$ na X jest trywialne.
- (3) $\text{Ker } T = \{0\}$ oraz $\text{Ker } (-1) = 2\mathbb{Z}$ dla działań T i (-1) grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ z Przykł. 25 (3).
- (4) $\text{Ker } \text{Ad} = \mathcal{Z}(G)$ dla działania dołączonego grupy G na sobie z Przykł. 25 (4). Działanie regularne z Przykł. 25 (5) ma jądro trywialne.

W następnej kolejności zajmiemy się relacjami, jakie działanie grupy wprowadza w nośniku realizacji. W tym celu będziemy potrzebować dodatkowego pojęcia, które określa

Definicja 39. W notacji Def. 19 i 36 **orbita elementu** $x \in X$ **względem działania** λ to zbiór

$$G \triangleright x := \{ \lambda_g(x) \mid g \in G \}.$$

Przykład(y) 29.

- (1) Orbitą elementu $x \in X$ względem działania trywialnego grupy G na X jest singleton $\{x\}$.
- (2) Orbitą elementu $x \in X$ względem naturalnego działania $\mathfrak{S}_X$ na X jest X .
- (3) Zbiór $\{-r, r\}$ jest orbitą działania (-1) grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ z Przykł. 25 (3).
- (4) Orbitę elementu $g \in G$ względem działania dołączonego grupy G na sobie z Przykł. 25 (4) określamy mianem **klasy sprzężoności** g i oznaczamy jako

$$C(g) := \{ \text{Ad}_h(g) \mid h \in G \}.$$

- (5) Orbitą elementu $g \in G$ względem działania regularnego grupy G na sobie z Przykł. 25 (5) jest G . Orbitą tegoż $g \in G$ względem działania regularnego podgrupy H na grupie G ,

$$\ell : H \times G \longrightarrow G : (h, g) \longmapsto h \cdot g,$$

jest warstwa prawostronna Hg .

- (6) Orbitą elementu $z \in \mathbb{C}$ względem działania R grupy $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ z Przykł. 25 (7) jest okrąg $|z|U(1)$.
- (7) Orbitą dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}^3$ względem naturalnego działania grupy obrotów w $\mathbb{R}^3$ (względem punktu o współrzędnych $(0, 0, 0)$) jest 2-sfera o środku w punkcie o współrzędnych $(0, 0, 0)$ i promieniu $|x|$.

Możemy już teraz wysłowić

Stwierdzenie 43. W notacji Def. 19 i 36 relacja na $X \ni x, y$ zadana, jak następuje:

$$x \sim_\lambda y \iff x \in G \triangleright y,$$

jest relacją równoważności. Działanie grupy zadaje zatem rozkład nośnika na sumę rozłącznych orbit względem tego działania.

Dowód:

- (1) $x = e \triangleright x \in G \triangleright x \implies x \sim_\lambda x$.
- (2) $x \sim_\lambda y \iff \exists_{g \in G} : x = g \triangleright y \implies g^{-1} \triangleright x = g^{-1} \triangleright (g \triangleright y) = (g^{-1} \cdot g) \triangleright y = e \triangleright y = x \implies y \sim_\lambda x$.
- (3) $(x \sim_\lambda y \wedge y \sim_\lambda z) \iff \exists_{g_1, g_2 \in G} : (x = g_1 \triangleright y \wedge y = g_2 \triangleright z) \implies x = g_1 \triangleright (g_2 \triangleright z) = (g_1 \cdot g_2) \triangleright z \implies x \sim_\lambda z$.

□

Wprowadzenie pojęć stabilizatora i orbity pozwala w naturalny sposób sklasyfikować działania grupy na zbiorze.

Definicja 40. W notacji Def. 19, 36, 38 i 39 oraz Stw. 43 działanie λ nazywamy

- **trywialnym**, jeśli $\forall_{g \in G} : \lambda_g = \text{id}_X$, tj. wszystkie orbity działania są jednoelementowe;
- **przechodnim** (lub **tranzytywnym**), jeśli $\forall_{x, y \in X} : x \sim_\lambda y$, tj. zbiór X jest pojedynczą orbitą $G \triangleright x = X$ (dowolnego) swojego elementu $x \in X$;
- **wolnym**, jeśli $\forall_{g, h \in G} : g \triangleright x = h \triangleright x \implies g = h$, tj. $\forall_{x \in X} : G_x = \{e\}$, co oznacza, że odwzorowanie λ_g nie ma punktów stałych dla $g \in G \setminus \{e\}$, a wtedy określamy X mianem **przestrzeni jednorodnej**;
- **wiernym** (lub **efektywnym**), jeśli $\forall_{g, h \in G} : (g \neq h \implies \exists_{x \in X} : g \triangleright x \neq h \triangleright x)$, czyli $\text{Ker } \lambda = \{e\}$, a wtedy grupa G jest kanonicznie izomorficzna z podgrupą $\text{Im } \lambda \subset \mathfrak{S}_X$;
- **regularnym**, jeśli jest ono przechodnie i wolne, a wtedy określamy X mianem **G -torsora** lub **głównej przestrzeni jednorodnej**.

Przykład(y) 30.

- (1) Ograniczenie działania grupy na zbiorze do jądra tego działania jest działaniem trywialnym. W szczególności działanie dołączone grupy przemiennej na sobie jest tego typu.
- (2) Działanie grupy alternującej na zbiorze n -elementowym jest przechodnie dla każdego $n \geq 3$, por. Stw. 48. Tego typu jest też działanie grupy diedralnej rzędu $2n$ na zbiorze wierzchołków n -kąta foremnego. To samo dotyczy (indukowanego) działania lewostronnego regularnego grupy G na zbiorze warstw G/H względem podgrupy $H \subset G$.
- (3) Antypodalne działanie grupy odbić względem punktu o współrzędnych $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ (izomorficznej z $\mathbb{Z}_2$) na dowolnej 2-sferze o środku w tym punkcie jest wolne. Tę własność ma również działanie regularne dowolnej grupy na sobie.
- (4) Działanie dołączone grupy G na sobie z Przykł. 25 (4) jest wierne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{Z}(G) = \{e\}$. Podobnie, (indukowane) działanie lewostronne regularne grupy G na zbiorze warstw G/H względem podgrupy $H \subset G$ jest tego typu wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$.
- (5) Zbiór izomorfizmów $\text{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)})$ pomiędzy dowolnymi dwiema grupami $G^{(1)}$ i $G^{(2)}$ jest torskorem grupy $\text{Aut}(G^{(1)})$ względem działania prawostronnego

$$\varrho : \text{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) \times \text{Aut}(G^{(1)}) \longrightarrow \text{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) : (\chi, \alpha) \longmapsto \chi \circ \alpha.$$

Jest on zarazem torskorem grupy $\text{Aut}(G^{(2)})$ względem działania lewostronnego

$$\lambda : \text{Aut}(G^{(2)}) \times \text{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) \longrightarrow \text{Iso}(G^{(1)}, G^{(2)}) : (\alpha, \chi) \longmapsto \alpha \circ \chi.$$

W bezpośredniej konsekwencji Stw. 28 i 30 oraz Tw. 3 wyprowadzamy

Stwierdzenie 44. *Przyjmijmy notację Def. 19, 23 i 29 oraz Przykł. 5 (1). Istnieje kanoniczny monomorfizm grup*

$$G/\text{Ker } \lambda \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_X,$$

który indukuje wierne działanie grupy ilorazowej na X według wzoru

$$\tilde{\lambda} : G/\text{Ker } \lambda \times X \longrightarrow X : (g\text{Ker } \lambda, x) \longmapsto g \triangleright x.$$

Dostajemy ponadto

Stwierdzenie 45. *Stabilizatory elementów z tej samej (dowolnej) orbity działania grupy są jej podgrupami wzajem sprzężonymi, a więc – w szczególności – izomorficznymi.*

Dowód: Z jednej strony

$$\forall_{\substack{x \in X \\ (g, h) \in G \times G_x}} : \text{Ad}_g(h) \triangleright (g \triangleright x) = (g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot g) \triangleright x = g \triangleright (h \triangleright x) = g \triangleright x,$$

a zatem $\text{Ad}_g(G_x) \subset G_{g \triangleright x}$. Z drugiej strony

$$\forall_{\substack{x \in X \\ (g, h) \in G \times G_{g \triangleright x}}} : \text{Ad}_{g^{-1}}(h) \triangleright x = (g^{-1} \cdot h \cdot g) \triangleright x = g^{-1} \triangleright (h \triangleright (g \triangleright x)) = g^{-1} \triangleright (g \triangleright x) = x,$$

a zatem $\text{Ad}_{g^{-1}}(G_{g \triangleright x}) \subset G_x \iff G_{g \triangleright x} \subset \text{Ad}_g(G_x)$. Ostatecznie więc

$$G_{g \triangleright x} = \text{Ad}_g(G_x).$$

□

Zgromadzone dotychczas fakty i pojęcia stanowią podstawę do sformułowania kilku istotnych stwierdzeń, które szczegółowo charakteryzują działanie grupy na zbiorze.

Twierdzenie 10. (O klasyfikacji orbit) *Przyjmijmy notację Def. 19, 25, 36, 38 oraz 39 i rozważmy, dla dowolnego elementu $x \in X$, zbiór warstw G/G_x z działaniem*

$$[\ell] : G \times (G/G_x) \longrightarrow G/G_x : (g, hG_x) \longmapsto (g \cdot h)G_x.$$

Istnieje kanoniczny G -ekwiwariantny izomorfizm

$$G/G_x \twoheadrightarrow G \triangleright x,$$

stąd też zachodzi tożsamość

$$|G| = |G_x| \cdot |G \triangleright x|.$$

W szczególności więc moc dowolnej orbity w skończonym zbiorze z działaniem grupy skończonej jest dzielnikiem mocy tejże grupy.

Dowód: Pożądane odwzorowanie ma postać

$$f_x : G/G_x \longrightarrow G \triangleright x : gG_x \longmapsto g \triangleright x.$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta $h \in gG_x$ możemy zapisać $h = g \cdot k$ dla pewnego $k \in G_x$, a w takim razie $g \triangleright x = g \triangleright (k \triangleright x) = (g \cdot k) \triangleright x = h \triangleright x$. Jego G -ekwiwariantność sprawdzamy w bezpośrednim rachunku:

$$f_x \circ [\ell](h, gG_x) = f_x((h \cdot g)G_x) = (h \cdot g) \triangleright x = \lambda(h, g \triangleright x) = \lambda(h, f_x(gG_x)).$$

Ponieważ zaś jest ono jawnie surjektywne, przeto pozostaje pokazać, że jest iniekcją, czego dowodzimy, jak następuje:

$$\begin{aligned} f_x(gG_x) = f_x(hG_x) &\iff g \triangleright x = h \triangleright x \iff (h^{-1} \cdot g) \triangleright x = x \iff h^{-1} \cdot g \in G_x \iff g \in hG_x \\ &\iff gG_x = hG_x. \end{aligned}$$

Ostatnia część tezy dowodzonego twierdzenia jest – w świetle powyższego – bezpośrednim następstwem Cor. 2, oto bowiem na mocy (3.2) dostajemy

$$|G| = |G_x| \cdot (G : G_x) = |G_x| \cdot |G \triangleright x|.$$

□

Twierdzenie powyższe znajduje bezpośrednie zastosowanie w następującym wyniku, wykorzystywanym w rozważaniach natury enumeracyjnej (prowadzonych w terminach teorii mocy) dotyczących zbiorów z działaniem grup skończonych.

Stwierdzenie 46. (Lemat Cauchy'ego–Frobeniusa, zwany też Lematem (nie od) Burnside'a) *Przyjmijmy notację Def. 19 i 36, a ponadto oznaczmy przez*

$$X/G := \{ G \triangleright x \mid x \in X \}$$

zbiór orbit działania grupy G na zbiorze X i przez

$$X^g := \{ x \in X \mid g \triangleright x = x \}$$

zbiór punktów statycznych odwzorowania λ_g . Wówczas zachodzi tożsamość

$$|G| \cdot |X/G| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Dowód: Wykorzystując Stw. 43 zapiszemy

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |X^g| &= \sum_{g \in G} \sum_{G \triangleright x \in X/G} |(G \triangleright x)^g| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} |\{ (g, y) \in G \times (G \triangleright x) \mid g \triangleright y = y \}| \\ &= \sum_{G \triangleright x \in X/G} \sum_{y \in G \triangleright x} |\{ g \in G \mid g \triangleright y = y \}| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} \sum_{y \in G \triangleright x} |G_y|, \end{aligned}$$

a dalej – wobec Stw. 45 –

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} \sum_{y \in G \triangleright x} |G_x| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} |G \triangleright x| \cdot |G_x|,$$

czyli też – na mocy Tw. 10 –

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{G \triangleright x \in X/G} |G| = |G| \cdot |X/G|.$$

□

W podsumowaniu niniejszej części wykładu dokonamy abstrakcji fundamentalnych cech działania przechodniego, które z jednej strony określają strukturę grupy w odwołaniu do własności dowolnego elementu nośnika działania, z drugiej zaś – ustalają swego rodzaju uniwersalny model zbioru z działaniem przechodnim. Zaczniemy od przestudiowania tego pierwszego aspektu.

Stwierdzenie 47. (Lemat Frattiniego) *Przyjmijmy notację Def. 19, 21, 31, 36 i 38. Jeśli ograniczenie działania grupy G na zbiorze X do podgrupy $H \subset G$ jest działaniem przechodnim, to wówczas – dla dowolnego elementu $x \in X$ – zachodzi relacja*

$$G = H \cdot G_x.$$

Jeśli ponadto ograniczenie to jest działaniem wolnym, to jest

$$G = H \bullet G_x.$$

Dowód: Ustalmy (dowolnie) $x \in X$. Przechodniość działania H implikuje dla dowolnego $g \in G$ istnienie pewnego $h \in H$ spełniającego warunek $g \triangleright x = h \triangleright x$, co oznacza $h^{-1} \cdot g \in G_x \iff g \in h G_x$, skąd też wynika pierwsza z dowodzonych relacji.

Jeśli działanie H na X jest ponadto wolne, tj. dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $H_x = \{e\}$, to otrzymujemy dodatkowy warunek

$$H \cap G_x \equiv H_x = \{e\},$$

co w sumie odtwarza definicję iloczynu rozłącznego H i G_x . □

Mamy też oczywiste

Corollarium 4. *Przyjmijmy notację Def. 19, 25, 36, 38 i 39 oraz Tw. 10. Ilekroć działanie grupy G na zbiorze X jest przechodnie, spełniona jest równość*

$$|X| = (G : G_x).$$

Na koniec opiszemy uniwersalną postać zbioru z działaniem przechodnim.

Twierdzenie 11. (O ekwiwariantnym izomorfizmie zbiorów z działaniem) *Przyjmijmy notację Def. 19 oraz Przykł. 26 (2). Dowolny zbiór z działaniem przechodnim grupy G jest G -ekwiwariantnie izomorficzny z parą $(G/H, [\ell])$, w której $H \subset G$ jest pewną podgrupą, natomiast $[\ell]$ jest naturalnym działaniem indukowanym przez ℓ na zbiorze warstw,*

$$[\ell] : G \times (G/H) \longrightarrow G/H : (g, hH) \longmapsto (g \cdot h)H.$$

Dowolny zbiór z działaniem wolnym tejże grupy jest G -ekwiwariantnie izomorficzny z parą $(G \times S, \ell \times \text{id}_S)$, w której S jest pewnym zbiorem. Jeśli działanie G na zbiorze jest regularne, to wówczas zbiór tej jest G -ekwiwariantnie izomorficzny z parą (G, ℓ) .

Dowód: W pierwszym przypadku przechodniość λ , którą można wysłowić zdaniem $X = G \triangleright x$, prawdziwym dla dowolnego $x \in X$, pozwala zastosować wprost Tw. 10, co prowadzi do oczywistego wyboru G -ekwiwariantnego izomorfizmu zbiorów z działaniem:

$$f_x : G/G_x \longrightarrow X : gG_x \longmapsto g \triangleright x.$$

Podgrupą, o której mowa w treści twierdzenia, jest zatem $H = G_x$.

W drugim przypadku, tj. dla działania wolnego λ , wybieramy (dowolnie) po jednym elemencie z każdej z orbit działania G , na jakie rozwarstwa się X . Otrzymujemy w ten sposób zbiór

$$S_{X/G} := \{ y_{G \triangleright x} \mid G \triangleright x \in X/G \wedge y_{G \triangleright x} \in G \triangleright x \}.$$

Następnie odwzorowujemy zbiór $G \times S_{X/G}$ w X wedle przepisu

$$f_{S_{X/G}} : G \times S_{X/G} \longrightarrow X : (g, y_{G \triangleright x}) \longmapsto g \triangleright y_{G \triangleright x}.$$

I tym razem proponowane odwzorowanie jest jawnie surjektywne i G -ekwiwariantne jak w tezie twierdzenia, a przy tym injektywne, bowiem

$$f_{S_{X/G}}(g, y_{G \triangleright x}) = f_{S_{X/G}}(h, y_{G \triangleright z}) \iff g \triangleright y_{G \triangleright x} = h \triangleright y_{G \triangleright z} \iff y_{G \triangleright z} = (h^{-1} \cdot g) \triangleright y_{G \triangleright x} \in G \triangleright y_{G \triangleright x},$$

co jednak oznacza – wobec definicji zbioru $S_{X/G}$ – koniunkcję równości

$$y_{G \triangleright z} = y_{G \triangleright x} \quad \wedge \quad h^{-1} \cdot g = e,$$

które pozwalają podsumować nasz rachunek jednym zdaniem:

$$f_{S_{X/G}}(g, y_{G \triangleright x}) = f_{S_{X/G}}(h, y_{G \triangleright z}) \iff (g, y_{G \triangleright x}) = (h, y_{G \triangleright z}).$$

Tak oto odwzorowanie $f_{S_{X/G}}$ zadaje pożądany G -ekwiwariantny izomorfizm między $(G \times S_{X/G}, \ell \times \text{id}_{S_{X/G}})$ i (X, λ) .

Tezę dotyczącą działania regularnego otrzymujemy jako szczególny przypadek ostatniej konstrukcji.

□

* * *

Literatura uzupełniająca: Gładkie wprowadzenie do książki Romana w kontekście ostatnich wykładów daje podręcznik Armstronga [Arm88].

LITERATURA

[Arm88] M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1988.

Address: KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI, WYDZIAŁ FIZYKI UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO, UL. HOŻA 74, PL-00-682 WARSZAWA, POLAND

E-mail address: `suszek@fuw.edu.pl`