

CAŁKIEM WYMIERNE KORZYŚCI Z BRZYDKICH WYRAŻEŃ (DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$\mathbb{R}/\mathbb{R}$

Przedmiotem naszego zainteresowania są całki nieoznaczone postaci

$$\int dx \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie P i Q są rzeczywistymi funkcjami wielomianowymi. Jak wiemy z wykładu algebry, każdą rzeczywistą funkcję wielomianową, w tym np. Q , można rozłożyć na czynniki pierwsze (nierozkładalne nad $\mathbb{R}$), tj. zapisać w postaci iloczynu

$$Q(x) = \beta \prod_{m=1}^M (x - x_m)^{p_m} \prod_{n=1}^N (x^2 + b_n x + c_n)^{q_n},$$

w którym $\beta \in \mathbb{R}$ jest współczynnikiem przy najwyższej potędze zmiennej (równej stopniowi wielomianu), $x_m \in \mathbb{R}$ są zerami Q o krotnościach równych – odpowiednio – $p_m \in \mathbb{N}$, natomiast wyrażenia występujące w ostatnim iloczynie (w potęgach $q_n \in \mathbb{N}$) to czynniki stopnia 2 nierozkładalne nad $\mathbb{R}$, tj. takie, których wyróżnik spełnia nierówność

$$\forall_{n \in \overline{1, N}} : \Delta_n := b_n^2 - 4c_n < 0.$$

Wiemy też, że każdy ułamek utworzony przez funkcje wielomianowe ma jednoznaczny rozkład na ułamki proste, który w rozważanym przypadku przyjmuje postać

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{p_m} \frac{A_{m,k}}{(x - x_m)^k} + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{q_n} \frac{B_{n,l}x + C_{n,l}}{(x^2 + b_n x + c_n)^l} + \theta(\deg P - \deg Q) W(x),$$

gdzie W jest wielomianem stopnia co najwyżej $\deg P - \deg Q$ (częścią “całkowitą” wyniku dzielenia P przez Q), obecną w rozkładzie wtedy tylko, gdy $\deg P > \deg Q$, o czym przypomina funkcja schodkowa Heaviside’a θ (przyjmująca wartość 1 dla argumentów nieujemnych i wartość 0 w pozostałych przypadkach). Przykładem rozkładu, w którym $\deg P < \deg Q$, jest

$$\begin{aligned} \frac{x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 17x^3 + 8x^2 - 5x + 1}{x^8 - 3x^7 + 5x^6 - 7x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x} &\equiv \frac{x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 17x^3 + 8x^2 - 5x + 1}{x(x-1)^3(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{0}{(x-1)^2} + \frac{-2}{(x-1)^3} + \frac{0x+0}{x^2+1} + \frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Wobec liniowości całki powyższy rozkład sprowadza problem odcałkowania dowolnego wyrażenia wymiernego do skończonej liczby problemów elementarnych polegających na wyliczeniu całek ogólnej postaci

$$I_k := \int dx \frac{A}{(x-a)^k}$$

oraz

$$J_l := \int dx \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^l},$$

jak również całek z funkcji wielomianowej, którymi – wobec ich trywialności – nie będziemy się dalej zajmować.

Całki z pierwszej rodziny możemy od razu wypisać:

$$I_k = \begin{cases} -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}}, & \text{gdy } k > 1 \\ A \log|x-a|, & \text{gdy } k = 1 \end{cases}.$$

W przypadku całek z drugiej rodziny rozdzielamy najpierw dwumian liniowy w liczniku na $\mathbb{R}$ -wielokrotność pochodnej trójmianu kwadratowego z mianownika,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + bx + c) = 2x + b,$$

oraz resztę (stopnia 0), tj.

$$Bx + C = \frac{B}{2} \frac{d}{dx}(x^2 + bx + c) + \left(C - \frac{bB}{2}\right),$$

co pozwala uprościć rozpatrywaną całkę, korzystając przy tym z oczywistego podstawienia, jak następuje:

$$\begin{aligned} J_l &= \frac{B}{2} \int dx \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + bx + c)}{(x^2 + bx + c)^l} + \left(C - \frac{bB}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^l} \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{dy}{y^l} \Big|_{y=x^2+bx+c} + \left(C - \frac{bB}{2}\right) \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}\right]^l} \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{dy}{y^l} \Big|_{y=x^2+bx+c} + \left(C - \frac{bB}{2}\right) \int \frac{dz}{\left(z^2 + c - \frac{b^2}{4}\right)^l} \Big|_{z=x+\frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

Pierwsza z całek jest postaci I_l , drugą natomiast zajmujemy się poniżej, przepisawszy ją uprzednio w zgrabniejszej formie

$$K_l := \int \frac{dx}{(x^2 + d^2)^l}, \quad d \in \mathbb{R},$$

którą usprawiedliwia założona nierówność $d^2 = c - \frac{b^2}{4} > 0$. Wykonując proste całkowanie przez części,

$$\begin{aligned} K_l &= \int dx \left(\frac{d}{dx} x \right) \frac{dx}{(x^2 + d^2)^l} = \int dx \left(\frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2 + d^2)^l} - x \frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2 + d^2)^l} \right) \\ &= \frac{x}{(x^2 + d^2)^l} + 2l \int dx \frac{x^2}{(x^2 + d^2)^{l+1}} \equiv \frac{x}{(x^2 + d^2)^l} + 2l \int dx \frac{(x^2 + d^2) - d^2}{(x^2 + d^2)^{l+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2 + d^2)^l} + 2l K_l - 2ld^2 K_{l+1}, \end{aligned}$$

wyznaczamy rekurencję spełnianą przez całki z rodziny K_l ,

$$K_{l+1} = \frac{2l-1}{2ld^2} K_l + \frac{1}{2ld^2} \frac{x}{(x^2 + d^2)^l}.$$

Warunek początkowy tak określonej rekurencji wyznaczamy w prostym rachunku dla $l = 1$,

$$\begin{aligned} K_1 &= \int \frac{dx}{x^2 + d^2} = \frac{1}{d^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{d}\right)^2 + 1} = \frac{1}{d^2} \int \frac{dy}{y^2 + 1} \Big|_{y=\frac{x}{d}} = \frac{1}{d^2} \arctg y \Big|_{y=\frac{x}{d}} + C \\ &= \frac{1}{d^2} \arctg \frac{x}{d} + C. \end{aligned}$$

Możemy już teraz opisać kompletną procedurę obliczania całek z wyrażeń wymiernych.

Jeśli $\deg P \geq \deg Q$, zaczynamy od punktu 1. Jeśli $\deg P = \deg Q - 1$, przechodzimy bezpośrednio do punktu 2. W pozostałych przypadkach procedurę podejmujemy w punkcie 3.

1. Rozkładamy funkcję wielomianową P na (wielomianową) wielokrotność K stopnia $\deg K = \deg P - \deg Q$ (lub $\deg K = -\infty$, jeśli $\deg P < \deg Q$) funkcji wielomianowej Q oraz resztę R stopnia $\deg R < \deg Q$,

$$P(x) = K(x)Q(x) + R(x).$$

To pozwala nam zapisać interesującą nas całkę w postaci sumy całek

$$\int dx \frac{P(x)}{Q(x)} = \int dx K(x) + \int dx \frac{R(x)}{Q(x)},$$

której pierwszy składnik jest banalną całką z funkcji wielomianowej K .

2. Rozkładamy funkcję wielomianową R na wielokrotność $k \in \mathbb{R}$ funkcji wielomianowej Q' , czyli pochodnej Q (skoro $\deg R < \deg Q$, to zachodzi $\deg R - \deg Q' = \deg R - (\deg Q - 1) \leq 0$, zatem k jest liczbą, w szczególności może być $k = 0$, gdy $\deg R < \deg Q - 1$), oraz resztę S stopnia $\deg S < \deg Q' = \deg Q - 1$,

$$R(x) = kQ'(x) + S(x).$$

Tym sposobem uzyskujemy dalszą redukcję rozważanej całki do postaci sumy

$$\begin{aligned} \int dx \frac{R(x)}{Q(x)} &= k \int dx \frac{\frac{d}{dx}Q(x)}{Q(x)} + \int dx \frac{S(x)}{Q(x)} = k \int \frac{dy}{y} \Big|_{y=Q(x)} + \int dx \frac{S(x)}{Q(x)} \\ &= k \log |Q(x)| + \int dx \frac{S(x)}{Q(x)}. \end{aligned}$$

3. Dokonujemy rozkładu ilorazu $\frac{S(x)}{Q(x)}$ na ułamki proste według schematu opisanego wcześniej,

$$(1) \quad \frac{S(x)}{Q(x)} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^{p_m} \frac{A_{m,k}}{(x-x_m)^k} + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{q_n} \frac{B_{n,l}x + C_{n,l}}{(x^2 + b_nx + c_n)^l}.$$

Współczynniki $A_{m,k}$ powyższego rozkładu wyznaczamy ze wzoru

$$(2) \quad A_{m,k} = \frac{1}{(p_m - k)!} \left. \frac{d^{p_m-k}}{dx^{p_m-k}} \right|_{x=x_m} \left(\frac{S(x)}{Q(x)} (x-x_m)^{p_m} \right),$$

którego sens jest następujący: najpierw wyznaczamy funkcję wymierną $\frac{R}{Q}$ przez jedynian $(x-x_m)$ w potęgę równej krotności p_m zera x_m funkcji wielomianowej Q z mianownika, następnie różniczkujemy $p_m - k$ razy (przy tym pochodna rzędu $p_m - k = 0$ jest równa samej funkcji różniczkowanej), aby na koniec położyć $x = x_m$ i podzielić wynik przez czynnik liczbowy $(p_m - k)!$. Przekonamy się teraz o słuszności wzoru na $A_{m,k}$. W tym celu rozdzielimy wypisany wyżej rozkład $\frac{R}{Q}$ na ułamki proste na część zawierającą wyrazy typu $\frac{1}{(x-x_m)^k}$ i resztę, którą będziemy oznaczać symbolem D ,

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \sum_{l=1}^{p_m} \frac{A_{m,l}}{(x-x_m)^l} + D(x).$$

Po przemnożeniu przez $(x-x_m)^{p_m}$ otrzymujemy wtedy wyrażenie

$$\frac{S(x)}{Q(x)} (x-x_m)^{p_m} = \sum_{l=1}^{p_m} A_{m,l} (x-x_m)^{p_m-l} + D(x) (x-x_m)^{p_m},$$

w którym jednomian $(x - x_m)$ występuje wyłącznie w potęgach o wykładniku dodatnim. Jego kolejne pochodne (do rzędu p_m włącznie) przybierają postać

$$\begin{aligned} \frac{d^0}{dx^0} \left(\frac{S(x)}{Q(x)} (x - x_m)^{p_m} \right) &= A_{m,p_m} + \left(A_{m,p_m-1} (x - x_m) + A_{m,p_m-2} (x - x_m)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{m,1} (x - x_m)^{p_m-1} + D(x) (x - x_m)^{p_m} \right) \\ &=: A_{m,p_m} + (x - x_m) D_0(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^1}{dx^1} \left(\frac{S(x)}{Q(x)} (x - x_m)^{p_m} \right) &= A_{m,p_m-1} + \left(2A_{m,p_m-2} (x - x_m) + 3A_{m,p_m-3} (x - x_m)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (p_m - 1) A_{m,1} (x - x_m)^{p_m-2} + p_m D(x) (x - x_m)^{p_m-1} \right. \\ &\quad \left. + D'(x) (x - x_m)^{p_m} \right) \\ &=: 1! \cdot A_{m,p_m-1} + (x - x_m) D_1(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{S(x)}{Q(x)} (x - x_m)^{p_m} \right) &= 2A_{m,p_m-2} + \left(2 \cdot 3A_{m,p_m-3} (x - x_m) + 3 \cdot 4A_{m,p_m-4} (x - x_m)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (p_m - 2) \cdot (p_m - 1) A_{m,1} (x - x_m)^{p_m-3} \right. \\ &\quad \left. + (p_m - 1) \cdot p_m D(x) (x - x_m)^{p_m-2} + 2p_m D'(x) (x - x_m)^{p_m-1} \right. \\ &\quad \left. + D''(x) (x - x_m)^{p_m} \right) \\ &=: 2! \cdot A_{m,p_m-2} + (x - x_m) D_2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{S(x)}{Q(x)} (x - x_m)^{p_m} \right) &= 2 \cdot 3A_{m,p_m-3} + \left(2 \cdot 3 \cdot 4A_{m,p_m-4} (x - x_m) \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot 4 \cdot 5A_{m,p_m-5} (x - x_m)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (p_m - 3) \cdot (p_m - 2) \cdot (p_m - 1) A_{m,1} (x - x_m)^{p_m-4} \right. \\ &\quad \left. + (p_m - 2) \cdot (p_m - 1) \cdot p_m D(x) (x - x_m)^{p_m-3} \right. \\ &\quad \left. + 3(p_m - 1) \cdot p_m D'(x) (x - x_m)^{p_m-2} \right. \\ &\quad \left. + 3p_m D''(x) (x - x_m)^{p_m-1} + D'''(x) (x - x_m)^{p_m} \right) \\ &=: 3! \cdot A_{m,p_m-3} + (x - x_m) D_3(x), \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\frac{d^{p_m-1}}{dx^{p_m-1}} \left(\frac{S(x)}{Q(x)} (x-x_m)^{p_m} \right) = (p_m-1)! \cdot A_{m,1} + (x-x_m) D_{p_m-1}(x),$$

przy czym wyrażenia D_i , $i \in \overline{0, p_m-1}$ są regularne w $x = x_m$, co wobec obecności mnożnika $(x-x_m)$ (zerującego się w $x = x_m$) przed każdym z nich implikuje wprost pożądaną relację (2). Po podstawieniu wyliczonych tą metodą współczynników $A_{m,k}$ do równości (1) współczynniki $B_{n,l}$ i $C_{n,l}$ wyznaczamy w standardowy sposób, tj. sprowadzając wszystkie składniki sumy (z prawej strony znaku równości) do wspólnego mianownika (równego $Q(x)$), a następnie porównując współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej x w uzyskanym tą drogą liczniku wyrażenia wymiernego z odpowiednimi współczynnikami przy tych samych potęgach zmiennej w $S(x)$. W praktyce sprowadza się to do rozwiązywania układu równań liniowych.

4. W ostatnim kroku wykorzystujemy liniowość całki, aby przepisać poszukiwaną całkę $\int dx \frac{S(x)}{Q(x)}$ w postaci sumy całek elementarnych I_k i K_l omówionych w pierwszej części niniejszych notatek.

Dla zilustrowania opisanej procedury obliczymy krok po kroku dwie całki nieoznaczone z wyrażeń wymiernych będących ilorazami funkcji wielomianowych.

Przykład(y) 1.

- Zaczniemy od funkcji o liczniku i mianowniku danych przez

$$P(x) := x^5, \quad Q(x) := x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

Wobec nierówności $\deg P = 5 > 4 \deg Q$ zaczynamy od podzielenia P przez Q ,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 = x(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x \\ &= x(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + 2(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 2 - 2x^3 + 2x^2 - x \\ &= (x+2)Q(x) + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2, \end{aligned}$$

a następnie reszty $R(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ z tego dzielenia przez pochodną $Q'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2$,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)Q(x) + \frac{1}{2}(4x^3 - 6x^2 + 4x - 2) + 3x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 3x - 2 \\ &= (x+2)Q(x) + \frac{1}{2}Q'(x) + x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

Możemy już teraz dokonać rozkładu wyrażenia wymiernego $\frac{S}{Q}$ o liczniku w zredukowanej postaci $S(x) = x^2 + x - 1$ na ułamki proste. W tym celu rozkładamy najpierw mianownik na czynniki pierwsze,

$$Q(x) = (x-1)^2(x^2+1).$$

Otrzymujemy zatem rozkład

$$\frac{x^2+x-1}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

przy czym współczynniki A i B wyznaczamy ze wzorów

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{dx} \Big|_{x=1} \left(\frac{x^2+x-1}{Q(x)} (x-1)^2 \right) = \frac{d}{dx} \Big|_{x=1} \frac{x^2+x-1}{x^2+1} = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2} \Big|_{x=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

oraz

$$B = \left(\frac{x^2 + x - 1}{Q(x)} (x-1)^2 \right) \Big|_{x=1} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości do rozkładu sprawdzamy wszystkie jego składniki do wspólnego mianownika Q ,

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} &= \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+1) + \frac{1}{2}(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{(C+1)x^3 - (D-2C-\frac{1}{2})x^2 + (C-2D+1)x + (D-\frac{1}{2})}{Q(x)}, \end{aligned}$$

aby ostatecznie porównać współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej x z tymi w zapisie $S(x) = x^2 + x - 1$. Wyprowadzony z tego porównania układ równań liniowych

$$C+1=0 \quad \wedge \quad D-2C-\frac{1}{2}=1 \quad \wedge \quad C-2D+1=1 \quad \wedge \quad D-\frac{1}{2}=-1$$

ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$(C, D) = (-1, -\frac{1}{2}),$$

które pozwala wypisać wyjściowe wyrażenie wymierne $\frac{P}{Q}$ w pożądanej postaci

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{(x+2)Q(x) + \frac{1}{2}Q'(x) + x^2 + x - 1}{Q(x)} \\ &= (x+2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log |Q(x)| + \frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+1} \\ &= (x+2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log |Q(x)| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log |x^2+1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1}, \end{aligned}$$

gotowej do prostego odcałkowania,

$$\begin{aligned} \int dx \frac{P(x)}{Q(x)} &= \int dx (x+2) + \frac{1}{2} \int dx \frac{d}{dx} \log |(x-1)^2(x^2+1)| + \int dx \frac{1}{x-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dx \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2} \int dx \frac{d}{dx} \log |x^2+1| - \frac{1}{2} \int dx \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} \log |x-1|^2 + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \log |x-1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctg x + C \\ &= \frac{(x+2)^2}{2} + \log(x-1)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \arctg x + \tilde{C}. \end{aligned}$$

• I jeszcze funkcja o liczniku i mianowniku danych przez

$$P(x) := 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5, \quad Q(x) := x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Tm razem znajdujemy

$$P(x) = Q'(x) + 4, \quad Q(x) = (x-1)(x^2+1)^2$$

i otrzymujemy rozkład

$$\frac{4}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

przy czym

$$A = \left(\frac{4}{Q(x)}(x-1) \right) \Big|_{x=1} = 1,$$

skąd dalej

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} &= \frac{1}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(B+1)x^4 + (C-B)x^3 + (B-C+D+2)x^2 + (-B+C-D+E)x + (-C-E+1)}{(x-1)(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Porównanie z wyrażeniem $\frac{4}{Q(x)}$ daje

$$B+1=0 \quad \wedge \quad C-B=0 \quad \wedge \quad B-C+D+2=0 \quad \wedge \quad -C-E+1=4,$$

czyli też

$$(B, C, D, E) = (-1, -1, -2, -2).$$

Ostatecznie zatem otrzymujemy rozkład

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{2(x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{d}{dx} \log |Q(x)| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log |x^2+1| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{(x^2+1)^2}, \end{aligned}$$

co prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned} \int dx \frac{P(x)}{Q(x)} &= \int dx \frac{d}{dx} \log \frac{|x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1|}{\sqrt{x^2+1}} + \int dx \frac{1}{x-1} \\ &\quad - \int dx \frac{1}{x^2+1} + \int dx \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2+1} - 2 \int dx \frac{1}{(x^2+1)^2} \\ &= \log \frac{|x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1|}{\sqrt{x^2+1}} + \log |x-1| + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} - 2K_2 \\ &= \log \frac{|(x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1)(x-1)|}{\sqrt{x^2+1}} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} - K_1 \\ &= \log \frac{|(x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1)(x-1)|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Warszawa, 4. lutego 2013 r.