

**ALGEBRA IR – WYKŁADY X, XI, XII I XIII (5., 12. I 19. GRUDNIA 2012 R.
ORAZ 9. STYCZNIA 2013 R.)
WERSJA WSTĘPNA**

RAFAŁ R. SUSZEK (KMMF)

Część 1. Struktury złożone

Dotychczasowe rozważania, w których skupiliśmy się na prostych (tj. grupo- i pierścieniopodobnych) strukturach algebraicznych, dostarczają naturalnych schematów myślenia i opisu niezbędnych do rygorystycznej dyskusji tak istotnych z fizycznego punktu widzenia zagadnień jak symetria i niezmienniczość (wzgl. współzmienniczość). Zarazem przygotowują one grunt pod konstrukcję obiektów bardziej złożonych, w której kluczową rolę odgrywa oddziaływanie kilku wzajem uzgodnionych struktur algebraicznych. Ostatnia część wykładu, poświęcona zbadaniu istotnie nowych relacji indukowanych w obecności działania grupy na zbiorze, jak dotąd rozpatrywanym bez dodatkowej struktury algebraicznej, daje nam przedsmak tematyki, jaką podejmiemy w dalszej części kursu. Zajmiemy się w niej strukturami moduło- i algebropodobnymi znajdującymi bezpośrednie zastosowanie w nowoczesnym opisie formalnym zjawisk fizycznych. Pojęciem porządkującym dalszą część dyskursu jest działanie struktur algebraicznych na sobie, będące szczególnym przykładem następującej abstrakcji pojęcia działania grupy na zbiorze:

Definicja 42. Niechaj X i Ω będą zbiorami. **Realizacja zbioru Ω na zbiorze X** to odwzorowanie

$$\mathcal{R} : \Omega \longrightarrow \text{Map}(X, X) : \omega \longmapsto \mathcal{R}_\omega.$$

Z powyższym stowarzyszamy **lewostronne działanie zbioru Ω na zbiorze X** dane przez

$$\ell : \Omega \times X \longrightarrow X : (\omega, x) \longmapsto \mathcal{R}_\omega(x) \equiv \omega \triangleright x,$$

jak również **prawostronne działanie zbioru Ω na zbiorze X** dane przez

$$\wp : X \times \Omega \longrightarrow X : (x, \omega) \longmapsto \mathcal{R}_\omega(x) \equiv x \triangleleft \omega.$$

Zbiór X określamy mianem **nośnika działania**, natomiast zbiór Ω – mianem **dziedziny operatorów**.

Ileokroć któryś ze zbiorów X, Ω występujących w powyższej definicji sam jest nośnikiem struktury algebraicznej, naturalnym staje się wyróżnienie tych realizacji (a więc także działań), które są w oczywistym znaczeniu zgodne z ową strukturą. Tak właśnie będzie w przypadkach studiowanych w dalszej części kursu.

6. ELEMENTY TEORII MODUŁÓW I PRZESTRZENI WEKTOROWYCH

Jedną z najbardziej fundamentalnych i zarazem pojemnych struktur algebraicznych zbudowanych na relacji działania jest struktura modułu nad pierścieniem¹, łącząca w swej definicji struktury elementarne: grupy przemiennej oraz pierścienia. Z czysto matematycznego punktu widzenia jej omówienie jest o tyle zasadne, że pozwala na uprawianie algebry liniowej na dowolnych grupach przemiennych, a oprócz tego dostarcza wiedzy o najbardziej ogólnych własnościach przestrzeni wektorowych, niewymagających bogatszej struktury ciała na dziedzinie operatorów. Wyposaża nas ono także w aparat pojęciowy przydatny w dyskusji elementów algebry homologicznej (rozwinętej w dziale 11), która znajduje szerokie zastosowanie w klasycznej i kwantowej teorii pól (w szczególności – teorii z tzw. symetrią cechowania). Z fizycznego (ale nie nie-matematycznego) punktu widzenia struktura modułu również jest dużo bardziej adekwatna i naturalna niżli struktura przestrzeni wektorowej, o czym przekonuje nas chociażby

Wersja wstępna z 24 grudnia 2012, 12:34 (GMT+1).

¹Bardziej ogólną jest struktura grupy z operatorami, której nośnik jest wprawdzie także grupą, lecz w ogólności nieprzemiennej, patrz: [Bou07, Rozdz.I §4.2]. Okoliczności, w których nośnik działania jest wyposażony w uboższą jeszcze strukturę algebraiczną, nie są zwykle oddzielnie dyskutowane.

dyskusja klasycznej teorii pola zbudowanej na pojęciu wiązki wektorowej nad czasoprzestrzenią² Na tym jednak nie koniec, oto bowiem, jak przekonamy się niebawem, analiza samych przestrzeni wektorowych wyprowadza nas – na stosunkowo wczesnym etapie – poza wyjściową kategorię, wprost do kategorii modułów nad pierścieniem. Z tych to przyczyn teoria modułów stanowi właściwy punkt wyjścia do wszystkich naszych przyszłych studiów w ramach kursu algebry. Zaczniemy od pojęcia podstawowego:

Definicja 43. Przyjmijmy notację Def. 8' i 19. **Moduł lewostronny nad pierścieniem** R (zwany też z angielską **R -modułem lewostronnym**) to para $((G, \phi_2 = +_G, \phi_1 = -(\cdot), \phi_0 : \bullet \mapsto 0_G), \ell)$ złożona z grupy przemiennej $(G, \phi_2 = +_G, \phi_1 = -(\cdot), \phi_0 : \bullet \mapsto 0_G)$ oraz z **lewostronnego działania pierścienia** R , o elementach określanych mianem **skalarów**, **na grupie** G

$$\ell : R \times G \longrightarrow G : (r, g) \longmapsto r \triangleright g$$

spełniającego następujące aksjomaty (wyrażone przez diagramy przemienne i równoważne zdania logiczne):

(IRM1) (G, ℓ) jest zbiorem z lewostronnym działaniem monoidu (R, M, ϕ_0^M) , tj.

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times G & \xrightarrow{\text{id}_R \times \ell} & R \times G \\ M \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \ell \\ R \times G & \xrightarrow{\ell} & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : r \triangleright (s \triangleright g) = (r \cdot_R s) \triangleright g$$

oraz

$$\begin{array}{ccc} \{\bullet\} \times G & \xrightarrow{\phi_0^M \times \text{id}_G} & R \times G \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \ell \\ & & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g \in G} : 1_R \triangleright g = g;$$

(IRM2) (rozdzielność działania względem dodawania skalarów)

$$\begin{array}{ccc} R \times R \times G & \xrightarrow{(\ell \circ \text{pr}_{1,3}, \ell \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\ A \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\ R \times G & \xrightarrow{\ell} & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : (r +_R s) \triangleright g = (r \triangleright g) +_G (s \triangleright g);$$

(IRM3) (rozdzielność działania względem dodawania grupowego)

$$\begin{array}{ccc} R \times G \times G & \xrightarrow{(\ell \circ \text{pr}_{1,2}, \ell \circ \text{pr}_{1,3})} & G \times G \\ \text{id}_R \times \phi_2 \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\ R \times G & \xrightarrow{\ell} & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r \in R} \forall_{g,h \in G} : r \triangleright (g +_G h) = (r \triangleright g) +_G (r \triangleright h).$$

Analogicznie, **moduł prawostronny nad pierścieniem** R (zwany też **R -modułem prawostronnym**) to para $((G, \phi_2 = +_G, \phi_1, \phi_0 : \bullet \mapsto 0_G), \varphi)$, w której φ jest odwzorowaniem

$$\varphi : G \times R \longrightarrow G : (g, r) \longmapsto g \triangleleft r,$$

zwanym **prawostronnym działaniem pierścienia skalarów** R **na grupie** G i spełniającym oczywiste prawostronne odpowiedniki powyższych aksjomatów:

(rRM1) (G, φ) jest zbiorem z prawostronnym działaniem monoidu (R, M, ϕ_0^M) , tj.

$$\begin{array}{ccc} G \times R \times R & \xrightarrow{\varphi \times \text{id}_R} & G \times R \\ \text{id}_G \times M \downarrow & & \downarrow \varphi \\ G \times R & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : (g \triangleleft r) \triangleleft s = g \triangleleft (r \cdot_R s)$$

²Zasada superpozycji rozwiązań klasycznych zagadnień liniowych, którą zwykle przywołuje się dla uzasadnienia roli przestrzeni wektorowych w fizyce (klasycznej), jest tutaj *pochodną* struktury modułu nad pierścieniem funkcji gładkich na czasoprzestrzeni, jaką niesie zbiór cięć wiązki wektorowej pól fizycznych.

oraz

$$\begin{array}{ccc}
 G \times \{\bullet\} & \xrightarrow{\text{id}_G \times \phi_0^M} & G \times R \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \wp \\
 & & G
 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{g \in G} : g \triangleleft 1_R = g;$$

(rRM2)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times R \times R & \xrightarrow{(\wp \circ \text{pr}_{1,2}, \wp \circ \text{pr}_{1,3})} & G \times G \\
 \text{id}_G \times A \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r,s \in R} \forall_{g \in G} : g \triangleleft (r +_R s) = (g \triangleleft r) +_G (g \triangleleft s);$$

(rRM3)

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times R & \xrightarrow{(\wp \circ \text{pr}_{1,3}, \wp \circ \text{pr}_{2,3})} & G \times G \\
 \phi_2 \times \text{id}_R \downarrow & & \downarrow \phi_2 \\
 G \times R & \xrightarrow{\wp} & G
 \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{r \in R} \forall_{g,h \in G} : (g +_G h) \triangleleft r = (g \triangleleft r) +_G (h \triangleright r).$$

Dla pełniejszego zrozumienia struktury modułu warto poddać jego aksjomatykę prostej reinterpretacji. W tym celu wprowadzamy

Definicja 44. Przyjmijmy notację Def. 8' i 19. **Pierścień endomorfizmów grupy przemiennej** G to pierścień

$$(\text{End}(G), \tilde{\phi}_2, \circ, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0, \bullet \mapsto \text{id}_G),$$

którego nośnikiem jest zbiór $\text{End}(G) \subset \text{Map}(G, G)$ endomorfizmów grupy G z operacjami $\tilde{\phi}_n$, $n \in \{0, 1, 2\}$ jak w Przykł. 12 (4) dla $S := G$

Zapowiedziana reinterpretacja przyjmuje postać oczywistego

Stwierdzenie 49. W notacji Def. 8', 19 i 43 oznaczmy – dla dowolnego $r \in R$ –

$$\ell_r : G \longrightarrow G : g \longmapsto r \triangleright g, \quad \wp_r : G \longrightarrow G : g \longmapsto g \triangleleft r.$$

Powyższe odwzorowania bywają nazywane **homotetiami o skali** r , patrz: [Bou07, Rozdz. II §4.2]. Obraz odwzorowania

$$\ell. : R \longrightarrow \text{Map}(G, G) : r \longmapsto \ell_r$$

jest zawarty w podzbiorze $\text{End}(G) \subset \text{Map}(G, G)$ i jako taki zadaje homomorfizm pierścienia R w pierścień endomorfizmów G . Podobnie obraz odwzorowania

$$\wp. : R \longrightarrow \text{Map}(G, G) : r \longmapsto \wp_r$$

jest zawarty w podzbiorze $\text{End}(G) \subset \text{Map}(G, G)$ i określa homomorfizm **pierścienia przeciwnego** do R , tj. $(R, M^{\text{opp}} = M \circ \tau_R, A, P, \phi_0^M, \phi_0^A)$, w pierścień endomorfizmów G .

I odwrotnie, każdy homomorfizm pierścienia (wzgl. pierścienia przeciwnego) w pierścień endomorfizmów danej grupy przemiennej zadaje na niej strukturę R -modułu lewostronnego (wzgl. prawostronnego).

Jak w przypadku działania grupy na zbiorze możemy bez jakiejkolwiek straty ogólności ograniczyć nasze rozważania (tymczasowo) do modułów lewostronnych, o czym przekonuje proste

Stwierdzenie 50. Przyjmijmy notację Def. 8', 19 i 43. Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem R na grupie G indukuje na tej ostatniej w kanoniczny sposób strukturę modułu prawostronnego nad pierścieniem przeciwnym do R i vice versa.

Przykład(y) 31.

- (1) Grupa trywialna niesie strukturę modułu nad dowolnym pierścieniem. Jest to tzw. **moduł trywialny**, który będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{0}$.

- (2) Grupa przemienna (R, A, P, ϕ_0^A) definiowana przez dowolny pierścień $(R, A = +, M = \cdot, P = -(\cdot), \phi_0^A : \bullet \mapsto 0_R, \phi_0^M : \bullet \mapsto 1_R)$ jest modulem lewostronnym nad R z działaniem $\ell : R \times R \rightarrow R : (r, s) \mapsto r \cdot s$. Ogólniej, dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grupa $(R^{\times n}, A^n, P^n, \phi_0^{A^n})$ zdefiniowana przez pierścień R , z operacjami określonymi “współrzędna po współrzędnej”:

$$A^n((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$P^n(x_1, x_2, \dots, x_n) := (-x_1, -x_2, \dots, -x_n),$$

$$\phi_0^{A^n}(\bullet) := (0_R, 0_R, \dots, 0_R),$$

dla $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^{\times n}$, niesie naturalną strukturę modułu lewostronnego nad R z działaniem

$$\ell^n : R \times R^{\times n} \rightarrow R^{\times n} : (r, (x_1, x_2, \dots, x_n)) \mapsto (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n).$$

- (3) Dowolny homomorfizm $\chi : R^{(1)} \rightarrow R^{(2)}$ pierścieni $(R^{(\alpha)}, M^{(\alpha)}, A^{(\alpha)}, P^{(\alpha)}, \phi_0^{M^{(\alpha)}}, \phi_0^{A^{(\alpha)}})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ indukuje na grupie $(R^{(2)}, A^{(2)}, P^{(2)}, \phi_0^{A^{(2)}})$ strukturę modułu lewostronnego nad $R^{(1)}$ z działaniem $\ell : R^{(1)} \times R^{(2)} \rightarrow R^{(2)} : (r, s) \mapsto M^{(2)}(\chi(r), s)$.
- (4) Grupa przemienna $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ jest nośnikiem kanonicznej struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem endomorfizmów z Def. 44, przy czym działanie $\text{End}(G)$ jest tu zadawane przez odwzorowanie ewaluacji $\ell : \text{End}(G) \times G \rightarrow G : (\chi, g) \mapsto \chi(g) =: \text{ev}_\chi(g)$.
- (5) Grupa przemienna jest też nośnikiem struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem $\mathbb{Z}$ z Przykł. 7, przy czym działanie $\mathbb{Z}$ jest określone przez branie krotności jak w (3.1).
- (6) Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem R na grupie przemiennej $(G, \phi_2, \phi_1, \phi_0)$ indukuje na grupie $(\text{Map}(S, G), \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0)$ z Przykł. 12 (4) naturalną strukturę modułu lewostronnego nad R z działaniem $\ell : R \times \text{Map}(S, G) \rightarrow \text{Map}(S, G) : (r, f) \mapsto r \triangleright f$, przy czym dla dowolnego $x \in S$ jest $(r \triangleright f)(x) := r \triangleright f(x)$.

Szczególną i szczególnie istotną z fizycznego punktu widzenia klasę modułów opisuje

Definicja 45. W notacji Def. 9', 19 i 43 **przestrzeń wektorowa nad ciałem** $\mathbb{K}$ (zwana też **przestrzenią $\mathbb{K}$ -liniową**) to moduł nad pierścieniem $(\mathbb{K}, A, M, P, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ ciała $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Elementy nośnika tej struktury określamy mianem **wektorów**.

Nośniki struktury przestrzeni wektorowej tradycyjnie oznacza się dużymi literami z końca alfabetu łacińskiego, poczynając od V , elementy zaś tych zbiorów (czyli wektory) – odnośnymi literami małymi. W dalszej części wykładu będziemy się starali dochować wierności tej tradycji.

Przykład(y) 32.

- (1) Grupa trywialna jest nośnikiem struktury przestrzeni wektorowej nad dowolnym ciałem. Jest to tzw. **przestrzeń trywialna** (lub **zerowa**), którą będziemy oznaczać wprowadzonym wcześniej symbolem $\mathbf{0}$.
- (2) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grupa przemienna $(\mathbb{K}^{\times n}, A^n, P^n, \mathbf{0}^n)$ definiowana przez dowolne ciało $(\mathbb{K}, A, M, P, \text{Inv}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ na sposób opisany w Przykł. 31 (2) niesie naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. W szczególności grupa $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \bullet \mapsto 0)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ względem działania opisanego w Def. 13.
- (3) Uogólnieniem struktury opisanej w ostatnim punkcie jest struktura przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$ na zbiorze $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ciągów o wartościach w $\mathbb{K}$ z operacjami zdefiniowanymi “wyraz po wyrazie”.
- (4) Grupa przemienna $(\mathbb{K}[t], +, -(\cdot), \bullet \mapsto 0)$ definiowana przez pierścień wielomianów $\mathbb{K}[t]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$ z działaniem

$$\ell^{n+1} : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[t] \rightarrow \mathbb{K}[t] : (r, r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots + r_n t^n) \mapsto r \cdot r_0 + r \cdot r_1 t + r \cdot r_2 t^2 + \dots + r \cdot r_n t^n.$$

- (5) Zbiór $C([0, 1], \mathbb{C})$ funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ o wartościach zespolonych z dodawaniem i braniem przeciwności zdefiniowanymi punktowo,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (-f)(x) := -f(x), \quad 0(x) := 0,$$

dla dowolnych $f, g \in C([0, 1], \mathbb{C})$ i $x \in [0, 1]$, jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ z działaniem

$$\lambda : \mathbb{C} \times C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C}) : (z, f) \mapsto \lambda(z, f), \quad \lambda(z, f)(x) := z \cdot_{\mathbb{C}} f(x).$$

Możemy teraz wskazać najprostsze konsekwencje wypisanych aksjomatów.

Stwierdzenie 51. W notacji Def. 8', 19 i 43 w module lewostronnym nad pierścieniem R zachodzą następujące tożsamości:

- (i) $\forall_{g \in G} : 0_R \triangleright g = 0_G;$
- (ii) $\forall_{r \in R} : r \triangleright 0_G = 0_G;$
- (iii) $\forall_{\substack{r \in R \\ g \in G}} : P(r) \triangleright g = \phi_1(r \triangleright g);$
- (iv) $\forall_{\substack{r \in R \\ g \in G}} : r \triangleright \phi_1(g) = \phi_1(r \triangleright g).$

W przypadku przestrzeni wektorowych prawdziwe jest ponadto

Stwierdzenie 52. W notacji Def. 9', 19 i 45 w przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{K}$ zachodzi tożsamość

$$\forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V} : \lambda \triangleright v = 0_V \implies (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \vee v = 0_V).$$

Dowód: Jeśli $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, to istnieje $\text{Inv}_{\mathbb{K}}(\lambda) =: \lambda^{-1}$, a wtedy $v = 1_{\mathbb{K}} \triangleright v = (\lambda^{-1} \cdot_R \lambda) \triangleright v = \lambda^{-1} \triangleright (\lambda \triangleright v) = \lambda^{-1} \triangleright 0_V = 0_V$, przy czym ostatnia równość wykorzystuje udowodnione wcześniej Stw. 51 (ii). $\square$

O tym, że własność przestrzeni wektorowych opisana powyżej nie rozszerza się na dowolne moduły nad pierścieniem, przekonuje nas analiza prostego przypadku. Oto w $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ każdy element spełnia tożsamość

$$n \triangleright [k]_n = [0]_n.$$

Definicja 46. W notacji Def. 8', 19 i 43 **podmoduł** modułu lewostronnego $((G, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$ nad pierścieniem R to para $((H, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$, w której H jest podgrupą G o własności

$$(IPM) \quad \ell : R \times H \longrightarrow H \subset G.$$

Mówimy, że działanie pierścienia R zachowuje H .

W przypadku przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{K}$ podmoduł określamy mianem **podprzestrzeni (wektorowej)**.

Pojęcie podmodułu stanowi punkt wyjścia do nader istotnej konstrukcji opisanej poniżej.

Stwierdzenie 53. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 25, 29, 43 i 46 oraz Stw. 13. Struktura modułu lewostronnego nad pierścieniem R na grupie G indukuje kanoniczną strukturę modułu lewostronnego nad R na grupie ilorazowej $(G/H, +_{G/H}, P_{G/H}, H)$ z operacjami (zdefiniowanymi dla dowolnych $g, g_1, g_2 \in G$)

$$(g_1 +_G H) +_{G/H} (g_2 +_G H) := (g_1 +_G H) +_G (g_2 +_G H) = (g_1 +_G g_2) +_G H,$$

$$P_{G/H}(g +_G H) := (-g) +_G H.$$

Struktura ta jest określona przez działanie

$$\ell^{G/H} : R \times (G/H) \longrightarrow G/H : (r, g +_G H) \longmapsto (r \triangleright g) +_G H$$

i nosi nazwę **modułu ilorazowego (wzgl. przestrzeni ilorazowej, gdy R jest ciałem)**.

Dowód: Określoność $\ell^{G/H}$ jest prostą konsekwencją definiującej własności (IPM) podmodułu. Oto bowiem dla dowolnego reprezentanta $k \in g +_G H$ zachodzi $\exists_{h \in H} : k = g +_G h$, a zatem $(r \triangleright k) +_G H = (r \triangleright g) +_G (r \triangleright h) +_G H = (r \triangleright g) +_G H$, jako że $r \triangleright h \in H$. Aksjomaty modułu lewostronnego sprawdzamy w bezpośrednim rachunku. $\square$

Wyróżniamy odwzorowania transportujące strukturę modułu pomiędzy nośnikami.

Definicja 47. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 22 oraz 43 i niech $((G^{(\alpha)}, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)}), \ell^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą modułami lewostronnymi nad pierścieniem R . **Homomorfizm R -modułów lewostronnych** $((G^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)}), \ell^{(1)})$ w $((G^{(2)}, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)}), \ell^{(2)})$ to R -ekwiwariantny homomorfizm grup przemiennych

$$\chi : (G^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)}) \longrightarrow (G^{(2)}, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)}),$$

tj. taki ich homomorfizm, który spełnia aksjomat (wyrażony przez diagram przemienności i równoważne zdanie logiczne):

$$\begin{array}{ccc} R \times G^{(1)} & \xrightarrow{\ell^{(1)}} & G^{(1)} \\ \text{id}_R \times \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ R \times G^{(2)} & \xrightarrow{\ell^{(2)}} & G^{(2)} \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{(r,g) \in R \times G^{(1)}} : \chi \circ \ell_r^{(1)}(g) = \ell_r^{(2)} \circ \chi(g). \quad (\text{IRMH})$$

Bijektywny homomorfizm R -modułów lewostronnych, którego odwrotność jest homomorfizmem R -modułów lewostronnych, nazywamy **izomorfizmem R -modułów lewostronnych**.

Opisane homomorfizmy noszą miano **odwzorowań R -liniowych**. Wprowadzamy oznaczenie

$$\text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) := \{ \chi : G^{(1)} \longrightarrow G^{(2)} \mid \chi \text{ } R\text{-liniowe} \}$$

dla zbioru wszystkich odwzorowań R -liniowych z R -modułu $G^{(1)}$ w R -moduł $G^{(2)}$. W szczególnym przypadku $G^{(1)} = G^{(2)} =: G$, będziemy pisać

$$\text{End}_R(G) := \text{Hom}_R(G, G),$$

wyróżniając dodatkowo endomorfizmy (obustronnie) odwracalne, czyli automorfizmy,

$$\text{Aut}_R(G) := \{ \chi \in \text{End}_R(G) \mid \chi \text{ bijektywne} \}.$$

Przykład(y) 33.

- (1) Odwzorowanie identycznościowe na dowolnym module lewostronnym.
- (2) Rzut kanoniczny $\text{pr}_i : R^{\times n} \longrightarrow R$ na i -ty czynnik kartezjański modułu z Przykł. 31 (2), traktowany jako nośnik kanonicznej struktury modułu nad R dla $n = 1$.
- (3) Odwzorowanie grupy przemiennej $G^{(1)}$ będącej nośnikiem struktury modułu lewostronnego nad pierścieniem R w grupę przemienią $G^{(2)}$ dane wzorem $\mathbf{0} : G^{(1)} \longrightarrow G^{(2)} : g \longmapsto \phi_0^{(2)}(\bullet)$ jest odwzorowaniem R -liniowym (względem trywialnej struktury R -modułu lewostronnego na grupie trywialnej $\{\phi_0^{(2)}(\bullet)\}$). Odwzorowanie to nazywamy **homomorfizmem zerowym**.
- (4) Rzut kanoniczny $\pi_{G/H} : G \longrightarrow G/H$ (nośnika struktury) modułu lewostronnego nad pierścieniem R na moduł ilorazowy G/H względem dowolnego podmodułu $H \subset G$.
- (5) Dowolny homomorfizm grup przemiennych traktowanych jako moduły lewostronne nad pierścieniem $\mathbb{Z}$ (jak w Przykł. 31 (4)) jest odwzorowaniem $\mathbb{Z}$ -liniowym.

Szczegółowym opisem struktury odwzorowań R -liniowych zajmiemy się w dalszej części wykładu. Na obecnym etapie ograniczymy się do elementarnych spostrzeżeń.

Stwierdzenie 54. *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 22, 43 oraz 47. Czwórka $(\text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}), A \equiv +, P \equiv -(\cdot), \bullet \longmapsto 0)$, w której skład wchodzi operacje punktowe (zapisane dla dowolnego $g \in G^{(1)}$)*

$$A : \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)})^{\times 2} \longrightarrow \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) : (\chi_1, \chi_2) \longmapsto \chi_1 + \chi_2,$$

$$P : \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) \longrightarrow \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) : \chi \longmapsto (-\chi),$$

określone wzorami

$$(\chi_1 + \chi_2)(g) := \chi_1(g) +_{(2)} \chi_2(g), \quad (-\chi)(g) := P_{G^{(2)}}(\chi(g)),$$

oraz stała $0(g) := 0_{G^{(2)}}$, jest grupą przemienią. Szóstka $(\text{End}_R(G), +, \circ, -(\cdot), \bullet \longmapsto 0, \bullet \longmapsto \text{id}_G)$ jest pierścieniem, natomiast czwórka $(\text{Aut}_R(G), \circ, (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto \text{id}_G)$ jest grupą.

Jeśli pierścień R jest przemienny, to wówczas $\text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)})$ niesie naturalną strukturę R -modułu z działaniem

$$\ell : R \times \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) \longrightarrow \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) : (r, \chi) \longmapsto r \triangleright \chi, \quad (r \triangleright \chi)(g) := \lambda^{(2)}(r, \chi(g)).$$

W szczególności $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(G^{(1)}, G^{(2)})$ jest nośnikiem struktury przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{K}$.

Powyższe stwierdzenie pozwala wysłowić prosty, lecz zarazem całkowicie ogólny argument przemawiający za wprowadzeniem struktury modułu nad pierścieniem nawet w dyskusji, w której punktem wyjścia jest struktura przestrzeni wektorowej ($R = \mathbb{K}$).

Stwierdzenie 55. *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 22, 43 i 47 oraz Stw. 54. Grupa przemienności $(\text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}), A \equiv +, P \equiv -(\cdot), \bullet \longmapsto 0)$ niesie naturalną strukturę modułu lewostronnego nad pierścieniem $\text{End}_R(G^{(2)})$ oraz modułu prawostronnego nad pierścieniem $\text{End}_R(G^{(1)})$.*

Dowód: Rzeczoną strukturę zadaje działanie lewostronne

$$\lambda : \text{End}_R(G^{(2)}) \times \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) \longrightarrow \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) : (\alpha, \chi) \longmapsto \alpha \circ \chi$$

oraz działanie prawostronne

$$\varrho : \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) \times \text{End}_R(G^{(1)}) \longrightarrow \text{Hom}_R(G^{(1)}, G^{(2)}) : (\chi, \beta) \longmapsto \chi \circ \beta,$$

dla których łatwo sprawdzić aksjomaty modułu. $\square$

Tym oto sposobem najprostsza analiza własności homomorfizmów przestrzeni wektorowych wyprowadza nas poza wyjściową kategorię, czyniąc nieodzownym jej przeniesienie na bardziej ogólny poziom teorii modułów nad pierścieniem.

Tytułem przygotowania do dalszych rozważań dowodzimy

Stwierdzenie 56. *Każdy bijektywny homomorfizm R -modułów lewostronnych jest izomorfizmem R -modułów lewostronnych.*

Dowód: Niechaj $\chi : ((G^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \phi_0^{(1)}), \ell^{(1)}) \longrightarrow ((G^{(2)}, \phi_2^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \phi_0^{(2)}), \ell^{(2)})$ będzie takim homomorfizmem., tj. niechaj dla dowolnych $r \in R$ i $g \in G^{(1)}$ zachodzi

$$\chi \circ \ell_r^{(1)}(g) = \ell_r^{(2)} \circ \chi(g),$$

a wtedy – wobec odwracalności χ – dostajemy

$$\ell_r^{(1)}(g) = \chi^{-1} \circ \chi \circ \ell_r^{(1)}(g) = \chi^{-1} \circ \ell_r^{(2)} \circ \chi(g).$$

Skoro jednak χ jest bijekcją, to każdy element $h \in G^{(2)}$ daje się przedstawić w postaci $h = \chi(g)$ dla pewnego (i jednego takiego) $g \in G^{(1)}$, a zatem

$$\ell_r^{(1)} \circ \chi^{-1}(h) = \chi^{-1} \circ \ell_r^{(2)}(h),$$

co kończy dowód. $\square$

Zachodzi także oczywiste

Stwierdzenie 57. *Jądro homomorfizmu modułów lewostronnych nad dowolnym pierścieniem jest podmodułem dziedziny tego homomorfizmu, natomiast jego obraz jest podmodułem przeciwdziedziny.*

Wprowadzamy wygodną

Definicja 48. W notacji Def. 8', 19, 22, 23, 29, 43 i 47 oraz Stw. 13 **koobraz homomorfizmu χ modułów nad pierścieniem** to moduł ilorazowy

$$\text{Coim } \chi := G^{(1)} / \text{Ker } \chi,$$

natomiast jego **kojądro** to moduł ilorazowy

$$\text{Coker } \chi := G^{(2)} / \text{Im } \chi.$$

Wiele pojęć omówionych w dziale 3, w tym pojęcie ciągu dokładnego, podnosi się w naturalny sposób do kategorii modułów (jednostronnych) nad ustalonym pierścieniem. To samo dotyczy niektórych fundamentalnych konstrukcji homomorfizmów kanonicznych oraz indukowanych, które przytaczamy poniżej bez dowodu³ po ich uprzednim przeformułowaniu.

Twierdzenie 13. (Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie modułów) *W notacji Def. 8', 19, 22, 23, 29, 43 i 47 oraz Stw. 13 $\text{Ker } \chi$ jest podmodułem $G^{(1)}$, a nadto istnieje kanoniczny izomorfizm modułów*

$$\lambda_\chi : \text{Coim } \chi \xrightarrow{\cong} \text{Im } \chi,$$

³W każdym z przypadków dowód sprowadza się do bezpośredniego sprawdzenia R -liniowości stosownych homomorfizmów grup skonstruowanych w dowodach odpowiedników wypisanych twierdzeń zamieszczonych w dziale 3.

który czyni przemiennym następujący diagram przemienny o wierszach i kolumnach dokładnych

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \chi & \xrightarrow{J_{\text{Ker } \chi}} & G^{(1)} & \xrightarrow{\chi} & G^{(2)} & \xrightarrow{\pi_{\text{Coker } \chi}} & \text{Coker } \chi & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \pi_{\text{Coim } \chi} & & \uparrow J_{\text{Im } \chi} & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Coim } \chi & \xrightarrow{\lambda_\chi} & \text{Im } \chi & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & & &
 \end{array}$$

Diagram ten opisuje kanoniczny rozkład homomorfizmu χ jak w Tw. 4.

Twierdzenie 14. (Drugie twierdzenie o izomorfizmie modułów) Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 22, 43 i 47. Niechaj $H, K \subset G$ niosą strukturę podmodułu G . Wówczas $K +_G H, K \cap H \subset G$ są podmodułami i istnieje kanoniczny izomorfizm modułów ilorazowych

$$(K +_G H)/H \cong K/(K \cap H).$$

Twierdzenie 15. (Trzecie twierdzenie o izomorfizmie modułów) Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 22, 43 i 47. Niechaj $H_1 \supset H_2$ będą podmodułami G . Istnieje kanoniczny izomorfizm modułów ilorazowych

$$(G/H_2)/(H_1/H_2) \cong G/H_1.$$

Twierdzenie 16. (O liniowym przeciwobrazie normalnego ciągu dokładnego modułów) W notacji Def. 8', 19, 22, 29, 30, 43 oraz 47 i dla dowolnego podmodułu $H^{(2)} \subset G^{(2)}$ oraz homomorfizmu R -modułów lewostronnych $\chi : G^{(1)} \rightarrow G^{(2)}$ podgrupa $\chi^{-1}(H^{(2)})$ jest podmodułem i istnieje kanoniczny monomorfizm indukowany modułów ilorazowych

$$\bar{\chi} : G^{(1)}/\chi^{-1}(H^{(2)}) \rightarrow G^{(2)}/H^{(2)},$$

który czyni przemiennym diagram wypisany w treści Tw. 9. W szczególności jeśli χ jest surjekcją, to wówczas $\bar{\chi}$ jest izomorfizmem modułów.

Zanim przejdziemy do przedstawienia rozmaitych naturalnych konstrukcji wykorzystujących strukturę modułu nad pierścieniem i zbadamy własności odwzorowań liniowych, zapoznamy się z jednym jeszcze wynikiem abstrakcyjnym o niebagatelnym znaczeniu rachunkowym. Jego wyprowadzenie pozwoli nam rozbudować arsenał narzędzi logicznych szczególnie wygodnych w dyskusji struktur algebraicznych o metodę określaną mianem „pogoni wzdłuż diagramu” (z jęz. ang. „diagram chase”).

Stwierdzenie 58. (Lemat Pięciu (Morfizmów)) Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 22, 30, 43 oraz 47 i rozważmy dwie piątki $((A^{(\gamma)}, \phi_2^{(\gamma)}, \phi_1^{(\gamma)}, \phi_0^{(\gamma)}, \ell^{(\gamma)}), \ell^{(\gamma)})$ i $((B^{(\gamma)}, \psi_2^{(\gamma)}, \psi_1^{(\gamma)}, \psi_0^{(\gamma)}, \ell^{(\gamma+5)}), \ell^{(\gamma+5)})$, $\gamma \in \overline{1,5}$ modułów lewostronnych nad pierścieniem R , a wraz z nią – kolekcje $\alpha_\delta, \beta_\delta$, $\delta \in \overline{1,4}$ i $\chi_\gamma, \gamma \in \overline{1,5}$ homomorfizmów modułów, składających się na diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A^{(1)} & \xrightarrow{\alpha_1} & A^{(2)} & \xrightarrow{\alpha_2} & A^{(3)} & \xrightarrow{\alpha_3} & A^{(4)} & \xrightarrow{\alpha_4} & A^{(5)} \\
 \chi_1 \downarrow & & \chi_2 \downarrow & & \chi_3 \downarrow & & \chi_4 \downarrow & & \chi_5 \downarrow \\
 B^{(1)} & \xrightarrow{\beta_1} & B^{(2)} & \xrightarrow{\beta_2} & B^{(3)} & \xrightarrow{\beta_3} & B^{(4)} & \xrightarrow{\beta_4} & B^{(5)}
 \end{array},$$

którego wiersze są ciągami dokładnymi. Wówczas prawdziwe są następujące zdania:

- (i) Jeśli χ_1 jest surjekcją, a χ_2 i χ_4 są injekcjami, to wtedy χ_3 jest injekcją.
- (ii) Jeśli χ_5 jest injekcją, a χ_2 i χ_4 są surjekcjami, to wtedy χ_3 jest surjekcją.

W szczególności więc ilekroć χ_1, χ_2, χ_4 i χ_5 są izomorfizmami, izomorfizmem jest także χ_3 .

Dowód:

Ad (i) Niechaj $g \in \text{Ker } \chi_3$, a wtedy $\chi_4 \circ \alpha_3(g) = \beta_3 \circ \chi_3(g) = 0_{B^{(4)}}$, zatem – wobec injektywności χ_4 – jest $\alpha_3(g) = 0_{A^{(4)}}$, czyli $g \in \text{Ker } \alpha_3$. Skoro jednak górny wiersz diagramu jest dokładny, to $g \in \text{Im } \alpha_2$, tj. is $g = \alpha_2(h)$ dla pewnego $h \in A^{(2)}$, przy czym $0_{B^{(3)}} = \chi_3(g) = \chi_3 \circ \alpha_2(h) = \beta_2 \circ \chi_2(h)$, przeto $\chi_2(h) \in \text{Ker } \beta_2$, skąd – wobec dokładności wiersza dolnego – wniosek, że $\chi_2(h) = \beta_1(k)$ dla pewnego $k \in B^{(1)}$. Ale też χ_1 jest surjekcją, toteż istnieje $l \in A^{(1)}$ spełniający równość $k = \chi_1(l)$, zatem $\chi_2(h) = \beta_1 \circ \chi_1(l) = \chi_2 \circ \alpha_1(l)$. Uwzględniając injektywność χ_2 , otrzymujemy

na tej podstawie równość $h = \alpha_1(l)$ i dalej $g = \alpha_2 \circ \alpha_1(l) = 0_{A^{(3)}}$ z racji dokładności wiersza górnego. Przedstawione rozumowanie dowodzi iniektywności χ_3 .

Ad (ii) Niech teraz $g \in B^{(3)}$, a wtedy – wobec surjektywności χ_4 – zachodzi równość $\beta_3(g) = \chi_4(h)$ dla pewnego $h \in A^{(4)}$, skąd dalej, z uwagi na dokładność wiersza dolnego, $0_{B^{(5)}} = \beta_4 \circ \beta_3(g) = \beta_4 \circ \chi_4(h) = \chi_5 \circ \alpha_4(h)$, ale χ_5 jest iniekcją, zatem $h \in \text{Ker } \alpha_4 = \text{Im } \alpha_3$, czyli $h = \alpha_3(k)$ dla pewnego $k \in A^{(3)}$. W takim razie jednak $\beta_3(g) = \chi_4(h) = \chi_4 \circ \alpha_3(k) = \beta_3 \circ \chi_3(k)$, co prowadzi do równości $g +_{B^{(3)}} (-\chi_3(k)) \in \text{Ker } \beta_3$, co – gdy raz jeszcze wykorzystać dokładność wiersza dolnego – daje $g = \chi_3(k) +_{B^{(3)}} \beta_2(l)$ dla pewnego $l \in B^{(2)}$. Zważywszy surjektywność χ_2 , wnioskujemy na tej podstawie, że $g = \chi_3(k) +_{B^{(3)}} \beta_2 \circ \chi_2(m) = \chi_3(k) +_{B^{(3)}} \chi_3 \circ \alpha_2(m)$ dla pewnego $m \in A^{(2)}$. Ostatecznie zatem $g = \chi_3(k +_{A^{(3)}} \alpha_2(m)) \in \text{Im } \chi_3$, co należało okazać. $\square$

Dalsze nasze rozważania wytyczają strukturalnie najprostszą i najbardziej naturalną drogę od ogólnej struktury modułu nad pierścieniem do struktury przestrzeni wektorowej. Zaczniemy od przypomnienia pojęć pomocniczych.

Definicja 49. Niechaj Λ i S będą zbiorami. **Rodzina elementów zbioru S indeksowana przez zbiór Λ** to odwzorowanie $x : \Lambda \longrightarrow S : \lambda \longmapsto x_\lambda$, przy czym element $\lambda \in \Lambda$ określamy mianem **indeksu**, zbiór Λ zaś – mianem **zbioru indeksów**. Rodzinę taką zapisujemy w postaci $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Ilekroć S jest nośnikiem struktury monoidu o elemencie neutralnym e , wprowadzamy pojęcie **nośnika rodziny** $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ danego wzorem

$$\text{supp } \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} := \{ \lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \neq e \}.$$

Rodzina o nośniku skończonym to taka, której nośnik ma moc skończoną. Zbiór wszystkich takich rodzin będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{R}_0(S)$.

Możemy teraz określić

Definicja 50. W notacji Def. 8', 19, 43 oraz 49 i dla dowolnego podzbioru $S \subset G$ modułu G **kombinacja liniowa elementów zbioru S o współczynnikach z pierścienia R** to dowolna suma (w sensie dodawania $+_G$ w grupie przemiennej G)

$$\sum_{g \in S} r_g \triangleright g,$$

wyznaczona przez rodzinę $\{r_g\}_{g \in S}$ elementów z R indeksowaną przez S , o nośniku skończonym. Elementy tej rodziny określamy mianem **współczynników kombinacji liniowej**.

Przykład(y) 34.

- (1) W $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}^{\times 2}$ z Przykł. 31 (2) element $(5, 2)$ jest kombinacją liniową $2 \triangleright (1, 1) + 3 \triangleright (1, 0)$ o współczynnikach 2 i 3.
- (2) W $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ z Przykł. 31 (5) element $[6]_9$ jest kombinacją liniową $4 \triangleright [7]_9 +_9 (-1) \triangleright [4]_9$ o współczynnikach 4 i -1 .
- (3) W przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej $\mathbb{R}^{\times 3}$ z Przykł. 32 (2) wektor $(\pi, e, \sqrt{2})$ jest kombinacją liniową $\pi \triangleright (1, 0, 0) +_{\mathbb{R}} e \triangleright (0, 1, 0) +_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \triangleright (0, 0, 1)$ o współczynnikach π, e i $\sqrt{2}$.
- (4) W przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej $C([0, 1], \mathbb{R})$ (patrz: Przykł. 32 (5)) wektor $\sinh$ jest kombinacją liniową $\frac{1}{2} \triangleright \exp + (-\frac{1}{2}) \triangleright \exp \circ \text{Inv}_{\mathbb{R}}$ o współczynnikach $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$.

Bez trudu dowodzimy

Stwierdzenie 59. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 49 oraz 50. Podzbiór

$$\langle S \rangle_R := \left\{ \sum_{g \in S} r_g \triangleright g \mid \{r_g\}_{g \in S} \in \mathcal{R}_0(R) \right\} \subset G$$

jest podmodułem G . Jest to najmniejszy podmoduł G zawierający S . Określamy go mianem **(pod)modułu generowanego (albo rozpinanego) przez zbiór S** (albo inaczej **powłoki liniowej zbioru S nad R** czy wreszcie **powłoki R -liniowej zbioru S**), ten ostatni zaś nazywamy **zbiorem generatorów (lub generującym) podmodułu $\langle S \rangle_R$** . Jeśli $S = \{g\}$ (jest singletonem), to odnośny moduł oznaczamy przez $\langle S \rangle_R \equiv \langle g \rangle_R$ i nazywamy **modułem cyklicznym**. Moduł o skończonej liczbie generatorów, tj. taki, dla którego $|S| < \infty$, nosi miano **modułu skończenie generowanego**.

Dowód: Strukturę podgrupy na $\langle S \rangle_R$ określają operacje

$$\begin{aligned}\phi_2 : \langle S \rangle_R^{\times 2} &\longrightarrow \langle S \rangle_R : \left(\sum_{g \in S} r_g \triangleright g, \sum_{g \in S} s_g \triangleright g \right) \longmapsto \sum_{g \in S} (r_g +_R s_g) \triangleright g, \\ \phi_1 : \langle S \rangle_R &\longrightarrow \langle S \rangle_R : \sum_{g \in S} r_g \triangleright g \longmapsto \sum_{g \in S} (-r_g) \triangleright g\end{aligned}$$

oraz

$$\phi_0 : \{\bullet\} \longrightarrow \langle S \rangle_R : \bullet \longmapsto \sum_{g \in S} 0_R \triangleright g = 0_G.$$

Działanie pierścienia R zadajemy wzorem

$$\lambda : R \times \langle S \rangle_R \longrightarrow \langle S \rangle_R : \left(r, \sum_{g \in S} r_g \triangleright g \right) \longmapsto \sum_{g \in S} (r \cdot_R r_g) \triangleright g. \quad (6.1)$$

□

Przykład(y) 35.

- (1) Podmoduł $\langle 0_G \rangle_R = \{0_G\}$ jest modulem trywialnym.
- (2) Moduł R z Przykł. 31 (2) jest powłoką liniową elementu neutralnego 1_R . Jest to zatem moduł cykliczny.
- (3) Podmoduł $\langle [2]_5 \rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ to $\{[0]_5, [2]_5, [4]_5\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, natomiast powłoką $\mathbb{Z}$ -liniową singletonu $\{[4]_5\}$ jest cały moduł $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
- (4) Powłoką liniową pary wektorów $v, w \in \mathbb{R}^3$ w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ jest
 - płaszczyzna przechodząca przez $(0,0,0), v$ i w , gdy ta trójka jest niewspółliniowa – jest to przykład modułu skończenie generowanego niecyklicznego;
 - prosta przechodząca przez $(0,0,0), v$ i w , gdy ta trójka jest współliniowa, a przy tym $v \neq 0$ lub $w \neq 0$;
 - singleton $\{(0,0,0)\}$, gdy $v = (0,0,0) = w$.

Kolejne istotne pojęcia zbiera

Definicja 51. W notacji Def. 8', 19, 43, 49 oraz 50 **rodzina** $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementów modułu G jest **liniowo niezależna nad pierścieniem** R , jeśli spełnia warunek

$$\forall \{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(R) : \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright g_\lambda = 0_G \implies \forall \lambda \in \Lambda : r_\lambda = 0_R \right).$$

Podzbiór $S \subset G$ nazywamy **liniowo niezależnym nad pierścieniem** R , jeśli jako rodzina elementów z R indeksowana przez S jest liniowo niezależny nad R , tj. jeśli znikanie dowolnej kombinacji liniowej $\sum_{g \in S} r_g \triangleright g = 0_G$ implikuje równość $r_g = 0_R$ dla każdego $g \in S$.

Rodzinę $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (wzgl. podzbiór $S \subset G$) nazywamy **liniowo zależną(-nym)**, jeśli nie jest liniowo niezależna(-ny).

Pojęcie liniowej niezależności charakteryzuje następujące

Stwierdzenie 60. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 49 oraz 50. Jeśli podzbiór $S \subset G$ jest liniowo niezależny, to równość kombinacji liniowych jego elementów jest równoznaczna z równością ich współczynników, tj.

$$\sum_{g \in S} r_g \triangleright g = \sum_{g \in S} s_g \triangleright g \iff \forall_{g \in S} : r_g = s_g.$$

Ponadto jeśli $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, to liniowa zależność S jest równoważna temu, że jeden z elementów S jest kombinacją liniową pozostałych.

Dowód: Zachodzi równoważność $\sum_{g \in S} r_g \triangleright g = \sum_{g \in S} s_g \triangleright g \iff \sum_{g \in S} (r_g +_R P_R(s_g)) \triangleright g = 0_G$, która wobec liniowej niezależności S daje pożądaną równość.

Liniowa zależność S w przypadku $R = \mathbb{K}$ jest równoważna istnieniu niezerowej rodziny skalarów $\{r_g\}_{g \in S}$ o skończonym nośniku, dla której $\sum_{g \in S} r_g \triangleright g = 0_G$. Niech $g \in S$ ma tę własność, że $r_g \neq 0_{\mathbb{K}}$, a wtedy otrzymujemy

$$g = -\text{Inv}_{\mathbb{K}}(r_g) \triangleright \sum_{h \in S \setminus \{g\}} r_h \triangleright h = \sum_{h \in S \setminus \{g\}} P_{\mathbb{K}}(\text{Inv}_{\mathbb{K}}(r_g) \cdot_{\mathbb{K}} r_h) \triangleright h,$$

co kończy dowód. □

Przykład(y) 36.

- (1) W $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}^{\times 2}$ z Przykł. 31 (2) zbiór $\{(2, 0), (3, 0)\}$ jest liniowo zależny, bo

$$3 \triangleright (2, 0) + (-2) \triangleright (3, 0) = (0, 0),$$

ale zarazem nie istnieje $n \in \mathbb{Z}$ o własności $(2, 0) = n \triangleright (3, 0)$. Jest to przykład modułu nad pierścieniem, w których równoważność z drugiej części Stw. 60 nie jest prawdziwa.

- (2) W $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ z Przykł. 31 (5) dowolny singleton $\{[k]_n\}$ jest liniowo zależny, patrz: uwaga pod dowodem Stw. 52.
(3) Wielomiany $3t^2 - t^0$ i $2t^2 - 7t^0$ tworzą podzbiór liniowo niezależny modułu $\mathbb{Z}[t]$ nad $\mathbb{Z}$.
(4) W przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej $\mathbb{R}^{\times 2}$ z Przykł. 32 (2) zbiór $\{(2, 7), (15, -2), (1, 58)\}$ jest liniowo zależny.
(5) W przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej $C([0, \pi], \mathbb{R})$ (por. Przykł. 32 (5)) zbiór $\{\sin, \cos\}$ jest liniowo niezależny.

Dotychczasowe rozważania doprowadzają nas wprost do kluczowego pojęcia pozwalającego dokonać precyzyjnego jakościowego rozróżnienia pomiędzy ogólnymi modułami nad pierścieniem i przestrzeniami wektorowymi.

Definicja 52. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 49 i 50 oraz Stw. 59. Rodzinę $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementów modułu G nad pierścieniem R nazwiemy **bazą modułu** G , jeśli jest ona niepusta, liniowo niezależna nad R i generuje G . Podzbiór $S \subset G$ o tych samych własnościach określimy w ten sam sposób.

Moduł wolny (na zbiorze $\mathcal{B}$) to moduł trywialny lub taki, który posiada bazę $\mathcal{B}$.

Przykład(y) 37.

- (1) Element neutralny 1_R jest bazą modułu R z Przykł. 31 (2).
(2) Moduł $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nad pierścieniem $\mathbb{Z}$, choć jest cykliczny, nie posiada bazy, albowiem nie istnieje w nim podzbiór liniowo niezależny, por. uwagę pod dowodem Stw. 52.
(3) Rodzina wektorów $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n}}$, $e_i = (\delta_{i, j}^{\mathbb{K}})_{j \in \overline{1, n}}$, gdzie

$$\delta_{i, j}^{\mathbb{K}} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & \text{dla } j = i \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{dla } j \neq i \end{cases}$$

jest **symbolem Kroneckera** (zwanym też **delta Kroneckera**), jest **bazą standardową** przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^{\times n}$ z Przykł. 32 (2).

Definiującą charakterystykę bazy modułu podaje

Stwierdzenie 61. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 49, 50 i 52. Podzbiór $\mathcal{B} \subset G$ jest bazą modułu G wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall g \in G \exists! \{r_h\}_{h \in \mathcal{B}} \in \mathcal{R}_0(R) : g = \sum_{h \in \mathcal{B}} r_h \triangleright h,$$

tj. gdy każdy element modułu ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji liniowej elementów tego podzbioru.

Dowód:

$\Rightarrow$ Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą G . Wówczas każdy element ma pożądane przedstawienie, gdyż $\mathcal{B}$ jest zbiorem generującym. Jego liniowa niezależność gwarantuje – na mocy Stw. 60 – jednoznaczność takiego rozkładu.

$\Leftarrow$ Istnienie rozkładu oznacza, że $\mathcal{B}$ jest zbiorem generującym, jego jednoznaczność zaś implikuje liniową niezależność elementów bazy, albowiem

$$\sum_{h \in \mathcal{B}} r_h \triangleright h = 0_G = \sum_{h \in \mathcal{B}} 0_R \triangleright h$$

prowadzi do równości $r_h = 0_R$. □

Jak stwierdziliśmy wcześniej, moduł nad pierścieniem może nie posiadać bazy, por. Przykł. 37 (2). Odpowiedzi na pytanie o istnienie bazy w przypadku przestrzeni wektorowej (i tym samym naturalnego kryterium rozróżniającego te dwie struktury) dostarcza

Twierdzenie 17. (O istnieniu bazy przestrzeni wektorowej) *Przyjmijmy notację Def. 9', 19, 43 oraz 45 i załóżmy, że V jest nietrywialną przestrzenią wektorową. Jeśli Γ jest dowolnym zbiorem generatorów V nad $\mathbb{K}$, a S – pewnym liniowo niezależnym (nad $\mathbb{K}$) podzbiorem Γ , to wtedy istnieje w V baza $\mathcal{B}$ o własności $S \subset \mathcal{B} \subset \Gamma$.*

Dowód: Podstawą dowodu jest Lemat Kuratowskiego–Zorna, którego sformułowanie wymaga pewnego przygotowania. Zaczniemy od przypomnienia

Definicja 53. Niechaj S będzie zbiorem. **Częściowy porządek** na S to relacja $\leq \subset S \times S$ o następujących własnościach

- (PO1) (zwrotność) $\forall_{x \in S} : x \leq x$;
- (PO2) (antysymetria) $\forall_{x, y \in S} : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$;
- (PO3) (przechodniość) $\forall_{x, y, z \in S} : (x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z$.

Jeśli $x \leq y$, to mówimy, że y **jest późniejszy** niż x lub też że x **jest wcześniejszy** niż y . Zbiór, na którym został określony częściowy porządek, nazywamy **zbiorem częściowo uporządkowanym**.

Liniowy porządek na S to częściowy porządek spełniający dodatkowy aksjomat

- (PO4) (totalność) $\forall_{x, y \in S} : (x \leq y \vee y \leq x)$,

tj. będący relacją totalną.

Podzbiór $L \subset S$ zbioru S z częściowym porządkiem $\leq$, który jest liniowo uporządkowany (względem $\leq$), określamy mianem **łańcucha** w S . **Ograniczenie górne** łańcucha $L \subset S$ to element $x \in S$ o własności

$$\forall_{y \in L} : y \leq x.$$

Zbiór łańcuchowo zupełny to zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy łańcuch ma ograniczenie górne.

Przykładem częściowego porządku jest relacja $\subset$ (zawierania się) określona na zbiorze 2^S podzbiorów danego zbioru S . Ten właśnie przykład odegra istotną rolę poniżej.

Możemy już teraz wysłowić

Twierdzenie 18. (Lemat Kuratowskiego–Zorna) *W każdym niepustym zbiorze S łańcuchowo zupełnym istnieje element maksymalny m o własności definiującej*

$$\forall_{x \in S} : (m \leq x \implies x = m).$$

Dowód twierdzenia, który można znaleźć w pracy Kuratowskiego i Mostowskiego [KM76, Rozdz. V § 10], wykorzystuje pewnik wyboru. Warto także przeczytać wersję dowodu przedstawioną w książce Langa [Lan02, Dod. 2].

Wracając do dowodu zasadniczego, rozważamy rodzinę zbiorów

$$\mathcal{R}(\Gamma|S) := \{ X \in 2^\Gamma \mid X \supset S \wedge X \text{ liniowo niezależny nad } \mathbb{K} \}$$

z częściowym porządkiem $\subset$. Rodzina ta jest niepusta, gdyż $S \in \mathcal{R}(\Gamma|S)$, a ponadto dla dowolnego łańcucha $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{R}(\Gamma|S)$ podzbiorów $S \subset X_\lambda \subset \Gamma$ (Λ jest tutaj zbiorem indeksów) zachodzi $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \mathcal{R}(\Gamma|S)$, bowiem $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \supset S$, a ponadto każda kombinacja liniowa nad $\mathbb{K}$

$$\mathcal{L}(\mu.) := \sum_{v \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda} \mu_v \triangleright v$$

jest zawarta w pewnym elemencie X_λ rodziny $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ z racji skończoności nośnika rodziny jej współczynników i wobec istnienia liniowego porządku $\subset$ na $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, a zatem

$$\mathcal{L}(\mu.) = 0_G \iff \forall_{v \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda} : \mu_v = 0_{\mathbb{K}}$$

w konsekwencji liniowej niezależności X_λ . Powyższa dyskusja pokazuje, że zbiór $\mathcal{R}(\Gamma|S)$ jest łańcuchowo zupełny, więc też – na mocy Tw. 18 – istnieje element maksymalny

$$S \subset \mathcal{B} \subset \Gamma, \quad \forall_{X \in 2^\Gamma} : X \subset \mathcal{B}.$$

Możemy teraz rozpatrzyć podprzestrzeń $\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}} \subset V$. Gdyby nie zachodziła tu równość, $\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}} \subsetneq V$, to wówczas musiałby istnieć generator $v \in \Gamma$ o własności $v \notin \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}}$, w przeciwnym bowiem razie każdy wektor $w \in V$ można byłoby rozpiąć na generatorach z powłoki $\mathcal{B}$, czyli byłoby $\forall_{w \in V} : w \in \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}}$. Skoro jednak $v \notin \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}}$, to $\mathcal{B} \cup \{v\} \supset \mathcal{B} \supset S$ jest liniowo niezależny, albowiem równość

$$\sum_{w \in \mathcal{B}} \mu_w \triangleright w +_G \mu_v \triangleright v = 0_V$$

implikuje $\mu_v = 0_{\mathbb{K}}$, bo w przeciwnym razie

$$v = \sum_{w \in \mathcal{B}} P_{\mathbb{K}}(\text{Inv}_{\mathbb{K}}(\mu_v) \cdot_{\mathbb{K}} \mu_w) \triangleright w \in \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Wtedy jednak dostajemy

$$\sum_{w \in \mathcal{B}} \mu_w \triangleright w = 0_V,$$

więc też koniecznie $\forall_{w \in \mathcal{B}} : \mu_w = 0_{\mathbb{K}}$ z uwagi na liniową niezależność $\mathcal{B}$. Koniec końców stwierdzamy, że

$$\mathcal{B} \not\subseteq \mathcal{B} \cup \{v\} \in \mathcal{R}(\Gamma|S),$$

co przeczy maksymalności $\mathcal{B}$ w $\mathcal{R}(\Gamma|S)$. Napotkana sprzeczność pokazuje, że musi zachodzić równość $\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}} = V$, a nadto $\mathcal{B} \neq \emptyset$, gdyż $V \neq \{0_V\}$, skąd wniosek, że $\mathcal{B}$ jest bazą o pożądanych własnościach. $\square$

Powyższy dowód, jakkolwiek szalenie elegancki, nie niesie najskromniejszej nawet sugestii odnośnie do *konstrukcji* bazy przestrzeni wektorowej. W przypadku przestrzeni skończonej generowanej (tj. takiej, w której $|\Gamma| < \infty$) niezręczność tę usuwa konstruktywny dowód poniższego

Stwierdzenie 62. (Lemat Steinitza o wymianie) *Dowolny podzbiór liniowo niezależny skończenie generowanej przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ ma moc mniejszą od mocy zbioru generującego lub jej równą, a ponadto można go uzupełnić do bazy tej przestrzeni wektorami ze zbioru generującego.*

Dowód: Niechaj $\Gamma := \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ będzie zbiorem generującym przestrzeni V i niech X będzie zbiorem liniowo niezależnym w V , przy czym zakładamy, że $V \neq \{0_V\}$. Wprowadźmy oznaczenie $m_X := |X|$.

Jeśli $m_X = 0$, to bazę $\mathcal{B}$ tworzymy z elementów Γ w następującej procedurze „lustracji”: posuwając się w kierunku wzrostu indeksu naturalnego i w zbiorze wektorów v_i odrzucamy każdy z wektorów, który jest kombinacją liniową pozostałych (w szczególności v_1 odrzucamy wtedy i tylko wtedy, gdy jest wektorem zerowym). Uzyskany tym sposobem podzbiór $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}\} \subset \Gamma$ jest (niepustym) zbiorem generującym V , a zarazem – wprost z konstrukcji – jest liniowo niezależny, czyli jest bazą.

Żałóżyśmy dalej, że $0 < m_X \leq n$, przy czym $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{m_X}\}$. Skoro Γ jest zbiorem generującym, to istnieje taka rodzina skalarów $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n} \subset \mathbb{K}$, która zadaje rozkład

$$x_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \triangleright v_i.$$

Zauważmy, że rodzina ta musi mieć $\text{supp}\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n} > 0$, w przeciwnym bowiem razie $x_1 = 0$, a wtedy X nie może być liniowo niezależny (bo np. nietrywialna kombinacja liniowa $1_{\mathbb{K}} \triangleright x_1 +_V \sum_{j=2}^n 0_{\mathbb{K}} \triangleright x_j = 0_V$ zadaje rozkład 0_V). Dokonując stosownej permutacji indeksów rodziny Γ , możemy doprowadzić do tego, by $\lambda_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$, a wtedy

$$v_1 = (-\lambda_1^{-1}) \triangleright x_1 +_V \sum_{j=2}^n (-\lambda_1^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \lambda_j) \triangleright v_j,$$

co oznacza, że zbiór $\Gamma^{(1)} := \{x_1\} \cup \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ jest zbiorem generującym V . W takim razie istnieje rodzina skalarów $\{\mu_i\}_{i=1, \dots, n}$ o niepustym nośniku, która zadaje rozkład

$$x_2 = \mu_1 \triangleright x_1 +_V \sum_{j=2}^n \mu_j \triangleright v_j,$$

przy czym musi istnieć indeks $j > 1$ o własności $\mu_j \neq 0_{\mathbb{K}}$, bo inaczej $x_2 \in \langle x_1 \rangle_{\mathbb{K}}$, co przeczy liniowej niezależności X . Przeindeksowując $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$ odpowiednio, doprowadzamy do tego, by było $\mu_2 \neq 0_{\mathbb{K}}$, a wtedy

$$v_2 = (-\mu_2^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \mu_1) \triangleright x_1 +_V (-\mu_2^{-1}) \triangleright x_2 +_V \sum_{j=3}^n (-\mu_2^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} \mu_j) \triangleright v_j,$$

czyli też $\Gamma^{(2)} := \{x_1, x_2\} \cup \{v_3, v_4, \dots, v_n\}$ jest zbiorem generującym V . Zastosowawszy tę procedurę m_X razy, otrzymujemy zbiór generujący $\Gamma^{(m_X)} := X \cup \{v_{m_X+1}, v_{m_X+1}, \dots, v_n\}$, przy czym drugi człon

sumy jest pusty, gdy $m_X = n$. Oznaczmy

$$u_i := \begin{cases} x_i & \text{dla } 1 \leq i \leq m_X \\ v_i & \text{dla } m_X + 1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

„Lustracja” $\Gamma^{(m_X)} \equiv \{u_i\}_{i \in \overline{1, n}}$ wedle opisanego wcześniej schematu nie eliminuje żadnego z elementów $X \subset \Gamma^{(m_X)}$ (z racji liniowej niezależności X), a zatem daje nam bazę V będącą rozszerzeniem X , zgodnie z tezą stwierdzenia.

Jeśli $m_X > n$, to wybierając z X dowolny podzbiór Y o mocy n i stosując do niego powyższe rozumowanie doprowadzamy do zastąpienia wszystkich generatorów z Γ wektorami z Y , co czyni z Y zbiór generujący V . W konsekwencji dowolny wektor $x \in X \setminus Y \neq \emptyset$ jest kombinacją liniową wektorów z Y , co przeczy liniowej niezależności X . Sprzeczność ta dowodzi tej składowej tezy, która orzeka, że $m_X \leq n$, i tym samym zamyka dowód. $\square$

Tę część wykładu zakończymy podsumowaniem własności bazy modułu wolnego.

Stwierdzenie 63. *W dowolnym module G nad pierścieniem R poniższe zdania*

- (i) $\mathcal{B}$ jest bazą G .
- (ii) $\mathcal{B}$ jest maksymalnym (w sensie $\subset$) podzbiorem liniowo niezależnym G .
- (iii) $\mathcal{B}$ jest minimalnym (w sensie $\subset$) podzbiorem generującym G .

pozostają w relacji

$$(i) \implies (ii) \quad (\text{BL})$$

oraz

$$(i) \implies (iii). \quad (\text{BG})$$

Jeśli $R = \mathbb{K}$ jest ciałem, to także

$$(ii) \implies (i) \quad (\text{K-LB})$$

oraz

$$(iii) \implies (i). \quad (\text{K-GB})$$

Dowód:

- (BL) Baza jest z definicji zbiorem liniowo niezależnym, wystarczy zatem wykazać jego maksymalność. W tym celu rozważmy dowolny element $g \in G \setminus \mathcal{B}$. Skoro $G = \langle \mathcal{B} \rangle_R$, to istnieje $\{r_h\}_{h \in \mathcal{B}} \in \mathcal{R}_0(R)$ o własności $\sum_{h \in \mathcal{B}} r_h \triangleright h = g$, a zatem

$$P_R(1) \triangleright g + \sum_{h \in \mathcal{B}} r_h \triangleright h = 0_G,$$

skąd wniosek, że $\mathcal{B} \cup \{g\} \not\subseteq \mathcal{B}$ jest zbiorem liniowo zależnym.

- (BG) Baza jest z definicji zbiorem generującym, pozostaje więc udowodnić jego minimalność. Niech $g \in \mathcal{B}$ i rozważmy $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \setminus \{g\}$. Gdyby było $\langle \mathcal{B}' \rangle_R = G$, to wówczas w szczególności istniałaby rodzina $\{r_h\}_{h \in \mathcal{B}'} \in \mathcal{R}_0(R)$ o własności $\sum_{h \in \mathcal{B}'} r_h \triangleright h = g$, a wtedy mielibyśmy równość

$$P_R(1) \triangleright g + \sum_{h \in \mathcal{B}'} r_h \triangleright h = 0_G,$$

która przeczy liniowej niezależności $\mathcal{B}$.

- (K-LB) Załóżmy, że $\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}} \neq G$, czyli istnieje $g \in G \setminus \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}}$. Wówczas zbiór $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{g\} \not\subseteq \mathcal{B}$ jest liniowo niezależny, gdyby bowiem $\sum_{h \in \mathcal{B}'} r_h \triangleright h = 0_G$ dla pewnej niezerowej rodziny $\{r_h\}_{h \in \mathcal{B}'} \in \mathcal{R}_0(\mathbb{K})$, to musiałoby być $g \in \text{supp } \{r_h\}_{h \in \mathcal{B}'}$ (z racji liniowej niezależności $\mathcal{B}$), a wtedy dostalibyśmy

$$g = \sum_{h \in \mathcal{B}} (-r_g^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} r_h) \triangleright h \in \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{K}},$$

co nie jest prawdą. Jednakowoż liniowa niezależność $\mathcal{B}'$ leży w sprzeczności z założeniem o maksymalności $\mathcal{B}$.

- (K-GB) Przyjmijmy, że $\mathcal{B}$ jest liniowo zależny, czyli $\sum_{g \in \mathcal{B}} r_g \triangleright g = 0_G$ dla pewnej niezerowej rodziny $\{r_g\}_{g \in \mathcal{B}} \in \mathcal{R}_0(\mathbb{K})$. Niech $g \in \mathcal{B}$ ma własność $r_g \neq 0_R$, a wtedy, zdefiniowawszy $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \setminus \{g\}$, otrzymujemy

$$g = \sum_{h \in \mathcal{B}'} (-r_g^{-1} \cdot_{\mathbb{K}} r_h) \triangleright h \in \langle \mathcal{B}' \rangle_{\mathbb{K}},$$

czyli $\mathcal{B}' \not\subseteq \mathcal{B}$ generuje G , co przeczy minimalności $\mathcal{B}$.

□

Przykładem modułu nad pierścieniem, w którym nie jest spełnione wynikanie (K-LB) jest kanoniczny $\mathbb{Z}$ -moduł $\mathbb{Z}$ (patrz: Przykł. 31 (2)), w którym podzbiór $\{2\}$ jest w oczywisty sposób maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym, ale nie generuje całego modułu (bo np. $1 \notin \langle 2 \rangle_{\mathbb{Z}}$). Zdanie (K-GB) traci słuszność np. w przypadku $\mathbb{Z}$ -modułu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (patrz: Przykł. 31 (5)), w którym minimalny zbiór generujący $\{[1]_n\}$ nie jest liniowo niezależny (patrz: uwaga pod dowodem Stw. 52).

Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że wybór bazy – ilekroć jest możliwy – nie jest w ogólności jednoznaczny. Pozostaje jednak intuicyjne pytanie o istnienie niezmiennika takiego wyboru określonego jako moc dowolnego podzbioru bazowego. Do sformułowania pierwszej odpowiedzi w tym kontekście prowadzi nas

Stwierdzenie 64. *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 47 oraz 49. Niechaj $\Lambda \neq \emptyset$ będzie zbiorem (indeksów) i niech rodzina $\mathcal{B}^{(1)} := \{g_\lambda^{(1)}\}_{\lambda \in \Lambda} \subset G^{(1)}$ będzie bazą modułu $G^{(1)}$. Dla dowolnej rodziny $\{g_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda} \subset G^{(2)}$ istnieje jedyny homomorfizm R -modułów*

$$\chi : G^{(1)} \longrightarrow G^{(2)}$$

o własności

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi(g_\lambda^{(1)}) = g_\lambda^{(2)}. \quad (6.2)$$

Dowód: Jest jasne, że rzeczony homomorfizm – o ile istnieje – jest określony jednoznacznie przez warunek (6.2). Istotnie, niech $\tilde{\chi}$ będzie dowolnym innym takim homomorfizmem, a wtedy dla dowolnego $g \in G^{(1)}$, o rozkładzie w bazie $\mathcal{B}^{(1)}$ danym wzorem $g = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(1)} g_\lambda^{(1)}$ dla pewnej rodziny $\{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(R)$, zachodzi równość

$$\tilde{\chi}(g) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\chi}(r_\lambda \triangleright_{(1)} g_\lambda^{(1)}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(2)} \tilde{\chi}(g_\lambda^{(1)}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(2)} g_\lambda^{(2)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(2)} \chi(g_\lambda^{(1)}) = \chi(g),$$

przy czym skorzystaliśmy z tego, że suma występująca powyżej jest skończona, $\tilde{\chi}$ i χ zaś są odwzorowaniami R -liniowymi. Wnioskujemy zatem, że koniecznie $\tilde{\chi} = \chi$. Pozostaje więc wskazać χ . Postulujemy, dla $g \in G^{(1)}$ (dowolnego) jak wyżej,

$$\chi(g) := \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(2)} g_\lambda^{(2)}.$$

Definicja ta spełnia założenia stwierdzenia, oto bowiem

$$\begin{aligned} \chi(g_\lambda^{(1)}) &= \chi\left(1_R \triangleright_{(1)} g_\lambda^{(1)} +_{(1)} \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} 0_R \triangleright_{(1)} g_\mu^{(1)}\right) = 1_R \triangleright_{(2)} g_\lambda^{(2)} +_{(2)} \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} 0_R \triangleright_{(2)} g_\mu^{(2)} = 1_R \triangleright_{(2)} g_\lambda^{(2)} \\ &= g_\lambda^{(2)}, \end{aligned}$$

a przy tym χ jest oczywiście homomorfizmem R -modułów, gdyż – dla dowolnego $r \in R$ –

$$\chi(r \triangleright_{(1)} g) := \sum_{\lambda \in \Lambda} (r \cdot_R r_\lambda) \triangleright_{(2)} g_\lambda^{(2)} = r \triangleright_{(2)} \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(2)} g_\lambda^{(2)} = r \triangleright_{(2)} \chi(g),$$

patrz: (6.1). □

Jako istotny wniosek z powyższego stwierdzenia wyprowadzamy

Corollarium 5. *W notacji Def. 8', 19, 43, 47 i 49 oraz Stw. 64 χ jest izomorfizmem R -modułów, jeśli rodzina $\{g_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest bazą modułu $G^{(2)}$.*

Dowód: Z symetrii zagadnienia wynika – na mocy ostatniego stwierdzenia – istnienie jedyne odwzorowania R -liniowego $\psi : G^{(2)} \longrightarrow G^{(1)}$ o własności $\forall_{\lambda \in \Lambda} : \psi(g_\lambda^{(2)}) = g_\lambda^{(1)}$, które – jak łatwo widać – jest (obustronną) odwrotnością χ . □

Stąd też oczywiste

Corollarium 6. *Dowolne dwa moduły nad tym samym pierścieniem mające bazy jednakowej mocy są izomorficzne.*

Powyższa analiza skłania do postawienia pytania o słuszność implikacji odwrotnej. Odpowiedź dla przypadku modułu nieskończenie generowanego zawiera

Stwierdzenie 65. Przyjmijmy notację Def. 8', 19 oraz 43 i niech Γ_0 będzie minimalnym podzbiorem generującym R -modułu G , przy czym zakładamy, że moc $|\Gamma_0| =: \kappa_0$ jest nieskończona (κ_0 jest stosowną liczbą kardynalną). Każdy podzbiór generujący G ma moc nie mniejszą niż κ_0 . W szczególności G nie jest skończenie generowany. Ponadto dowolne dwa minimalne zbiory generujące mają jednaką moc.

Dowód: Niech Γ będzie dowolnym podzbiorem generującym G , o mocy $\kappa := |\Gamma|$. Dowolny element $g \in \Gamma$ jest kombinacją liniową (skończonej liczby elementów) Γ_0 , tj. $g \in \langle \Gamma_g \rangle_R$ dla pewnego skończonego podzbioru $\Gamma_g \subset \Gamma_0$. Prawdziwa jest równość

$$\Gamma_0 = \bigcup_{g \in \Gamma} \Gamma_g.$$

Istotnie, $U := \bigcup_{g \in \Gamma} \Gamma_g \subset \Gamma_0$, co wynika wprost z definicji, a przy tym $\langle U \rangle_R$ jest podmodułem zawierającym Γ , a zatem równym G (jako zbiór zamknięty ze względu na branie kombinacji liniowych i zarazem zawierający podzbiór generujący). Jest przeto U podzbiorem generującym G zawartym w Γ_0 , co wobec minimalności Γ_0 oznacza równość $U = \Gamma_0$. W jej konsekwencji skończona moc Γ oznaczałaby, że Γ_0 – będąc skończoną sumą mnogościową zbiorów o skończonej mocy – także jest skończony, co przeczy założeniom. Stąd wniosek, że koniecznie Γ jest nieskończony, co pozwala wykorzystać

Lemat 1. Niechaj κ_1 i κ_2 będą liczbami kardynalnymi, z których przynajmniej jedna jest nieskończona. Wówczas

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \sup(\kappa_1, \kappa_2),$$

przy czym lewa strona określa moc iloczynu kartezjańskiego dowolnych zbiorów o mocach κ_1 i κ_2 , odpowiednio.

Dowód powyższego prawa arytmetyki liczb kardynalnych można znaleźć np. w [Bou06, Rozdz. III § 6.3] (patrz: Cor. 4 *ib.*), a pozwala nam ono zapisać nierówność

$$\kappa_0 = |\Gamma_0| \leq \sum_{g \in \Gamma} |\Gamma_g| \leq \aleph_0 \cdot \sum_{g \in \Gamma} 1 = \aleph_0 \cdot \kappa = \sup(\aleph_0, \kappa) = \kappa,$$

która pokazuje, że moc dowolnego zbioru generującego majoryzuje κ_0 . Jeśli przy tym także Γ jest minimalny, to na zasadzie symetrii możemy orzec, że $\kappa \leq \kappa_0$, skąd – w tym przypadku – równość $\kappa = \kappa_0$. $\square$

Okazuje się, że równoliczność dowolnych dwóch baz modułu nad pierścieniem nie jest cechą uniwersalną. Ta konstatacja uzasadnia

Definicja 54. Pierścień o cesze IBN⁴ R to taki, dla którego każde dwie bazy dowolnego modułu (wolnego) G nad tymże pierścieniem mają tę samą moc. Tę ostatnią określamy wtedy mianem **rzędu modułu** i oznaczamy symbolem $\text{rk}_R(G)$.

Brak cechy IBN jest uznawany za patologię w kategorii pierścieni, są jednak znane przykłady struktur tego rodzaju, a nawet całe ich rodziny, patrz: prace Leavitt(-Forgetta) [Lea56, Lea57]. Określoność rzędu jest kolejną cechą wyróżniającą przestrzenie wektorowe spośród modułów. Oto bowiem zachodzi

Twierdzenie 19. (O wymiarze przestrzeni wektorowej) *Dowolne ciało ma cechę IBN, tj. dowolna przestrzeń wektorowa ma dobrze określony rząd.*

Dowód: Zaczniemy od tego, że na mocy Tw. 17 każda przestrzeń wektorowa jest modułem wolnym, możemy zatem mówić o jej bazie. Przy tym w świetle Stw. 63 każdy minimalny podzbiór generujący przestrzeni wektorowej jest jej bazą, więc udowodnione wcześniej Stw. 65 zapewnia słuszność tezy twierdzenia w przypadku przestrzeni nieskończenie generowanej. Pozostaje zająć się przypadkiem skończonym. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą o mocy $n < \infty$. Jak orzeka Stw. 62, dowolny zbiór Γ liniowo niezależny ma moc $m \leq n$, jeśli do tego Γ jest bazą, to – przez symetrię – także $n \leq m$, czyli ostatecznie $m = n$. $\square$

Powyższy wynik uzasadnia

⁴Z jęz. ang., w którym akronim IBN pochodzi od wyrażenia „Invariant Basis Number”, które w wolnym tłumaczeniu oznacza „niezmienniczą moc bazy”.

Definicja 55. Przyjmijmy notację Def. 9', 19, 43 oraz 54. Rząd przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$ określamy mianem **wymiaru** (**$\mathbb{K}$ -liniowego**) tej przestrzeni i oznaczamy symbolem

$$\dim_{\mathbb{K}} V := \text{rk}_{\mathbb{K}}(V).$$

Wprowadzony niezmiennik ma (intuicyjnie) oczekiwaną cechę monotoniczności

Stwierdzenie 66. (Bilans wymiarów) *Przyjmijmy notację Def. 9', 19, 43, 47 i 55. Niechaj V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $W \subset V$ będzie jej podprzestrzenią. Wówczas*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} V/W.$$

W szczególności więc

$$\dim_{\mathbb{K}} W \leq \dim_{\mathbb{K}} V,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $W = V$.

Ogólniej, niech $\chi : V^{(1)} \rightarrow V^{(2)}$ będzie odwzorowaniem $\mathbb{K}$ -liniowym, a wtedy

$$\dim_{\mathbb{K}} V^{(1)} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \chi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi.$$

Dowód: Wynikanie pierwszej równości (więc też i nierówności) z drugiej jest oczywistą konsekwencją istnienia normalnego ciągu dokładnego dla dowolnej podprzestrzeni $W \subset V$ (będącej automatycznie dzielnikiem normalnym przestrzeni V),

$$0 \rightarrow W \xrightarrow{j_W} V \xrightarrow{\pi_{V/W}} V/W \rightarrow 0,$$

które implikuje

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \pi_{V/W} + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \pi_{V/W} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } j_W + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \pi_{V/W} \equiv \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} V/W.$$

W przypadku ogólnym oznaczmy jako $\{v_{\lambda}^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda^{(2)}}$ bazę podprzestrzeni $\text{Im } \chi \subset V^{(2)}$ i jako $\{v_{\nu}^{(1)}\}_{\nu \in \Lambda^{(1)}}$ bazę podprzestrzeni $\text{Ker } \chi \subset V^{(1)}$. Niech też $\{v_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda^{(2)}}$ będzie podzbiorem $V^{(1)}$ określonym przez warunki

$$\forall_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} : \chi(v_{\lambda}) = v_{\lambda}^{(2)}.$$

Twierdzymy, że zbiór $\Gamma^{(1)} := \{v_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \cup \{v_{\nu}^{(1)}\}_{\nu \in \Lambda^{(1)}}$ jest bazą $V^{(1)}$. Istotnie, weźmy dowolny $v \in V^{(1)}$, a wtedy $\chi(v) \in \text{Im } \chi$ możemy przedstawić jednoznacznie jako kombinację liniową elementów bazy

$$\chi(v) = \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \mu_{\lambda} \triangleright_{(2)} v_{\lambda}^{(2)}$$

o współczynnikach z pewnej rodziny $\{\mu_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \in \mathcal{R}_0(\mathbb{K})$, czyli

$$\chi(v) = \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \mu_{\lambda} \triangleright_{(2)} \chi(v_{\lambda}) = \chi \left(\sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \mu_{\lambda} \triangleright_{(1)} v_{\lambda} \right),$$

skąd wniosek, że

$$v +_{(1)} \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} (-\mu_{\lambda}) \triangleright_{(1)} v_{\lambda} \in \text{Ker } \chi,$$

a zatem istnieje jednoznaczny rozkład

$$v +_{(1)} \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} (-\mu_{\lambda}) \triangleright_{(1)} v_{\lambda} = \sum_{\nu \in \Lambda^{(1)}} \zeta_{\nu} \triangleright_{(1)} v_{\nu}^{(1)}$$

dla pewnej rodziny $\{\zeta_{\nu}\}_{\nu \in \Lambda^{(1)}} \in \mathcal{R}_0(\mathbb{K})$. Przepisawszy powyższą równość w postaci

$$v = \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \mu_{\lambda} \triangleright_{(1)} v_{\lambda} +_{(1)} \sum_{\nu \in \Lambda^{(1)}} \zeta_{\nu} \triangleright_{(1)} v_{\nu}^{(1)},$$

stwierdzamy, iż – w rzeczy samej – $\Gamma^{(1)}$ jest podzbiorem generującym $V^{(1)}$. Pozostaje pokazać, że jest on liniowo niezależny. W tym celu rozważmy rozkład

$$0_{(1)} = \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \mu_{\lambda} \triangleright_{(1)} v_{\lambda} +_{(1)} \sum_{\nu \in \Lambda^{(1)}} \zeta_{\nu} \triangleright_{(1)} v_{\nu}^{(1)}.$$

Przykładając χ do obu stron równości, otrzymujemy równość pochodną

$$0_{(2)} = \chi(0_{(1)}) = \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \mu_{\lambda} \triangleright_{(2)} \chi(v_{\lambda}) +_{(2)} \sum_{\nu \in \Lambda^{(1)}} \zeta_{\nu} \triangleright_{(2)} \chi(v_{\nu}^{(1)}) = \sum_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} \mu_{\lambda} \triangleright_{(2)} v_{\lambda}^{(2)},$$

która implikuje

$$\forall_{\lambda \in \Lambda^{(2)}} : \mu_\lambda = 0_{\mathbb{K}}$$

wobec liniowej niezależności $\{v_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda^{(2)}}$. Jest zatem także

$$0_{(1)} = \sum_{\nu \in \Lambda^{(1)}} \zeta_\nu \triangleright_{(1)} v_\nu^{(1)},$$

co oznacza, że

$$\forall_{\nu \in \Lambda^{(1)}} : \zeta_\nu = 0_{\mathbb{K}}$$

z racji liniowej niezależności $\{v_\nu^{(1)}\}_{\nu \in \Lambda^{(1)}}$. Na mocy Stw. 63 $\Gamma^{(1)}$ jest zatem bazą $V^{(1)}$ i zachodzi równość

$$\dim_{\mathbb{K}} V = |\Lambda^{(1)}| + |\Lambda^{(2)}| = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } \chi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \chi.$$

□

Wprowadzamy

Definicja 56. Przyjmijmy notację Def. 9', 19, 43 oraz 55. **Kowymiar podprzestrzeni** $W \subset V$ przestrzeni wektorowej V skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{K}$ to liczba

$$\text{codim}_{\mathbb{K}} W := \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} W.$$

Po omówieniu podstawowych aspektów „anatomii” modułu nad pierścieniem, ze szczególnym uwzględnieniem specyfiki przestrzeni wektorowych nad ciałem, przejdziemy obecnie do dyskusji rozmaitych naturalnych operacji na modułach takich jak produkt, suma prosta oraz iloczyn tensorowy. Uważny Czytelnik dostrzeże z łatwością strukturalne związki między tymi operacjami (szczególniej: dwiema pierwszymi) a rozpatrywanymi wcześniej konstrukcjami iloczynu rozłącznego oraz iloczynu prostego grup. Jako miarę naturalności przedstawianych konstrukcji, pozwalającą uniknąć konieczności uzasadniania rozważań nad nimi *a posteriori*, w odwołaniu do konkretnych sytuacji o znaczeniu matematycznym lub fizycznym, w których występują i odgrywają znaczącą rolę, przyjmujemy ich uniwersalność – definicję tego konstruktu, przykrojoną do ram niniejszego kursu, podajemy poniżej. Godzi się zawczasu podkreślić istotną jego cechę swoistą: oto wyróżnia on nośnik struktury określonego rodzaju (np. moduł nad pierścieniem) poprzez precyzyjne scharakteryzowanie jego własności względem odwzorowań transportujących ową strukturę (np. homomorfizmów modułów). Ten schemat myślenia o obiektach, nie tylko zresztą algebraicznych, jest konkretną realizacją pewnej głębszej idei opisu bytów matematycznych, jaką jest teoria kategorii⁵ [ML71], przedkładająca rzeczony schemat nad szczegółową specyfikacją i jawną rekonstrukcją struktury wewnętrznej bytów opisywanych.

Definicja 57. Przyjmijmy notację Def. 2, 10 oraz 49 i ustalmy rodzinę $\mathcal{S} := \{\mathcal{S}^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ struktur algebraicznych tego samego rodzaju $\mathfrak{R}$,

$$\mathcal{S}^{(\lambda)} := (S^{(\lambda)}, \phi_{k_1}^{(\lambda)}, \phi_{k_2}^{(\lambda)}, \dots, \phi_{k_N}^{(\lambda)}),$$

oznaczając przy tym $S := \{S^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Rozważmy najpierw zbiór $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(\cdot, S)$ wszystkich rodzin $\chi := \{\chi^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ homomorfizmów struktur rodzaju $\mathfrak{R}$ o wspólnej dla całej rodziny dziedzinie i o przeciwdziedzinie S , tj. – dla ustalonej χ –

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^{(\lambda)} : X \longrightarrow S^{(\lambda)}$$

są homomorfizmami struktur rodzaju $\mathfrak{R}$, co będziemy zapisywać zwięźle w postaci $\chi^{(\lambda)} \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(X, S^{(\lambda)})$ oraz $\chi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(X, S)$. Dla dowolnych $\chi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(X, S)$ oraz $\gamma \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(Y, S)$ określamy **homomorfizm przedkładający γ w χ** jako pewien homomorfizm $\Phi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(X, Y)$ o własności (wyrażonej

⁵Warto przy tej okazji wspomnieć, że teoria ta, współtworzona od podstaw przez wychowanka Uniwersytetu Warszawskiego i późniejszego aktywnego bourbakistę Samuela Eilenberga (wraz z Saundersem Mac Lanem) na gruncie – m.in. – rezultatów erlangenckiego programu Kleina opisu geometrii oraz fundamentalnych studiów Noether, Tannaki, Kreina i wielu innych nad związkami między strukturami algebraicznymi i klasami ich realizacji, stanowi – obok logiki, teorii mnogości, teorii przestrzeni Banacha i tzw. przestrzeni polskich, jak również algebry homologicznej – oryginalny a przy tym wysoce niebanalny przyczynek Polskiej Szkoły Matematycznej do rozwoju matematyki nowoczesnej.

przez diagram przemienny i równoważne zdanie logiczne)

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Phi \downarrow & \searrow \chi & \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & S \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{\lambda \in \Lambda} : \chi^{(\lambda)} = \gamma^{(\lambda)} \circ \Phi .$$

Struktura terminalna (zwana też **końcową**) dla zbioru $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(\cdot, S)$ to para

$$(\mathcal{T}, \tau := \{\tau^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda})$$

złożona ze struktury $\mathcal{T}$ rodzaju $\mathfrak{R}$ o nośniku T oraz rodziny $\tau \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(T, S)$ o następującej własności: dla dowolnej struktury $\mathcal{X}$ rodzaju $\mathfrak{R}$ o nośniku X oraz dowolnej rodziny $\xi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(X, S)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm indukowany $\Phi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(X, T)$ przedkładający τ w ξ , co będziemy zapisywać za pomocą diagramu przemiennego

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Phi \downarrow & \searrow \xi & \\ T & \xrightarrow{\tau} & S \end{array} , \quad (6.3)$$

w którym przerywana cięciwa strzałki symbolizuje „istnienie i jedyność”.

Rozpatrzmy następnie zbiór $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, \cdot)$ wszystkich rodzin $\theta := \{\theta^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ homomorfizmów struktur rodzaju $\mathfrak{R}$ o wspólnej dla całej rodziny przeciwdziedzinie i o dziedzinie S , tj. – dla ustalonej θ –

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \theta^{(\lambda)} : S^{(\lambda)} \longrightarrow O$$

są homomorfizmami struktur rodzaju $\mathfrak{R}$, tj. $\theta \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, O)$. Dla dowolnych $\theta \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, O)$ oraz $\zeta \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, Z)$ określamy **homomorfizm po-kładający θ w ζ** jako pewien homomorfizm $\Psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(O, Z)$ o własności (wyrażonej przez diagram przemienny i równoważne zdanie logiczne)

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \Psi \uparrow & \nwarrow \zeta & \\ O & \xleftarrow{\theta} & S \end{array} \quad \equiv \quad \forall_{\lambda \in \Lambda} : \Psi \circ \theta^{(\lambda)} = \zeta^{(\lambda)} .$$

Struktura inicjalna (zwana też **początkową**) dla zbioru $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, \cdot)$ to para

$$(\mathcal{I}, \iota := \{\iota^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda})$$

złożona ze struktury $\mathcal{I}$ rodzaju $\mathfrak{R}$ o nośniku I oraz rodziny $\iota \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, I)$ o następującej własności: dla dowolnej struktury $\mathcal{U}$ rodzaju $\mathfrak{R}$ o nośniku U oraz dowolnej rodziny $v \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, U)$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm indukowany $\Psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{R}}(I, U)$ po-kładający ι w v , co opisuje diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \Psi \uparrow & \nwarrow v & \\ I & \xleftarrow{\iota} & S \end{array} . \quad (6.4)$$

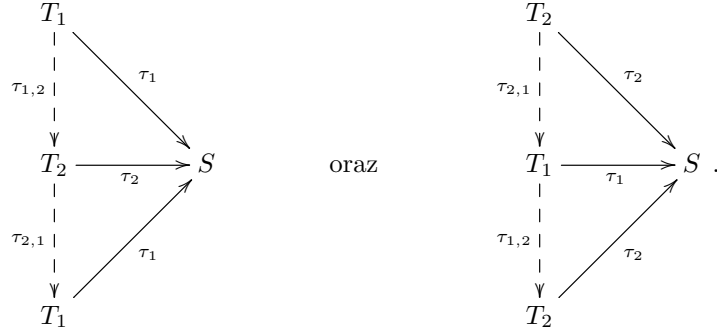
Struktury terminalne i inicjalne (stowarzyszone z daną rodziną $\mathcal{S}$) noszą miano **struktur uniwersalnych**.

Sens uniwersalności łatwo wysłowić w języku potocznym: oto elementy dowolnej rodziny odwzorowań transportujących strukturę rodzaju $\mathfrak{R}$ do $\mathcal{S}$ (wzgl. z $\mathcal{S}$) są przeprowadzane, za pośrednictwem homomorfizmów indukowanych, przez struktury terminalne (wzgl. inicjalne). Na pytanie o istnienie struktur uniwersalnych nie ma uniwersalnej odpowiedzi – tej trzeba każdorazowo poszukiwać w interesującym nas kontekście algebraicznym. Można natomiast bardzo konkretnie skwantyfikować swobodę ich wyboru (będącą miarą ich jednoznaczności), co czyni poniższe

Twierdzenie 20. (O jednoznaczności struktur uniwersalnych) *Przyjmijmy notację Def. 2, 10, 49 oraz 57. Niechaj $(\mathcal{T}_\alpha, \tau_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema strukturami terminalnymi dla $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(\cdot, S)$ i niech $(\mathcal{I}_\beta, \iota_\beta)$, $\beta \in \{1, 2\}$ będą dwiema strukturami inicjalnymi dla $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, \cdot)$. Istnieją jednoznacznie określone izomorfizmy struktury rodzaju $\mathfrak{R}$*

$$\tau_{1,2} : \mathcal{T}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_2, \quad \iota_{1,2} : \mathcal{I}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{I}_2.$$

Dowód: Przeprowadzimy dowód dla struktur terminalnych, pozostawiając Czytelnikowi koncepcyjnie w pełni analogiczny dowód dla struktur inicjalnych. Połóżmy w opisie struktury terminalnej w Def. 57 najpierw $(\mathcal{X}, \xi) := (\mathcal{T}_1, \tau_1)$ (nośnik T_1) i $(\mathcal{Y}, \tau) := (\mathcal{T}_2, \tau_2)$ (nośnik T_2), a następnie – na odwrót – $(\mathcal{X}, \xi) := (\mathcal{T}_2, \tau_2)$ i $(\mathcal{Y}, \tau) := (\mathcal{T}_1, \tau_1)$. Korzystając każdorazowo z definiującej własności struktury terminalnej $(\mathcal{Y}, \tau)$, stwierdzamy istnienie pary *jedynych* homomorfizmów indukowanych, domykających odnośne dwa diagramy przemienne, które złożymy ze sobą na dwa sposoby, jak następuje:



Jak wynika wprost z konstrukcji, $\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2} \in \text{End}_{\mathfrak{R}}(T_1)$ oraz $\tau_{1,2} \circ \tau_{2,1} \in \text{End}_{\mathfrak{R}}(T_2)$ (czyli w szczególności oba złożenia są homomorfizmami struktury rodzaju $\mathfrak{R}$). Z drugiej jednakowoż strony możemy położyć $(\mathcal{X}, \xi) := (\mathcal{T}_\alpha, \tau_\alpha)$ i $(\mathcal{Y}, \tau) := (\mathcal{T}_\alpha, \tau_\alpha)$ dla $\alpha \in \{1, 2\}$, uzyskując odnośne diagramy

$$\begin{array}{ccc} T_\alpha & & \\ \downarrow \varepsilon_\alpha & \searrow \tau_\alpha & \\ T_\alpha & \xrightarrow{\tau_\alpha} & S \end{array},$$

w których homomorfizmy indukowane muszą – wobec swej jedyności – przyjąć prostą postać $\varepsilon_\alpha = \text{id}_{T_\alpha}$ (co stwierdzamy zauważając, że homomorfizmy identycznościowe spełniają kryteria definicyjne). Ten sam argument (jednoznaczność określenia homomorfizmów indukowanych) pozwala nam zapisać tożsamości

$$\tau_{2,1} \circ \tau_{1,2} = \text{id}_{T_1} \quad \wedge \quad \tau_{1,2} \circ \tau_{2,1} = \text{id}_{T_2},$$

na podstawie których wnioskujemy, że $\tau_{1,2}$ jest pożądanym jedynym izomorfizmem struktur terminalnych (o odwrotności $\tau_{2,1}$). $\square$

Praktyczny sens udowodnionego twierdzenia jest oczywisty: każde dwie struktury uniwersalne możemy utożsamić, i to w jednoznaczny sposób (zgodny z niesioną przez nie strukturą algebraiczną), za pośrednictwem stosownego izomorfizmu $\tau_{1,2}$ (wzgl. $\iota_{1,2}$).

Możemy już teraz w pełni świadomie wysłowić

Definicja 58. Przyjmijmy notację Def. 2, 10, 49 oraz 57. **Produkt rodziny struktur $\mathcal{S}$ rodzaju $\mathfrak{R}$** to struktura terminalna

$$\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}^{(\lambda)}, \{ \pi_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla zbioru $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(\cdot, S)$. Homomorfizm π_λ określamy przy tym mianem **rzutu kanonicznego na (składową) $\mathcal{S}^{(\lambda)}$** .

Koproduct rodziny struktur $\mathcal{S}$ rodzaju $\mathfrak{R}$ to struktura inicjalna

$$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}^{(\lambda)}, \{ j_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \right)$$

dla zbioru $\text{Hom}_{\mathfrak{R}}(S, \cdot)$. Homomorfizm j_λ określamy przy tym mianem **włożenia kanonicznego (składowej)** $\mathcal{J}^{(\lambda)}$.

Koprodukt struktur z rodzaju $\mathfrak{R} \in \{\text{grupy przemienne, moduły nad pierścieniem } R\}$ jest najczęściej określamy mianem **sumy prostej**.

Ilustracji wprowadzonych dotychczas pojęć i konstrukcji abstrakcyjnych dostarcza poniższy przykład, którego dokładne zrozumienie w części początkowej dotyczącej produktu stanowi podstawę dalszych naszych rozważań poświęconych modułom.

Przykład(y) 38. Rozważmy strukturę algebraiczną rodzaju trywialnego (tj. „pustego”), której nośnikami są zbiory bez jakichkolwiek wyróżnionych operacji wieloargumentowych i dla której homomorfizmami są dowolne odwzorowania między zbiorami. W tym szczególnym przypadku produktem zbiorów z rodziny $\{S^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest **produkt kartezjański** [KM76, Rozdz. IV § 6]

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} S^{(\lambda)} := \{ f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S^{(\lambda)} \mid \forall_{\lambda \in \Lambda} : f(\lambda) \in S^{(\lambda)} \}$$

wraz z rodziną $\{\pi^{(\lambda)} := \text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ rzutów kanonicznych na składowe $S^{(\lambda)}$,

$$\text{pr}_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} S^{(\lambda)} \longrightarrow S^{(\mu)} : f \longmapsto f(\mu).$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku skończonego zbioru indeksów $\Lambda \equiv \overline{1, n}$ produkt kartezjański sprowadza się do standardowego iloczynu kartezjańskiego⁶ i zapisuje w postaci

$$\times_{k=1}^n S^{(k)} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall_{k \in \overline{1, n}} : x_k \in S^{(k)} \},$$

przy czym

$$\text{pr}_l : \times_{k=1}^n S^{(k)} \longrightarrow S^{(l)} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto x_l.$$

Dla dowolnej rodziny odwzorowań

$$\{f^{(\lambda)} : X \longrightarrow S^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$$

znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\Phi : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} S^{(\lambda)}$$

przedkładające rzuty kanoniczne pr_λ w odwzorowania $f^{(\lambda)}$, a mianowicie

$$x \longmapsto \Phi(x), \quad \Phi(x)(\lambda) := f^{(\lambda)}(x).$$

Koproduktem jest tutaj natomiast **iloczyn rozłączny**⁷

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S^{(\lambda)} := \{ (x, \lambda) \mid x \in S^{(\lambda)} \wedge \lambda \in \Lambda \}$$

wraz z injekcjami (włączeniami) kanonicznymi

$$j_\mu : S^{(\mu)} \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S^{(\lambda)} : x \longmapsto (x, \mu).$$

Z dowolną rodziną odwzorowań

$$\{g^{(\lambda)} : S^{(\lambda)} \longrightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$$

stowarzyszymy jedyne odwzorowanie

$$\Psi : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S^{(\lambda)} \longrightarrow Y$$

po-kładające injekcje kanoniczne j_λ w odwzorowania $g^{(\lambda)}$, a mianowicie

$$(x, \lambda) \longmapsto \Psi(x, \lambda) := g^{(\lambda)}(x).$$

Zwieńczeniem obecnej dyskusji jest szczegółowe *wyprowadzenie* postaci produktu i koprodktu dla struktury z rodzaju moduły nad pierścieniem.

⁶Por. uwagi pod definicją w traktacie Kuratowskiego i Mostowskiego, jak również Konw. 1.

⁷N.B. Ilekroć $x \in S^{(\lambda)} \cap S^{(\mu)}$, $\lambda \neq \mu$, wówczas $(x, \lambda) \neq (x, \mu)$.

Definicja 59. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 49 i 57 oraz Przykł. 38. Niechaj

$$\mathcal{M} := \{\mathcal{M}^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}, \quad \mathcal{M}^{(\lambda)} := \left(\left(G^{(\lambda)}, \phi_2^{(\lambda)}, \phi_1^{(\lambda)}, \phi_0^{(\lambda)} \right), \ell^{(\lambda)} \right)$$

będzie rodziną modułów nad pierścieniem R . **Produkt modułów z rodziny $\mathcal{M}$** to para

$$(\mathcal{M}^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\square := \left(\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right), \ell^\square \right),$$

w której $\phi_n^\square$, $n \in \{0, 1, 2\}$ to *kanonicznie indukowane* operacje grupowe, $\ell^\square$ zaś to *kanonicznie indukowane* działanie R na produkcie kartezjańskim $\prod_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$.

Poświęćmy obecnie trochę czasu na bezpośrednie uzasadnienie i wyjaśnienie powyższej definicji w odwołaniu do wcześniejszej definicji produktu struktur algebraicznych jako struktury terminalnej. Oto więc rozważamy zbiór $G^\square := \prod_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$ z rzutami kanonicznymi $\text{pr}_\lambda : G^\square \rightarrow G^{(\lambda)}$. Dodawania grupowe⁸

$$\phi_2^{(\lambda)} : G^{(\lambda)} \times G^{(\lambda)} \rightarrow G^{(\lambda)}$$

zadają – dla dowolnego indeksu $\lambda \in \Lambda$ – odwzorowania

$$\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) : G^\square \times G^\square \rightarrow G^{(\lambda)},$$

co wobec terminalności pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$, w której $G^\square$ traktowane jest jako struktura trywialna (czyli „goły” zbiór), oznacza istnienie jedynego odwzorowania (*a priori* bez dodatkowych własności względem operacji grupowych i działań określonych dla poszczególnych składowych rodziny)

$$\phi_2^\square : G^\square \times G^\square \rightarrow G^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda). \quad (6.5)$$

Zauważmy, że jeśli tylko $\phi_2^\square$ jest poprawnie określonym dodawaniem na $G^\square$ a rzuty pr_λ są homomorfizmami grup transportującymi owo dodawanie w dodawanie w poszczególnych składowych $G^{(\lambda)}$, czego mozolnie dowodzimy poniżej, to tożsamość (6.5) identyfikuje operację $\phi_2^\square$ jako „dodawanie po współrzędnych”. Łatwo przy tym stwierdzamy, że homomorficzność rzutów wynika bezpośrednio z założenia, że $\phi_2^\square =: +_\square$ jest pożądaną operacją grupową, oto bowiem (6.5) implikuje równość

$$\text{pr}_\lambda(g +_\square h) = \text{pr}_\lambda(g) +_{(\lambda)} \text{pr}_\lambda(h),$$

śluszną dla dowolnych dwóch elementów $g, h \in G^\square$ a oznaczającą właśnie, że pr_λ są homomorfizmami grup. Wystarczy zatem sprawdzić definiujące własności dodawania grupowego w odniesieniu do odwzorowania $\phi_2^\square$. W pierwszej kolejności zbadamy jego łączność. Biorąc dowolne $g, h, k \in G^\square$, obliczamy – wykorzystując po drodze (przy przejściu z linii 2. do linii 3.) łączność operacji $\phi_2^{(\lambda)}$ –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(\phi_2^\square(g, h), k) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(\phi_2^\square(g, h), k) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, h), \text{pr}_\lambda(k)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, h), \text{pr}_\lambda(k)\right) \equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(h)), \text{pr}_\lambda(k)\right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}\left(\text{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(h), \text{pr}_\lambda(k))\right) \equiv \phi_2^{(\lambda)}\left(\text{pr}_\lambda(g), \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(h, k)\right) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(h, k)) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, \phi_2^\square(h, k)) \\ &= \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, \phi_2^\square(h, k)). \end{aligned}$$

Tym sposobem otrzymujemy dwa odwzorowania

$$G^\square \times G^\square \times G^\square \xrightarrow[\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)]{\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G^{(\lambda)},$$

których obrazy pokrywają się, dając odwzorowanie $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G^{(\lambda)}} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$. Raz jeszcze przywołując terminalność pary $(G^\square, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$, wnioskujemy, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie

$$\alpha^\square : G^\square \times G^\square \times G^\square \rightarrow G^\square$$

⁸Opisywana konstrukcja produktu po opuszczeniu działań $\ell^{(\lambda)}$ stosuje się także do grup nieprzemiennej.

przez nie indukowane, a ponieważ zarówno $\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square})$, jak i $\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square)$ spełniają równość definiującą to odwzorowanie,

$$\text{pr}_\lambda \circ \alpha^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{id}_{G^{(\lambda)}} \times \phi_2^{(\lambda)}) \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda),$$

przeto koniecznie

$$\phi_2^\square \circ (\phi_2^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \alpha^\square = \phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_2^\square),$$

co dowodzi łączności $\phi_2^\square$.

Analogicznie wykazujemy przemienność $\phi_2^\square$, korzystając z przemienności $\phi_2^{(\lambda)}$. Oto bowiem, dla dowolnych $g, h \in G^\square$,

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ (\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}(g, h)) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(h, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(h), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(h)) \equiv \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(g, h) = \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(g, h), \end{aligned}$$

skąd równość odwzorowań

$$G^\square \times G^\square \xrightarrow[\phi_2^\square]{\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square}} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G^{(\lambda)},$$

tożsamy z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$, czyli wobec jednoznaczności określenia indukowanego przezeń odwzorowania

$$\beta^\square : G^\square \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \beta^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)$$

mamy pożądaną idyntyfikator

$$\phi_2^\square \circ \tau_{G^\square} = \beta^\square = \phi_2^\square.$$

Następnie rozważamy elementy neutralne w każdej z grup składowych,

$$\phi_0^{(\lambda)} : \{\bullet\} \longrightarrow G^{(\lambda)} : \bullet \longmapsto e^{(\lambda)},$$

i zapominając jak uprzednio o strukturze algebraicznej na rozważanych zbiorach, stowarzyszymy z nimi jedyne odwzorowanie

$$\phi_0^\square : \{\bullet\} \longrightarrow G^\square : \bullet \longmapsto e^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square = \phi_0^{(\lambda)}.$$

W ten sposób wyróżniamy element $e^\square$ zbioru $G^\square$, o sugestywnej postaci uogólnionego ciągu (o indeksach z Λ) elementów neutralnych z grup składowych. Jego własności względem dodawania $\phi_2^\square$ sprawdzamy w bezpośrednim rachunku. Biorąc dowolny element $g \in G^\square$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square(e^\square, g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda)(e^\square, g) \equiv \phi_2^{(\lambda)}(\text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) = \phi_2^{(\lambda)}(\phi_0^{(\lambda)}(\bullet), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &\equiv \phi_2^{(\lambda)}(e^{(\lambda)}, \text{pr}_\lambda(g)) = \text{pr}_\lambda(g) \equiv \text{pr}_\lambda \circ \text{pr}_2(e^\square, g), \end{aligned}$$

stąd zaś równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\square \xrightarrow[\text{pr}_2]{\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square})} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G^{(\lambda)},$$

pokrywających się z $\phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda)$. Znowu więc znajdujemy jedyne odwzorowanie

$$\varepsilon^\square : \{\bullet\} \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

spełniające warunek $\text{pr}_\lambda \circ \varepsilon^\square = \phi_2^{(\lambda)} \circ (\phi_0^{(\lambda)} \times \text{pr}_\lambda)$, a zatem

$$\phi_2^\square \circ (\phi_0^\square \times \text{id}_{G^\square}) = \varepsilon^\square = \text{pr}_2.$$

Podobnie dowodzimy tożsamości

$$\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square} \times \phi_0^\square) = \text{pr}_1,$$

co w sumie pokazuje dowodnie, że $e^\square$ jest elementem neutralnym dodawania $\phi_2^\square$.

Bez trudu rekonstruujemy też operację brania przeciwności w $G^\square$, biorąc za punkt wyjścia odnośne operacje w składowych

$$\phi_1^{(\lambda)} : G^{(\lambda)} \curvearrowright .$$

Rozumując jak wcześniej, tworzymy rodzinę odwzorowań

$$\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda : G^\square \longrightarrow G^{(\lambda)} ,$$

z którymi możemy związać jedyne odwzorowanie

$$\phi_1^\square : G^\square \curvearrowright$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square = \phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda ,$$

która identyfikuje $\phi_1^\square$ jako „branie przeciwności po współrzędnych”. Trzeba jeszcze tylko upewnić się, że odwzorowanie to nadaje monoidowi przemienemu $(G^\square, \phi_2^\square, \phi_0^\square)$ strukturę grupy przemiennej. Z rachunku

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\square (\phi_1^\square(g), g) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) (\phi_1^\square(g), g) \equiv \phi_2^{(\lambda)} (\text{pr}_\lambda \circ \phi_1^\square(g), \text{pr}_\lambda(g)) \\ &= \phi_2^{(\lambda)} (\phi_1^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda(g), \text{pr}_\lambda(g)) = e^{(\lambda)} = \phi_0^{(\lambda)}(\bullet) = \text{pr}_\lambda \circ \phi_0^\square(\bullet) , \end{aligned}$$

wykonanego dla dowolnego $g \in G^\square$ a wskazującego na równość odwzorowań

$$\{\bullet\} \times G^\square \xrightarrow[\phi_0^\square \circ \text{pr}_1]{\phi_2^\square \circ (\phi_1^\square, \text{id}_{G^\square}) \circ \text{pr}_2} G^\square \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G^{(\lambda)} ,$$

identycznych z $\phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1$, wywodzimy wniosek o istnieniu jedynego odwzorowania

$$\mu^\square : \{\bullet\} \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności $\text{pr}_\lambda \circ \mu^\square = \phi_0^{(\lambda)} \circ \text{pr}_1$. Ostatecznie więc stwierdzamy słuszność tożsamości

$$\phi_2^\square \circ (\phi_1^\square, \text{id}_{G^\square}) \circ \text{pr}_2 = \mu^\square = \phi_0^\square \circ \text{pr}_1 .$$

Analogiczne wnioskowanie prowadzi do jej symetrycznego odpowiednika

$$\phi_2^\square \circ (\text{id}_{G^\square}, \phi_1^\square) \circ \text{pr}_2 = \mu^\square = \phi_0^\square \circ \text{pr}_1 ,$$

co potwierdza identyfikację $\phi_1^\square$ jako operacji brania przeciwności.

Na koniec wreszcie indukujemy na zrekonstruowanej powyżej grupie przemiennej strukturę modułu nad pierścieniem R ze struktur składowych. W tym celu z każdego z działań

$$\ell^{(\lambda)} : R \times G^{(\lambda)} \longrightarrow G^{(\lambda)}$$

budujemy odwzorowanie

$$\ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) : R \times G^\square \longrightarrow G^{(\lambda)} ,$$

co daje nam jedyne odwzorowanie

$$\ell^\square : R \times G^\square \longrightarrow G^\square$$

o własności

$$\text{pr}_\lambda \circ \ell^\square = \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) .$$

Z tej ostatniej odczytujemy definicję $\ell^\square$ jako „działania po współrzędnych”. W żmudnym, lecz poza tym absolutnie trywialnym rachunku przekonujemy się, że tak zdefiniowane odwzorowanie spełnia aksjomaty działania, i tym samym zamykamy kanoniczną konstrukcję modułu na produkcie kartezjuskim $G^\square$.

O ile konstrukcja produktu modułów postępuje automatycznie po dokonaniu narzucającego się wyboru nośnika $G^\square$, o tyle konstrukcja koproduktu, który będziemy w dalszej części kursu nazywać sumą prostą modułów, wymaga pewnej dozy inwencji oraz rozlicznych sprawdzeń (jednoznaczności konstrukcji). Zaznaczamy zawczasu, że poniższa konstrukcja stosuje się wyłącznie do grup przemiennych, co będziemy podkreślać pisząc $e^{(\lambda)}$ w notacji addytywnej jako $0_{(\lambda)}$

Definicja 60. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 49, 57 i 59. **Suma prosta modułów z rodziny** $\mathcal{M}$ to para

$$(\mathcal{M}^\sqcup, \{j_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}), \quad \mathcal{M}^\oplus := \left(\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}, \phi_2^\sqcup, \phi_1^\sqcup, \phi_0^\sqcup \right), \ell^\sqcup \right),$$

w której $\mathcal{M}^\oplus$ jest podmodułem produktu modułów $\mathcal{M}^\sqcup$ z rodziny $\mathcal{M}$ o nośniku

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} := \{ g \in G^\sqcup \mid |\{ \lambda \in \Lambda \mid \text{pr}_\lambda(g) \neq 0_{(\lambda)} \}| < \infty \} \quad (6.6)$$

(czyli $\text{pr}_\lambda(g)$ jest różne od elementu neutralnego dla prawie wszystkich indeksów) i w której $j_\lambda : G^{(\lambda)} \rightarrow G^\sqcup$ są injeccjami kanonicznymi spełniającymi warunki

$$\forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} : \text{pr}_\lambda \circ j_\mu(g_\mu) := \begin{cases} g_\mu & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0_{(\lambda)} & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}. \quad (6.7)$$

Pokażemy najpierw, że odwzorowania j_λ są homomorfizmami oraz że mają cechę uniwersalności. Na początku ustalmy (dowolnie) indeks $\mu \in \Lambda$ i obliczmy – dla dowolnych $g_\mu, h_\mu \in G^{(\mu)}$ –

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \phi_2^\sqcup \circ (j_\mu \times j_\mu)(g_\mu, h_\mu) &= \phi_2^{(\lambda)} \circ (\text{pr}_\lambda \times \text{pr}_\lambda) \circ (j_\mu \times j_\mu)(g_\mu, h_\mu) = \phi_2^{(\lambda)} \circ ((\text{pr}_\lambda \circ j_\mu) \times (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu))(g_\mu, h_\mu) \\ &= \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ \phi_2^{(\lambda)}(0_{(\lambda)}, 0_{(\lambda)}) = 0_{(\lambda)} & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases} = \text{pr}_\lambda \circ j_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu), \end{aligned}$$

dowodząc tym samym równości dwóch rodzin odwzorowań

$$G^{(\mu)} \times G^{(\mu)} \xrightarrow[\text{j}_\mu \circ \phi_2^{(\mu)}]{\phi_2^\sqcup \circ (j_\mu \times j_\mu)} G^\sqcup \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G^{(\lambda)}$$

identycznych z $\psi^{(\lambda)} : (g_\mu, h_\mu) \mapsto \begin{cases} \phi_2^{(\mu)}(g_\mu, h_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0_{(\lambda)} & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. W konsekwencji terminalności pary $(G^\sqcup, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ równość ta implikuje istnienie jedynej rodziny odwzorowań

$$\alpha^{(\mu)} : G^{(\mu)} \times G^{(\mu)} \rightarrow G^\sqcup$$

o własności

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \text{pr}_\lambda \circ \alpha^{(\mu)} = \psi^{(\lambda)}.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o równości

$$\phi_2^\sqcup \circ (j_\mu \times j_\mu) = j_\mu \circ \phi_2^{(\mu)},$$

która wyraża homomorficzny charakter j_μ . Dowód uniwersalności j_λ wymaga, iżbyśmy z dowolną rodziną homomorfizmów grup (przemiennych)

$$\chi^{(\lambda)} : G^{(\lambda)} \rightarrow X$$

określoną dla dowolnej grupy przemiennej X potrafili stowarzyszyć odwzorowanie

$$H : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \rightarrow X$$

spełniające relacje

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : H \circ j_\lambda = \chi^{(\lambda)} \quad (6.8)$$

oraz udowodnić, że odwzorowanie o tej własności jest dane jednoznacznie. Postulujemy, dla dowolnego $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$,

$$H(g) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda(g).$$

Zauważmy, że suma w powyższej definicji jest skończona, por. (6.6), zatem definicja ma sens. Sprawdzamy też bez trudu (6.8), wybrawszy dowolnie $g_\lambda \in G^{(\lambda)}$,

$$\begin{aligned} H \circ j_\lambda(g_\lambda) &= \sum_{\mu \in \Lambda} \chi^{(\mu)} \circ \text{pr}_\mu \circ j_\lambda(g_\lambda) \equiv \chi^{(\lambda)} \circ \text{pr}_\lambda \circ j_\lambda(g_\lambda) +_X \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi^{(\mu)} \circ \text{pr}_\mu \circ j_\lambda(g_\lambda) \\ &= \chi^{(\lambda)}(g_\lambda) +_X \sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} \chi^{(\mu)}(0_{(\mu)}) = \chi^{(\lambda)}(g_\lambda). \end{aligned}$$

Dowodzimy następnie jedyności H . Niechaj $\tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \longrightarrow X$ będzie dowolnym innym takim odwzorowaniem, a wtedy różnica odwzorowań

$$H - \tilde{H} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \longrightarrow X : g \longmapsto H(g) +_X \text{P}_X \circ \tilde{H}(g),$$

będąca homomorfizmem grup przemiennych (przypomnijmy, że rzuty kanoniczne są homomorfizmami grup przemiennych), spełnia tożsamości

$$(H - \tilde{H}) \circ j_\lambda(g_\lambda) = H \circ j_\lambda(g_\lambda) +_X \text{P}_X (\tilde{H} \circ j_\lambda(g_\lambda)) = \chi^{(\lambda)}(g_\lambda) +_X \text{P}_X (\chi^{(\lambda)}(g_\lambda)) = 0_X.$$

Możemy stąd wyciągnąć prosty wniosek:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(G^{(\lambda)}) \subset \text{Ker}(H - \tilde{H}).$$

Jednakowoż $\text{Ker}(H - \tilde{H})$ jest – na mocy Stw. 21 – podgrupą $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$, tj. podzbiorem domkniętym ze względu na operację brania skończonych sum jego elementów, każdy zaś element $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$ jest taką właśnie sumą skończoną elementów z różnych $j_\lambda(G^{(\lambda)})$. Ażeby się o tym przekonać, rozważmy odwzorowanie

$$\iota^\oplus : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \curvearrowright : g \longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g),$$

które jest dobrze określone z tych samych powodów co H i które wobec homomorficzności rzutów kanonicznych spełnia tożsamości

$$\text{pr}_\lambda \circ \iota^\oplus(g) \equiv \text{pr}_\lambda \circ \sum_{\mu \in \Lambda} j_\mu \circ \text{pr}_\mu(g) = \sum_{\mu \in \Lambda} (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu)(\text{pr}_\mu(g)) = \text{pr}_\lambda(g),$$

które – jak w poprzednio dyskutowanych przypadkach (tj. w konsekwencji terminalności produktu kartezjańskiego) – prowadzą do równości

$$\iota^\oplus = \text{id}_{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}},$$

zadającej rzeczony rozkład g na skończoną sumę

$$g = \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g). \quad (6.9)$$

Wracając do zasadniczego wywodu, stwierdzamy, że jedynym podzbiorem $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$ zawierającym $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda(G^{(\lambda)})$ i domkniętym ze względem operacji brania sum skończonych jest cały zbiór $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$,

$$\text{Ker}(H - \tilde{H}) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)},$$

czyli też ostatecznie

$$H = \tilde{H}.$$

Należy podkreślić, że nigdzie w dotychczasowej dyskusji koproduktu nie braliśmy pod uwagę dodatkowej struktury R -modułu na nośniku grupy przemiennej, możemy przeto podsumować tę jej część stwierdzeniem, że oto czwórka

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}, \phi_2^\square, \phi_1^\square, \phi_0^\square \right)$$

stanowi spójną definicję sumy prostej grup przemiennych. Jako że działanie pierścienia R w jawny sposób zachowuje podgrupę $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \subset G^\square$, dla naszych celów wystarczy jeszcze tylko upewnić się, że zarówno iniekcje kanoniczne j_λ , jak też jedyny homomorfizm grup H są odwzorowaniami R -liniowymi. W tym drugim przypadku własność ta jest bezpośrednim następstwem R -liniowości rzutów kanonicznych π_λ oraz odwzorowań $\chi^{(\lambda)}$. W przypadku pierwszym R -liniowości stwierdzamy na gruncie terminalności produktu kartezjańskiego oraz dowiedzionych własności odwzorowań $\ell^\square$ i $\ell^{(\lambda)}$, stosując sprawdzoną strategię rozważań wcześniejszych. Punktem wyjścia jest obserwacja (wysłowiona dla dowolnych $\lambda, \mu \in \Lambda$ oraz $(r, g_\mu) \in R \times G^{(\mu)}$)

$$\begin{aligned} \text{pr}_\lambda \circ \ell^\square \circ (\text{id}_R \times j_\mu)(r, g_\mu) &= \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda) \circ (\text{id}_R \times j_\mu)(r, g_\mu) \equiv \ell^{(\lambda)} \circ (\text{id}_R \times \text{pr}_\lambda \circ j_\mu)(r, g_\mu) \\ &= (\text{pr}_\lambda \circ j_\mu) \circ \ell^{(\mu)}(r, g_\mu), \end{aligned}$$

wskazująca na równość dwóch rodzin odwzorowań

$$R \times G^{(\mu)} \xrightarrow[\jmath_\mu \circ \ell^{(\mu)}]{\ell^\Gamma \circ (\text{id}_R \times \jmath_\mu)} \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G^{(\nu)} \xrightarrow{\text{pr}_\lambda} G^{(\lambda)},$$

identycznych z $r^{(\lambda)} : (r, g_\mu) \mapsto \begin{cases} \ell^{(\mu)}(r, g_\mu) & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0_{(\lambda)} & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases}$. Terminalność pary $(G^\Gamma, \{\text{pr}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ przesądza w tej sytuacji o istnieniu jedynej rodziny odwzorowań

$$\rho^{(\mu)} : R \times G^{(\mu)} \longrightarrow \bigoplus_{\nu \in \Lambda} G^{(\nu)} \subset G^\Gamma$$

o własności

$$\forall_{\lambda \in \Lambda} : \text{pr}_\lambda \circ \rho^{(\mu)} = r^{(\lambda)}.$$

Stąd ostatecznie wyprowadzamy pożądaną równość

$$\jmath_\lambda \circ \ell^{(\lambda)} = \ell^\Gamma \circ (\text{id}_R \times \jmath_\lambda)$$

wyrażającą R -liniowość iniekcji kanonicznych.

Warto zwrócić uwagę, że o ile definicja obu rozpatrywanych struktur uniwersalnych: produktu oraz sumy prostej modułów stawia je na pozycjach obiektów wzajem „dualnych” (co odzwierciedla odwrócenie strzałek w odnośnych diagramach przemiennych precyzujących sens uniwersalności), o tyle bezpośrednia konstrukcja w kontekście teorii modułów nad pierścieniem uwypukla ich wewnątrzstrukturalne powinowactwo, prowadząc wprost do

Corollarium 7. *Produkt i suma prosta skończonej rodziny modułów nad pierścieniem pokrywają się.*

Notacja 5. W przypadku skończonej rodziny $\{G^{(k)}\}_{k \in \overline{1, n}}$, $n \in \mathbb{N}$ modułów nad pierścieniem R będziemy czasem stosować zapis

$$\bigoplus_{k \in \overline{1, n}} G^{(k)} \equiv G^{(1)} \oplus G^{(2)} \oplus \dots \oplus G^{(n)}.$$

✓

W dalszej części wykładu zajmiemy się prostą, konstruktywną charakteryzacją modułów o strukturze sumy prostej. Zaczniemy od istotnego

Stwierdzenie 67. *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 49, 57, 59 i 60. Niechaj $((H, \phi_2^H, \phi_1^H, \phi_0^H), \ell^H)$ będzie modulem nad pierścieniem R i niech $\{\chi^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie rodziną odwzorowań R -liniowych $\chi^{(\lambda)} : G^{(\lambda)} \rightarrow H$, indukującą – według Diag. 6.4 – jedyne odwzorowanie R -liniowe $\chi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \rightarrow H$ pokładające iniekcje kanoniczne $\jmath_\lambda$ w odwzorowania $\chi^{(\lambda)}$. Na to by χ był izomorfizmem R -modułów, potrzeba i wystarcza, iżby istniała rodzina $\{\psi^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ odwzorowań R -liniowych $\psi^{(\lambda)} : H \rightarrow G^{(\lambda)}$ o następujących własnościach:*

$$(DS1) \quad \forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} : \psi^{(\lambda)} \circ \chi(\mu) = \begin{cases} \text{id}_{G^{(\lambda)}} & \text{dla } \lambda = \mu \\ 0 & \text{dla } \lambda \neq \mu \end{cases};$$

(DS2)

$$\forall_{h \in H} : \left(|\{ \lambda \in \Lambda \mid \psi^{(\lambda)}(h) \neq 0_{(\lambda)} \}| < \infty \quad \wedge \quad h = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^{(\lambda)} \circ \psi^{(\lambda)}(h) \right).$$

Dowód:

$\Rightarrow$ Jeśli χ jest izomorfizmem, to istnieje izomorfizm odwrotny $\chi^{-1} : H \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$, a wtedy naturalnym (z punktu widzenia konstrukcji struktur uniwersalnych) staje się rozważenie rodziny odwzorowań R -liniowych

$$\psi^{(\mu)} : H \xrightarrow{\chi^{-1}} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \xrightarrow{\text{pr}_\mu} G^{(\mu)},$$

które spełniają tożsamości

$$\psi^{(\lambda)} \circ \chi^{(\mu)} \equiv \text{pr}_\lambda \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ \jmath_\mu = \text{pr}_\lambda \circ \jmath_\mu.$$

Z tych ostatnich wynika już wprost własność (DS1), patrz: (6.7). Skończoność nośnika rodziny $\{\psi^{(\lambda)}(g)\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest tutaj natychmiastową konsekwencją definicji sumy prostej. Ponadto zachodzi

$$\chi^{(\lambda)} \circ \psi^{(\lambda)} = \chi \circ \jmath_\lambda \circ \text{pr}_\lambda \circ \chi^{-1},$$

co w połączeniu z (6.9) implikuje drugą część zdania (DS2),

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda \circ \psi_\lambda(h) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi \circ j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda \circ \chi^{-1}(h) = \chi \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda (\chi^{-1}(h)) \right) = \chi (\chi^{-1}(h)) = h.$$

$\Leftarrow$ Ilekoć prawdziwe jest zdanie (DS2), możemy zdefiniować odwzorowanie jawnie R -liniowe

$$\psi(h) := \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \psi^{(\lambda)}(h)$$

modułu H w $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$. Wobec homomorficzności χ i na mocy (DS2) zachodzi

$$\chi \circ \psi(h) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi \circ j_\lambda \circ \psi^{(\lambda)}(h) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi^{(\lambda)} \circ \psi^{(\lambda)}(h) = h.$$

Z drugiej strony dla dowolnego $g \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$ otrzymujemy wobec (DS1)

$$\psi^{(\lambda)} \circ \chi(g) = \psi^{(\lambda)} \circ \chi \left(\sum_{\mu \in \Lambda} j_\mu \circ \text{pr}_\mu(g) \right) \equiv \psi^{(\lambda)} \left(\sum_{\mu \in \Lambda} \chi^{(\mu)} \circ \text{pr}_\mu(g) \right) = \text{pr}_\lambda(g),$$

a stąd

$$\psi \circ \chi(g) \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \psi^{(\lambda)} \circ \chi(g) = \sum_{\lambda \in \Lambda} j_\lambda \circ \text{pr}_\lambda(g) = g,$$

co pokazuje, że ψ jest homomorfizmem odwrotnym do χ .

□

Zajmiemy się teraz ważnym przypadkiem szczególnym, kiedy to sumę prostą tworzą podmoduły modułu danego.

Definicja 61. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 46, 49, 57, 59 i 60 oraz Przykł. 15 (7). Niechaj $((G, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$ będzie modulem nad pierścieniem R i niech $\{G^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie rodziną jego podmodułów. G jest sumą prostą wszystkich modułów z tej rodziny, jeśli jedyne odwzorowanie $j_\oplus : \bigoplus_{\mu \in \Lambda} G^{(\mu)} \rightarrow G$ po-kładające – według Diag. 6.4 – iniekcje kanoniczne $j_\lambda : G^{(\lambda)} \rightarrow \bigoplus_{\mu \in \Lambda} G^{(\mu)}$ we włożenia standardowe $j_{G^{(\lambda)}} : G^{(\lambda)} \rightarrow G$ jest izomorfizmem modułów, lub też – co na jedno wychodzi – jeśli dowolny element $g \in G$ ma jednoznaczny rozkład w postaci

$$g = \sum_{\lambda \in \Lambda} g^{(\lambda)}, \quad g^{(\lambda)} \in G^{(\lambda)},$$

zadawany przez rodzinę $\{g^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ o nośniku skończonym. Sumę prostą opisanego typu określamy mianem **wewnętrznej sumy prostej podmodułów**, natomiast niezerowe elementy rozkładu $g^{(\lambda)}$ to **składowe z podmodułu $G^{(\lambda)}$** .

Wygodnym jest mieć do dyspozycji kilka równoważnych praktycznych definicji wewnętrznej sumy prostej. Dostarcza ich poniższe

Stwierdzenie 68. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 46, 49, 57, 59, 60 oraz 61 i oznaczmy przez

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} := \left\{ \sum_{\mu \in \Lambda} g_\mu \mid \{g_\mu\}_{\mu \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(G) \quad \wedge \quad \forall_{\mu \in \Lambda} : g_\mu \in G^{(\mu)} \right\}$$

sumę algebraiczną podmodułów z rodziny $\{G^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$. Poniższe zdania są równoważne

- (i) $\sum_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$.
- (ii) $\forall_{\mu \in \Lambda} : G^{(\mu)} \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} G^{(\lambda)} = \{0_G\}$.
- (iii) $\forall_{\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(G)} : \left(\left(\forall_{\lambda \in \Lambda} : g_\lambda \in G^{(\lambda)} \right) \wedge \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda = 0_G \right) \implies \forall_{\lambda \in \Lambda} : g_\lambda = 0_G$.

Dowód:

- (i) $\implies$ (ii) Załóżmy, przeciwnie, że $G^{(\mu)} \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} G^{(\lambda)} \ni g_\mu \neq 0_G$, a wówczas element $g_\mu \in G$ miałby dwa rozkłady, mianowicie

$$g_\mu = g_\mu +_G \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} 0_{(\lambda)}, \quad 0_{(\lambda)} \equiv 0_G,$$

wynikający z relacji $g_\mu \in G^{(\mu)}$, oraz – dla pewnej niezerowej rodziny $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}}$ o elementach $g_\lambda \in G^{(\lambda)}$ –

$$g_\mu = 0_{(\mu)} +_G \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} g_\lambda, \quad 0_{(\mu)} \equiv 0_G,$$

wynikający z relacji $g_\mu \in \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} G^{(\lambda)}$. Istnienie takich dwóch istotnie różnych rozkładów przeczyłoby jednak wprost Def. 61.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Niech dla pewnej rodziny $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(G)$ o elementach $g_\lambda \in G^{(\lambda)}$ zachodzi relacja

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda = 0_G.$$

Powyższą relację możemy przepisać, dla dowolnego $\mu \in \Lambda$, w postaci

$$g_\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} P_G(g_\lambda),$$

wtedy jednak widać, że $g_\mu \in G^{(\mu)} \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} G^{(\lambda)}$, więc też na mocy (ii) jest $g_\mu = 0_G$ i wniosek taki wyciągamy w odniesieniu do każdego elementu rodziny, odtwarzając tym samym (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Niech między pewnymi rodzinami $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{h_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}_0(G)$ o elementach $g_\lambda, h_\lambda \in G^{(\lambda)}$ zachodzi relacja

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda,$$

którą przepiszemy w postaci

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (g_\lambda +_G P_G(h_\lambda)) = 0_G.$$

Na podstawie (iii) wnioskujemy wtedy, że $\forall \lambda \in \Lambda : g_\lambda = h_\lambda$, skąd wynika (i). □

Relacje między sumą algebraiczną, sumą prostą oraz przecięciem (pod)modułów zwięźle ujmując

Stwierdzenie 69. *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 30, 43, 46, 47 i 60 oraz Przykł. 15 (7). Niechaj H_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwoma podmodułami modułu G nad pierścieniem R i niech*

$$j_1 : H_1 \longrightarrow H_1 +_G H_2 : h_1 \longmapsto h_1 +_G 0_G,$$

$$j_2 : H_2 \longrightarrow H_1 +_G H_2 : h_2 \longmapsto 0_G +_G h_2,$$

$$j_1^\cap : H_1 \cap H_2 \longrightarrow H_1 \longrightarrow H_1 \oplus H_2 : h \longmapsto h \longmapsto (h, 0_G),$$

$$j_2^\cap : H_1 \cap H_2 \longrightarrow H_2 \longrightarrow H_1 \oplus H_2 : h \longmapsto h \longmapsto (0_G, h)$$

oznaczają iniekcje kanoniczne. Wówczas poniższy ciąg R -modułów jest dokładny:

$$0 \longrightarrow H_1 \cap H_2 \xrightarrow{j_1^\cap + j_2^\cap} H_1 \oplus H_2 \xrightarrow{j_1 \circ \text{pr}_1 + P_G \circ j_2 \circ \text{pr}_2} H_1 +_G H_2 \longrightarrow 0.$$

Dowód: Najpierw dowodzimy iniektywności $j_1^\cap + j_2^\cap$ licząc, dla dowolnego $h \in H_1 \cap H_2$,

$$(0_G, 0_G) = (j_1^\cap + j_2^\cap)(h) \equiv j_1^\cap(h) +_\oplus j_2^\cap(h) = (h, 0_G) +_\oplus (0_G, h) = (h, h) \iff h = 0_G,$$

a następnie – surjektywności $j_1 - j_2$ znajdując, dla dowolnego $h_1 +_G h_2 \in H_1 +_G H_2$,

$$h_1 +_G h_2 = (h_1 +_G 0_G) +_G (0_G +_G h_2) = j_1(h_1) +_G j_2(h_2) = (j_1 \circ \text{pr}_1 + P_G \circ j_2 \circ \text{pr}_2)(h_1, P_G(h_2)).$$

Na koniec wykazujemy równość $\text{Ker}(j_1 \circ \text{pr}_1 + P_G \circ j_2 \circ \text{pr}_2) = \text{Im}(j_1^\cap + j_2^\cap)$ w bezpośrednim rachunku (w którym $h_\alpha \in H_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$)

$$0_G = (j_1 \circ \text{pr}_1 + P_G \circ j_2 \circ \text{pr}_2)(h_1, h_2) = h_1 +_G P_G(h_2) \iff h_1 = h_2 \in H_1 \cap H_2$$

$$\iff (h_1, h_2) = (j_1^\cap + j_2^\cap)(h_1).$$

□

Warto prześledzić konsekwencje rozkładu modułu na sumę prostą rodziny jego podmodułów w kontekście Stw. 67. Tytułem przygotowania do tej dyskusji rozważymy

Definicja 62. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 46, 47, 49 i 62. Niechaj $((G, \phi_2, \phi_1, \phi_0), \ell)$ będzie modulem nad pierścieniem R . **Rzut** (lub **operator rzutu**) to **idempotentny** endomorfizm π modułu G , tj. taki, który spełnia tożsamość (w $\text{End}_R(G)$)

$$\pi \circ \pi = \pi.$$

Rodzinę $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ określamy mianem **rodziny rzutów komplementarnych** (lub **dopełniających**⁹), jeśli spełnione są warunki

$$\forall_{\lambda, \mu \in \Lambda} : (\lambda \neq \mu \implies \pi_\lambda \circ \pi_\mu = 0).$$

Możemy już teraz sformułować nader ważne

Stwierdzenie 70. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 46, 49, 57, 60 i 61. Jeśli moduł G nad pierścieniem R jest sumą prostą rodziny $\{G^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ swoich podmodułów, wówczas rzuty kanoniczne

$$\pi_\mu : G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)} \longrightarrow G^{(\mu)} : \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda \longmapsto g_\mu$$

na podmoduły $G^{(\mu)}$ tworzą rodzinę rzutów komplementarnych o własności

$$\forall_{g \in G} : g = \sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda(g),$$

którą będziemy też zapisywać w postaci¹⁰

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda = \text{id}_G \quad (6.10)$$

I odwrotnie, każda rodzina $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \text{End}_R(G)$ rzutów komplementarnych o własności (6.10) określonych na module G nad pierścieniem R zadaje rozkład G na sumę prostą

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda(G).$$

Dowód: Niech $G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)}$, a wtedy dowolny element $g \in G$ ma jednoznaczny rozkład $g = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda$ na składowe $g_\lambda \in G^{(\lambda)}$, zatem tożsamość (6.10) jest automatycznie spełniona. Pozostaje sprawdzić, że rzuty kanoniczne są wzajem komplementarnymi idempotentami. Dla dowolnego g o rozkładzie jak wyżej wyznaczamy

$$\pi_\mu \circ \pi_\mu(g) \equiv \pi_\mu \circ \pi_\mu \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda \right) = \pi_\mu(g_\mu),$$

co wobec jednoznaczności rozkładu każdego z elementów G , a więc w szczególności

$$g_\mu = g_\mu +_G \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} 0_G,$$

daje pożądaný wynik

$$\pi_\mu \circ \pi_\mu(g) = \pi_\mu \left(g_\mu +_G \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} 0_G \right) = g_\mu = \pi_\mu(g).$$

Analogicznie pokazujemy komplementarność wzajemną π_μ i π_ν dla dowolnych $\mu \neq \nu$,

$$\pi_\nu \circ \pi_\mu(g) = \pi_\nu(g_\mu) = \pi_\nu \left(g_\mu +_G 0_{(\nu)} +_G \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu, \nu\}} 0_G \right) = 0_{(\nu)} = 0(g).$$

Dowód implikacji odwrotnej wynika wprost ze składowej „ $\Leftarrow$ ” tezy Stw. 67 odniesionej do odwzorowań $\chi^{(\lambda)} := j_{G^{(\lambda)}}$ oraz $\psi^{(\lambda)} := \pi_\lambda$. $\square$

Wysłowimy teraz proste acz istotne corollarium ostatniego stwierdzenia, będące rozwinięciem dyskusji naturalnego związku między (wewnętrznymi) sumami prostymi modułów a operatorami rzutowymi i tym samym przygotowujące grunt pod dalszą część wykładu.

Stwierdzenie 71. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 23, 43, 60, 61 i 62. Niechaj $\pi \in \text{End}_R(G)$ będzie rzutem. Wówczas

⁹Bourbaki używa w odniesieniu do odwzorowań π_λ określenia „rzuty ortogonalne”, my jednak rezerwujemy to określenie dla pewnego typu rzutów komplementarnych w przestrzeni z iloczynem skalarnym, patrz: Rozdz. 7.

¹⁰Należy podkreślić, że w przypadku nieskończonej rodziny modułów zapis ten jest umowny, oto bowiem suma w nim występująca jest nieskończona. Skończoną jest natomiast każda z sum w równości poprzedniej.

(i) odwzorowanie

$$\text{id}_G - \pi : G \ni g \mapsto g +_G P_G \circ \pi(g)$$

jest rzutem;

- (ii) $\text{Ker}(\text{id}_G - \pi) = \text{Im } \pi$ oraz $\text{Im}(\text{id}_G - \pi) = \text{Ker } \pi$;
 (iii) $G = \text{Ker } \pi \oplus \text{Im } \pi$, przy czym dla dowolnego elementu $g \in G$ o rozkładzie $g = g_1 +_G g_2$ na składowe $g_1 \in \text{Ker } \pi$ i $g_2 \in \text{Im } \pi$ zachodzi równość $g_2 = \pi(g)$.

Dowód:

Ad (i) Sprawdzamy, dla dowolnego $g \in G$,

$$\begin{aligned} (\text{id}_G - \pi) \circ (\text{id}_G - \pi)(g) &= (\text{id}_G - \pi)(g +_G P_G \circ \pi(g)) = g +_G P_G \circ \pi(g) +_G P_G \circ \pi(g +_G P_G \circ \pi(g)) \\ &= g +_G P_G \circ \pi(g) +_G P_G \circ \pi(g) +_G \pi \circ \pi(g) \\ &= g +_G P_G \circ \pi(g) +_G P_G \circ \pi(g) +_G \pi(g) \\ &= g +_G P_G \circ \pi(g) \equiv (\text{id}_G - \pi)(g). \end{aligned}$$

Ad (ii) Bezpośrednim rachunkiem dowodzimy też tożsamości

$$\pi \circ (\text{id}_G - \pi) = 0 = (\text{id}_G - \pi) \circ \pi, \quad (6.11)$$

które w połączeniu z oczywistą równością

$$\text{id}_G = \pi_G + (\text{id}_G - \pi).$$

oznaczają, wobec Stw. 70, że

$$G = \text{Im}(\text{id}_G - \pi) \oplus \text{Im } \pi. \quad (6.12)$$

Ponadto (6.11) implikuje

$$\text{Im}(\text{id}_G - \pi) \subset \text{Ker } \pi$$

oraz

$$\text{Im } \pi \subset \text{Ker}(\text{id}_G - \pi).$$

Niech $g \in \text{Ker } \pi$, a wtedy

$$g \equiv (\pi_G +_G (\text{id}_G - \pi))(g) = \pi_G(g) +_G (\text{id}_G - \pi)(g) = (\text{id}_G - \pi)(g) \in \text{Im}(\text{id}_G - \pi),$$

czyli $\text{Ker } \pi \subset \text{Im}(\text{id}_G - \pi)$, więc też ostatecznie

$$\text{Ker } \pi = \text{Im}(\text{id}_G - \pi). \quad (6.13)$$

Dowód równości

$$\text{Ker}(\text{id}_G - \pi) = \text{Im } \pi,$$

przebiega analogicznie.

Ad (iii) Żądaną tożsamość otrzymujemy wprost z (6.12) podstawiając (6.13). Jednoznaczny rozkład dowolnego $g \in G$ na składowe z $\text{Ker } \pi$ i $\text{Im } \pi$ to teraz

$$g \equiv (\pi_G +_G (\text{id}_G - \pi))(g) = (\text{id}_G - \pi)(g) +_G \pi(g),$$

skąd wynika ostatnia część tezy dowodzonego punktu stwierdzenia. $\square$

Dotychczasowe nasze rozważania w naturalny sposób prowadzą do pytania o istnienie rozkładu modułu na sumę prostą stowarzyszonego z dowolnym jego podmodułem. Jak się okaże, odpowiedź na to pytanie jest kolejnym wyróżnikiem strukturalnym przestrzeni wektorowych pośród modułów ogólnych. Zanim jednak przekonamy się o tym, wprowadźmy niezbędne pojęcia.

Definicja 63. Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 46, 57, 60 i 61. **Dopełnienie proste** podmodułu $H_1 \subset G$ modułu G nad pierścieniem R to podmoduł $H_2 \subset G$ o własności

$$G = H_1 \oplus H_2.$$

Podmoduł $H_1 \subset G$ posiadający dopełnienie proste w G nazywamy **składnikiem prostym** G .

Przywoławszy konstrukcję i kanoniczne przykłady krótkich ciągów dokładnych z Rozdz. 3, uświadamiamy sobie bez trudu, że są one właściwym narzędziem formalnym pozwalającym precyzyjnie sformułować warunki istnienia dopełnienia prostego. Przekonuje nas o tym

Twierdzenie 21. (O rozszczepialności modułu) *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 30, 43, 46, 57, 60 i 61 oraz Przykł. 22. Niechaj $((G^{(\alpha)}, \phi_2^{(\alpha)}, \phi_1^{(\alpha)}, \phi_0^{(\alpha)}), \ell^{(\alpha)})$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ będą trzema modułami nad pierścieniem R i niech*

$$0 \longrightarrow G^{(1)} \xrightarrow{\chi^{(1)}} G^{(2)} \xrightarrow{\chi^{(2)}} G^{(3)} \longrightarrow 0 \quad (6.14)$$

będzie krótkim ciągiem dokładnym modułów. Poniższe warunki są wówczas równoważne.

- (i) $\text{Im } \chi^{(1)}$ jest składnikiem prostym modułu $G^{(2)}$.
- (ii) Istnieje odwzorowanie R -liniowe $\rho : G^{(2)} \longrightarrow G^{(1)}$ będące lewostronną odwrotnością $\chi^{(1)}$, tj. takie, że $\rho \circ \chi^{(1)} = \text{id}_{G^{(1)}}$ (odwzorowanie takie nosi miano **retrakcji liniowej stowarzyszonej z $\chi^{(1)}$**).
- (iii) Istnieje odwzorowanie R -liniowe $\sigma : G^{(3)} \longrightarrow G^{(2)}$ będące prawostronną odwrotnością $\chi^{(2)}$, tj. takie, że $\chi^{(2)} \circ \sigma = \text{id}_{G^{(3)}}$ (odwzorowanie takie nosi miano **ciąga liniowego stowarzyszonego z $\chi^{(2)}$**).

Ilekoć są one spełnione, odwzorowanie

$$\chi^{(1)} \circ \text{pr}_1 + {}_{(2)}\sigma \circ \text{pr}_2 : G^{(1)} \oplus G^{(3)} \longrightarrow G^{(2)}$$

*jest izomorfizmem R -modułów (zadającym rozkład przeciwdziedziny na sumę prostą podmodułów). O ciągu dokładnym mającym tę własność mówimy, że **rozszczepia się** (albo że jest **rozszczepiony**), trójkę $(G^{(2)}, \chi^{(1)}, \chi^{(2)})$ zaś nazywamy **trywialnym rozszerzeniem modułu $G^{(3)}$ przez moduł $G^{(1)}$** , por. Def. 30.*

Dowód:

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Ilekoć $H^{(2)} := \text{Im } \chi^{(1)}$ jest składnikiem prostym $G^{(2)}$, istnieje – na mocy Stw. 70 – operator rzutu $\pi \in \text{End}_R(G^{(2)})$ na tenże obraz, dla którego spełniona jest – w świetle Stw. 71 – tożsamość

$$\pi(G^{(2)}) = H^{(2)}. \quad (6.15)$$

Oznaczmy przez $\chi_{H^{(2)}}^{(1)-1}$ izomorfizm będący odwrotnością monomorfizmu $\chi^{(1)}$ określoną na $H^{(2)}$ w zgodzie z Tw. 13. Łatwo sprawdzamy, że homomorfizm

$$\chi_{H^{(2)}}^{(1)-1} \circ \pi : G^{(2)} \longrightarrow G^{(1)}$$

jest poszukiwaną retrakcją liniową stowarzyszoną z $\chi^{(1)}$, oto bowiem dla dowolnego $g^{(1)} \in G^{(1)}$ istnieje – z racji (6.15) – $g^{(2)} \in G^{(2)}$ o własności

$$\chi^{(1)}(g^{(1)}) = \pi(g^{(2)}),$$

a zatem

$$\chi_{H^{(2)}}^{(1)-1} \circ \pi \circ \chi^{(1)}(g^{(1)}) \equiv \chi_{H^{(2)}}^{(1)-1} \circ \pi \circ \pi(g^{(2)}) = \chi_{H^{(2)}}^{(1)-1} \circ \pi(g^{(2)}) = \chi_{H^{(2)}}^{(1)-1} \circ \chi^{(1)}(g^{(1)}) = g^{(1)}.$$

I odwrotnie, dowolna taka retrakcja ρ definiuje odwzorowanie R -liniowe

$$\chi^{(1)} \circ \rho \in \text{End}_R(G^{(2)}),$$

które spełnia tożsamość

$$(\chi^{(1)} \circ \rho) \circ (\chi^{(1)} \circ \rho) \equiv \chi^{(1)} \circ (\rho \circ \chi^{(1)}) \circ \rho = \chi^{(1)} \circ \text{id}_{G^{(1)}} \circ \rho = \chi^{(1)} \circ \rho,$$

jest zatem operatorem rzutu, a przy tym dla dowolnego elementu obrazu $g^{(2)} = \chi^{(1)}(g^{(1)}) \in H^{(2)}$ obliczamy

$$\chi^{(1)} \circ \rho(g^{(2)}) = \chi^{(1)} \circ (\rho \circ \chi^{(1)})(g^{(1)}) = \chi^{(1)} \circ \text{id}_{G^{(1)}}(g^{(1)}) = \chi^{(1)}(g^{(1)}) = g^{(2)},$$

więc też

$$\text{Im}(\chi^{(1)} \circ \rho) \supset H^{(2)}.$$

Jest też oczywiście

$$\text{Im}(\chi^{(1)} \circ \rho) \subset H^{(2)},$$

przeto $\chi^{(1)} \circ \rho$ jawi się być rzutem na $\text{Im}(\chi^{(1)} \circ \rho) = H^{(2)}$, a w konsekwencji $H^{(2)}$ jest składnikiem prostym $G^{(2)}$ na mocy Stw. 71.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Jeśli $G^{(2)} = H^{(2)} \oplus D$, to wtedy iniekcja kanoniczna $j_D : D \longrightarrow G^{(2)}$ definiuje homomorfizm R -modułów

$$\chi^{(2)} \circ j_D : D \longrightarrow G^{(3)}.$$

Nietrudno się przekonać, że wobec istnienia rozkładu

$$G^{(2)} = H^{(2)} \oplus D = \text{Ker } \chi^{(2)} \oplus D,$$

będącego konsekwencją dokładności ciągu rozważanego, $\chi^{(2)} \circ j_D$ jest izomorfizmem. W rzeczy samej, po pierwsze jest to monomorfizm, bowiem

$$\text{Ker}(\chi^{(2)} \circ j_D) = D \cap \text{Ker } \chi^{(2)} = \{0_{(2)}\},$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost ze specjalizacji Stw. 68 (ii) do przypadku $\Lambda = \{1, 2\}$, w którym

$$G = G^{(1)} \oplus G^{(2)} \iff (G = G^{(1)} +_G G^{(2)} \quad \wedge \quad G^{(1)} \cap G^{(2)} = \{0_G\}).$$

Jest to także epimorfizm, gdyż z racji surjektywności $\chi^{(2)}$ dla dowolnego $g^{(3)} \in G^{(3)}$ możemy znaleźć $h \in G^{(2)}$ o własności $\chi^{(2)}(h) = g^{(3)}$, który po rozbiciu na składowe $h_1 \in \text{Ker } \chi^{(2)}$ i $h_2 \in D$ do postaci $h = h_1 +_{(2)} h_2$ daje nam

$$\chi^{(2)}(h_2) = \chi^{(2)}(h) = g^{(3)}.$$

Odwrotność izomorfizmu $\chi^{(2)} \circ j_D$, złożona z j_D (czyli traktowana jako odwzorowanie z $G^{(3)}$ w $G^{(2)}$) jest pożądanym cięciem liniowym stowarzyszonym z $\chi^{(2)}$. Istotnie,

$$\chi^{(2)} \circ (j_D \circ (\chi^{(2)} \circ j_D)^{-1}) \equiv (\chi^{(2)} \circ j_D) \circ (\chi^{(2)} \circ j_D)^{-1} = \text{id}_{G^{(3)}}.$$

I odwrotnie, jeśli tylko istnieje takowe cięcie σ , to wtedy odwzorowanie R -liniowe

$$\sigma \circ \chi^{(2)} \in \text{End}_R(G^{(2)})$$

jest rzutem, albowiem spełnia tożsamość

$$(\sigma \circ \chi^{(2)}) \circ (\sigma \circ \chi^{(2)}) \equiv \sigma \circ (\chi^{(2)} \circ \sigma) \circ \chi^{(2)} = \sigma \circ \text{id}_{G^{(3)}} \circ \chi^{(2)} = \sigma \circ \chi^{(2)}.$$

Jego jądro zawiera $H^{(2)}$, gdyż

$$\text{Ker}(\sigma \circ \chi^{(2)}) \supset \text{Ker } \chi^{(2)} = \text{Im } \chi^{(1)} \equiv H^{(2)},$$

ale też dla dowolnego $g \in \text{Ker}(\sigma \circ \chi^{(2)})$ stwierdzamy, że

$$0_{(3)} = \chi^{(2)}(0_{(2)}) = \chi^{(2)}((\sigma \circ \chi^{(2)})(g)) \equiv (\chi^{(2)} \circ \sigma) \circ \chi^{(2)}(g) = \chi^{(2)}(g),$$

skąd

$$\text{Ker}(\sigma \circ \chi^{(2)}) \subset \text{Ker } \chi^{(2)} = H^{(2)}.$$

Ostatecznie zatem

$$\text{Ker}(\sigma \circ \chi^{(2)}) = H^{(2)},$$

czyli $H^{(2)}$ jest obrazem operatora rzutowego $\text{id}_{G^{(2)}} - \sigma \circ \chi^{(2)}$ (patrz: Stw. 71 (i) i (ii)) i jako taki ma dopełnienie proste $\text{Im}(\sigma \circ \chi^{(2)})$, wedle Stw. 71 (iii).

Jak wynika wprost z powyższej analizy, przy spełnionych równoważnych warunkach (i)-(iii) znajdujemy rozkład

$$G = \chi^{(1)}(G^{(1)}) \oplus \sigma(G^{(3)}),$$

a to jawny dowód prawdziwości ostatniej części tezy twierdzenia. $\square$

Prostego kryterium rozszczepialności modułu dostarcza

Stwierdzenie 72. *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 30, 43, 46, 57, 60 i 61, Przykł. 22 oraz Tw. 21. Jeśli moduł $G^{(3)}$ jest wolny, wówczas krótki ciąg dokładny (6.14) rozszczepia się, tj. zachodzi*

$$G^{(2)} \cong G^{(1)} \oplus G^{(3)}.$$

Dowód: Niechaj $\{g_\lambda^{(3)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie bazą modułu $G^{(3)}$, z którą z racji surjektywności $\chi^{(2)}$ możemy stowarzyszyć rodzinę $\{g_\lambda^{(2)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementów modułu $G^{(2)}$, jak następuje:

$$\forall \lambda \in \Lambda : \chi^{(2)}(g_\lambda^{(2)}) = g_\lambda^{(3)}.$$

Jedyne odwzorowanie R -liniowe $\sigma : G^{(3)} \rightarrow G^{(2)}$ o własności

$$\forall \lambda \in \Lambda : \sigma(g_\lambda^{(3)}) = g_\lambda^{(2)},$$

o którego istnieniu orzeka Stw. 64, jest cięciem liniowym stowarzyszonym z $\chi^{(2)}$, oto bowiem dla dowolnego elementu $g \in G^{(3)}$ o rozkładzie (w bazie) $g = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(3)} g_\lambda^{(3)}$ stwierdzamy równość

$$\begin{aligned} \chi^{(2)} \circ \sigma(g) &= \chi^{(2)} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(2)} \sigma(g_\lambda^{(3)}) \right) = \chi^{(2)} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(2)} g_\lambda^{(2)} \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(3)} \chi^{(2)}(g_\lambda^{(2)}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda \triangleright_{(3)} g_\lambda^{(3)} \\ &= g. \end{aligned}$$

Teza stwierdzenia wynika teraz wprost z Tw. 21. □

Prostym acz istotnym uzupełnieniem opisu modułów rozszczepiających się na sumę prostą swych podmodułów jest poniższe oczywiste

Stwierdzenie 73. *Przyjmijmy notację Def. 8', 19, 43, 46, 57, 60 i 61. Niechaj $\mathcal{B}^{(\lambda)} \subset G^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$ będą bazami podmodułów $G^{(\lambda)} \subset G$ R -modułu G . Jeśli moduł ten ma rozkład na sumę prostą*

$$G = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G^{(\lambda)},$$

wówczas zbiór

$$\mathcal{B} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}^{(\lambda)}$$

jest jego bazą.¹¹ W szczególności więc rząd modułu (nad ciałem o cesze IBN) będącego sumą prostą podmodułów jest sumą rzędów tychże podmodułów.

Nasza analiza prowadzi nas wprost do istotnego wyróżnika (pod)przestrzeni wektorowych.

Corollarium 8. *Każda podprzestrzeń przestrzeni wektorowej ma dopełnienie proste.*

Dowód: Wystarczy rozważyć normalny ciąg dokładny (6.3) stowarzyszony z daną podprzestrzenią $W \subset V$ przestrzeni V . Na mocy Tw. 17 przestrzeń ilorazowa V/W jest modułem wolnym, a zatem można zastosować Stw. 72. Otrzymujemy w ten sposób kanoniczny rozkład

$$V = W \oplus \widetilde{W}, \quad \widetilde{W} \cong V/W.$$

□

Tę część dyskusji zamknijmy pożytecznym wynikiem natury buchalteryjnej.

Stwierdzenie 74. („Kwantowy” bilans wymiarów) *Przyjmijmy notację Def. 9', 19, 43, 45, 46, 55, 60 i 61. Niechaj V_α , $\alpha \in \{1, 2\}$ będą dwiema podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$. Wówczas prawdziwą jest równość*

$$\dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2 = \dim_{\mathbb{K}} (V_1 +_V V_2) + \dim_{\mathbb{K}} (V_1 \cap V_2).$$

Dowód: Rozpatrzmy krótki ciąg dokładny z treści Stw. 69, w którym kładziemy $H_\alpha := V_\alpha$, i zastosujmy Stw. 72 (tudzież Cor. 8), aby dostać

$$V_1 \oplus V_2 \cong (V_1 +_V V_2) \oplus (V_1 \cap V_2).$$

Przywoławszy Stw. 73 oraz 66, wyliczamy

$$\dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2 = \dim_{\mathbb{K}} (V_1 \oplus V_2) = \dim_{\mathbb{K}} ((V_1 +_V V_2) \oplus (V_1 \cap V_2)) = \dim_{\mathbb{K}} (V_1 +_V V_2) + \dim_{\mathbb{K}} (V_1 \cap V_2).$$

□

¹¹W analogiczny sposób tworzymy (jako sumy teoriomnogościowe odnośnych podzbiorów składników prostych po zbiorze indeksów) podzbiory generujące oraz liniowo niezależne G .

Warto zwrócić uwagę, że powyższe stwierdzenie bywa wykorzystywane jako wygodne kryterium rozszczepialności przestrzeni wektorowej na sumę prostą jej podprzestrzeni.

* * *

Literatura uzupełniająca: Najlepszym wyborem jest kombinacja wspomnianych wcześniej traktatów Bourbakiego [Bou07], Cohna [Coh74, Coh77, Coh90] i Langa [Lan02].

LITERATURA

- [Bou06] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Théorie des ensembles*, Springer, 2006.
- [Bou07] ———, *Éléments de mathématique, Algèbre, chapitres 1 à 3*, Springer, 2007.
- [Coh74] P.M. Cohn, *Algebra*, vol. 1, John Wiley & Sons, 1974.
- [Coh77] ———, *Algebra*, vol. 2, John Wiley & Sons, 1977.
- [Coh90] ———, *Algebra*, vol. 3, John Wiley & Sons, 1990.
- [KM76] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Teoria mnogości*, Monografie Matematyczne, vol. XXVII, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.
- [Lan02] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer, 2002.
- [Lea56] W.G. Leavitt, “*Modules over rings of words*”, Proc. AMS **7** (1956), 188–193.
- [Lea57] ———, “*Modules without invariant basis number*”, Proc. AMS **8** (1957), 322–328.
- [ML71] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer, 1971.

Address: KATEDRA METOD MATEMATYCZNYCH FIZYKI, WYDZIAŁ FIZYKI UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO, UL. HOŻA 74, PL-00-682 WARSZAWA, POLAND

E-mail address: `suszek@fuw.edu.pl`