GR II W CZASACH ZARAZY
10. WYKŁAD ZDALNY

Powiązanie Crittendena na wiązce stowarzyszonej

Stając przed zadaniem skonstruowania powiązania na wiązce stowarzyszonej, warto powrócić do pierwotnego zagadnienia, jakie doprowadziło nas do rozważań nad powiązaniem w ogólności. Oto celem naszym, umotywowanym naturalną potrzebą fizykalną, było zdefiniowanie takiego różniczkowania cięć (lokalnych) wiązki włóknistej E (o włóknie typowym F) wzdłuż pól wektorowych na bazie B tejże wiązki, które przyjmowałoby wartości w podwiązce pionowej $\mathsf{V}E \subset \mathsf{T}E$ i tym samym, poprzez stosowny dyfeomorfizm strukturalny $\mathsf{V}E\restriction_{E_x} \cong \mathsf{T}F$ nad dowolnym punktem $x \in B$, pozwalałoby przetransportować funktorialnie (za pośrednictwem funktora stycznego T) dowolną istotną (np. fizykalnie) strukturę z przestrzeni cięć $\Gamma(E)$ (na której jest ona indukowaną z włókna typowego F) na przestrzeń ich określonych przez to różniczkowanie pochodnych kierunkowych. W kontekście konstrukcji wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ tą strukturą jest struktura rozmaitości z działaniem $\lambda : \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ grupy G występującej w roli grupy strukturalnej wiązki głównej P_{G} nad B i zarazem w roli włókna typowego wiązki grup (dołączonej) $\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, o grupie cięć globalnych $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ realizującej się na $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ w sposób lokalnie modelowany na λ. Nasze poszukiwania różniczkowania na $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ ekwiwariantnego względem działania grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ komplikuje nieoczywisty charakter realizacji tejże grupy na $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$. Miast przemyśliwać nad abstrakcyjną konstrukcją wygodnego modelu wiązki $\mathsf{V}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ (rozumianego jako wybór reprezentanta jej klasy izomorfizmu), który byłby przestrzenią naturalnego takiego działania, wykorzystamy raczej dotychczasowe nasze obserwacje dotyczące wiązek głównych i stowarzyszonych z nimi w celu skonstruowania różniczkowania przyjmującego wartości *wprost* w rozmaitości $\mathsf{T}M$, co ma tę oczywistą zaletę, że pozwala zapostulować naturalną postać gładkiego działania grupy G:

$$\mathsf{T}_2\lambda. : \mathrm{G} \times \mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}M : (g, v) \longmapsto \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}M}(v)}\lambda_g(v)\,,$$

którego splecenie z λ ma realizować w obrazie trywializacji lokalnej poszukiwana przez nas pochodna kowariantna na $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$. Łatwość, z jaką zidentyfikowaliśmy działanie na przestrzeni modelowej przeciwdziedziny tejże pochodnej, ma swoją cenę: jest nią nieoczywisty charakter nieodzownego przejścia – o naturze różniczkowej – od cięć wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ do odwzorowań liniowych pomiędzy wiązkami stycznymi $\mathsf{T}B$ i $\mathsf{T}M$. Instrumentalnymi w jego zrozumieniu okazują się obserwacje poczynione w kontekście dyskusji strukturalnej wiązek stowarzyszonych, a konkretnie Stw. 6.3, które pozwala nam wypisać dwie istotne dla naszych rozważań bijekcje:

$$\Phi_\lambda \quad : \quad \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)\,,$$

$$\Phi_{\mathsf{T}_2\lambda} \quad : \quad \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_2\lambda} \mathsf{T}M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathsf{T}M)\,.$$

Te w połączeniu z konstrukcją powiązania (głównego) na wiązce głównej z Def. 9.2, w szczególności zaś – z konstrukcją podniesienia poziomego

$$\mathrm{Hor.} : \mathsf{T}B \rightarrowtail \mathsf{TP}_{\mathrm{G}}\,, \qquad\qquad \mathrm{Hor.}(\mathsf{T}B) = \mathsf{HP}_{\mathrm{G}}$$

ze Stw. 8.1, pozwala nam przeformułować zagadnienie różniczkowania cięcia $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ wiązki stowarzyszonej wzdłuż pola wektorowego $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathsf{T}B)$ nad jej bazą w terminach różniczkowania odnośnego odwzorowania G-ekwiwariantnego $\Phi_\lambda[\phi] \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$ wzdłuż pola wektorowego $\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \in \Gamma(\mathsf{TP}_{\mathrm{G}})$ nad przestrzenią totalną wiązki głównej P_{G}. Taki zabieg formalny jest o tyle wygodny, że pozwala prosto narzucić warunek $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-ekwiwariantności, oto bowiem jeśli oznaczymy poszukiwaną pochodną symbolem

$$\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi] : \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{T}M\,,$$

to możemy zażądać, iżby dla dowolnego cięcia globalnego $\gamma \in \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ była spełniona tożsamość

$$\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda\big[\Gamma\big[\Gamma[\widetilde{r}]\big]_\gamma(\phi)\big](\cdot) = \mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)(\cdot)\,,$$

a jeśli wyprowadzone na podstawie takiego żądania odwzorowanie okaże się G-ekwiwariantnym,

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ r_g = \mathsf{T}_2\lambda_{g^{-1}}\circ\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\,,$$

to wówczas – raz jeszcze w odwołaniu do Stw. 6.3 – będziemy mogli zdefiniować pochodną kowariantną

$$\nabla_{\mathcal{X}}\phi \coloneqq \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi]\big] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\mathsf{T}_2\lambda}\mathsf{T}M)\,,$$

która wprost na mocy swej definicji będzie miała pożądaną własność

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathcal{X}}\big(\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big) \equiv \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda\big[\Gamma\big[\Gamma[\widetilde{r}]\big]^\lambda_\gamma(\phi)\big]\big]\\
=\ &\Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\big] \equiv \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[[\Phi_{\mathrm{Ad}}\mathsf{T}_2\lambda]_\gamma\big(\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\big]\\
=\ &\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^{\mathsf{T}_2\lambda}_\gamma\big(\Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\Phi_\lambda[\phi]\big]\big) \equiv \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^{\mathsf{T}_2\lambda}_\gamma\big(\nabla_{\mathcal{X}}\phi\big)\,,
\end{aligned}$$

wyprowadzoną na gruncie (i w zapisie) Stw. 6.5. Po tych wyjaśnieniach możemy przystąpić do bezpośredniej konstrukcji pochodnej $\mathscr{D}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}$.

Punktem wyjścia do ustalenia poprawki do zwykłej pochodnej kierunkowej, $\mathscr{D}_{\cdot}-\mathsf{d}$, jaką wymuszają narzucone przez nas więzy ekwiariantności operatora $\mathscr{D}_{\cdot}$, jest analiza własności transformacyjnych tejże pochodnej względem transformacji cechowania $\gamma \in \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ różniczkowanego cięcia $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)$, w odwołaniu do Stw. 6.5, wyprowadzenia równości (8.9) oraz Stw. 4.1,

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big] &= \mathsf{d}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\otimes\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big)\circ\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi]\\
&-\big(\mathrm{Inv}\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta^A_{\mathrm{L}}\otimes\mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)\big)\big)\,,
\end{aligned}$$

przy czym $t_A,\ A\in\overline{1,\dim\mathrm{G}}$ jest tutaj bazą algebry Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G. Uwzględniwszy reguły transformacyjne dla potencjału powiązania głównego $\underline{\mathcal{A}} \equiv \underline{\mathcal{A}}^A\otimes t_A \in \Omega^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$ na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ni p$ (wprowadzonego w Def. 9.3),

$$\begin{aligned}
{}^\gamma\underline{\mathcal{A}}(p) &\equiv \mathsf{d}y^\alpha\big(p\triangleleft\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big)\otimes\underline{\mathcal{A}}_\alpha\big(p\triangleleft\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big)\\
&= (\mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}})^\alpha_{\ \mu}\triangleright\big(\mathsf{d}x^\mu(p)+\big(\mathrm{Inv}\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta^A_{\mathrm{R}}(p)\,\mathcal{K}^\mu_{t_A}(p)\big)\otimes\underline{\mathcal{A}}_\alpha\big(p\triangleleft\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big)\\
&= \underline{\mathcal{A}}\big(p\triangleleft\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big)\circ\mathsf{T}_p r_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}} + \big(\mathrm{Inv}\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta^A_{\mathrm{L}}(p)\otimes\mathcal{K}^\alpha_{t_A}\triangleright\underline{\mathcal{A}}_\alpha\big(p\triangleleft\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)^{-1}\big)\\
&= \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)}\circ\underline{\mathcal{A}}(p) + \big(\mathrm{Inv}\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]\big)^*\theta_{\mathrm{L}}(p)\,,
\end{aligned}$$

wywiedzione wprost z jej definicji (patrz: Równ. (9.5)) oraz Stw. 4.1 (w połączeniu z Równ. (3.9)) w zapisie wykorzystującym wybór współrzędnych lokalnych na P_{G}: $\{y^\alpha\}_{\mu\in\overline{1,\dim\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}}$ w otoczeniu $p\triangleleft\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](p)$ oraz $\{x^\mu\}_{\mu\in\overline{1,\dim\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}}$ w otoczeniu p, konstatujemy, że

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\big] &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\otimes\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big)\circ\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi]\\
&-\big({}^\gamma\underline{\mathcal{A}}-\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\otimes\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big)\circ\underline{\mathcal{A}}\big)^A\otimes\mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big(\Phi_\lambda[\phi](\cdot)\big)\big)\,,
\end{aligned}$$

czyli w zapisie

$${}^\gamma\phi \coloneqq \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)$$

otrzymujemy, po ponownym przywołaniu Stw. 4.1 i 6.5, tożsamość strukturalną:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\Phi_\lambda[{}^\gamma\phi]+{}^\gamma\underline{\mathcal{A}}^A\otimes\mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\Lambda[{}^\gamma\phi]\big) &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\otimes\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi](\cdot)}\Phi_{\mathrm{Ad}}\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big)\circ\big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi]+\underline{\mathcal{A}}^A\otimes\mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\\
&\equiv \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\otimes\mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big)\circ\big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi]+\underline{\mathcal{A}}^A\otimes\mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\,,
\end{aligned}$$

a ponieważ dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ zachodzi też tożsamość

$$\begin{aligned}
&\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi](p \triangleleft g) + \underline{\mathcal{A}}^A(p \triangleleft g) \otimes \mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi](p \triangleleft g)\big) \\
= \quad &\mathsf{d}\big(g^{-1} \triangleright \Phi_\lambda[\phi](\cdot)\big)(p) + \underline{\mathcal{A}}^B(p) \otimes \big(\mathsf{T}_e \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)^A_{\ B} \triangleright \mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi](p \triangleleft g)\big) \\
= \quad &\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_2\lambda_{g^{-1}}\big) \circ \big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes \mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)(p)\,,
\end{aligned}$$

przeto z powyższych dociekań ekstrahujemy

Definicja 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$, w której wybrano bazę $\{t_A\}_{A \in \overline{1,\dim \mathrm{G}}}$, a M – rozmaitością z gładkim działaniem $\lambda_\cdot : \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ grupy G, indukującym działanie

$$\mathsf{T}_2\lambda_\cdot \ : \ \mathrm{G} \times \mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}M \ : \ (g, v) \longmapsto \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}M}(v)}\lambda_g(v)\,,$$

i niech $(\mathsf{P}_\mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}})$ będzie wiązką główną nad bazą B, o potencjale powiązania głównego $\underline{\mathcal{A}} \equiv \underline{\mathcal{A}}^A \otimes t_A \in \Omega^1(\mathsf{P}_\mathrm{G}) \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g}$. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_\mathrm{G} \times_\lambda M)$ określamy jego **pochodną $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_\mathrm{G})$-kowariantną**

$$\nabla^{\underline{\mathcal{A}}}\phi \coloneqq \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_\mathrm{G}} \otimes \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big) \circ \big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_\mathbb{R} \mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\,.$$

Mamy kluczowe (z fizykalnego punktu widzenia)

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $(\phi, \gamma) \in \Gamma(\mathsf{P}_\mathrm{G} \times_\lambda M) \times \Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_\mathrm{G})$, a dalej oznaczmy

$${}^\gamma\underline{\mathcal{A}}(\cdot) \coloneqq \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)} \circ \big(\underline{\mathcal{A}} - \Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma]^*\theta_\mathrm{L}\big)(\cdot)$$

oraz

$${}^\gamma\phi \coloneqq \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_\gamma(\phi)\,.$$

Zachodzi tożsamość

$$\nabla^{{}^\gamma\underline{\mathcal{A}}}\,{}^\gamma\phi = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_\mathrm{G}} \otimes \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_2\lambda_{\Phi_{\mathrm{Ad}}[\gamma](\cdot)}\big) \circ \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_\mathrm{G}} \otimes \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}\big) \circ \nabla^{\underline{\mathcal{A}}}\phi\,.$$

Dowód: Patrz: Równ. (1). □

Ceną za naturalność postulatów, na podstawie których wyprowadziliśmy powyższą postać różniczkowania cięć wiązki stowarzyszonej, jest strukturalna złożoność i nieoczywistość rezultatu. Podchodząc do zagadnienia od drugiej strony, możemy zamiast tego zapostulować naturalną postać takiego różniczkowania, co czynimy w

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. **Pochodna Crittendena na wiązce stowarzyszonej** $\mathsf{P}_\mathrm{G} \times_\lambda M$ nad B to odwzorowanie

$$\begin{aligned}
\nabla^\mathrm{C} \quad &: \quad \Gamma(\mathsf{P}_\mathrm{G} \times_\lambda M) \times \Gamma(\mathsf{T}B) \longrightarrow \Gamma(\mathsf{P}_\mathrm{G} \times_{\mathsf{T}_2\lambda} \mathsf{T}M) \\
&: \quad (\phi, \mathcal{X}) \longmapsto \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X})\big]\,.
\end{aligned}$$

Opis prostej relacji pomiędzy obiema konstrukcjami, a zarazem dowód *a posteriori* zasadności tej ostatniej zawiera

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 2. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_\mathrm{G} \times_\lambda M)$ i dowolnego pola wektorowego $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathsf{T}B)$ zachodzi tożsamość

$$\nabla^\mathrm{C}_\mathcal{X}\phi = \nabla^{\underline{\mathcal{A}}}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\phi\,.$$

Dowód: Równość obu wyrażeń, w których pojawia się pole wektorowe $\mathcal{X}$ na bazie wiązki głównej P_G (i stowarzyszonej z nią $\mathsf{P}_\mathrm{G} \times_\lambda M$), wynika wprost z definicji $\mathsf{HP}_\mathrm{G} \equiv \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$, oto bowiem ta ostatnia implikuje redukcję wyrażenia na pochodną $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_\mathrm{G})$-kowariantną:

$$\nabla^{\underline{\mathcal{A}}}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})}\phi \quad = \quad \Phi^{-1}_{\mathsf{T}_2\lambda}\big[\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_\mathbb{R} \mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big)\big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}^{-1}\big[\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \underline{\mathcal{A}}^A \triangleright \mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big] \\
&= \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}^{-1}\big[\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \mathcal{K}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})\lrcorner\underline{\mathcal{A}}^A\triangleright t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big] \\
&\equiv \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}^{-1}\big[\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \mathcal{K}_{\mathrm{pr}_2\circ\mathcal{A}(\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}))}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\big] \\
&= \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}^{-1}\big[\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \lrcorner \mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi]\big] \equiv \nabla_{\mathcal{X}}^{\mathrm{C}}\phi\,.
\end{aligned}
$$

□

Konstrukcje i wnioski z dotychczasowych naszych rozważań dotyczących różniczkowania cięć wiązek stowarzyszonych uogólniają się bez znaczących zmian na klasę wiązek produktowych $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E$ opisaną w Def. 7.3. Oto więc mamy

Definicja 3. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$, w której wybrano bazę $\{t_A\}_{A\in\overline{1,\dim\mathrm{G}}}$, a $\mathcal{E} \equiv (E, B, F, \pi_E)$ – wiązką włóknistą nad bazą B wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$, o lokalnych mapach $\kappa_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{\times n}$, $i \in I$ stowarzyszonych z pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ trywializującym dla $\mathcal{E}$, któremu odpowiadają trywializacje $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$. Niech też $\Lambda. : \mathrm{G} \times E \longrightarrow E$ będzie gładkim działaniem grupy G opisanym w Def. 7.3 i indukującym działanie

$$
\mathsf{T}_2\Lambda. : \mathrm{G} \times \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}E : (g, v) \longmapsto \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}E}(v)}\Lambda_g(v)\,,
$$

które wyznacza rodzinę automorfizmów $\{(\mathsf{T}_2\Lambda_g, \mathrm{id}_B)\}_{g\in\mathrm{G}}$ wiązki $(\mathsf{T}E, B, \mathbb{R}^{\times n} \times \mathsf{T}F, \pi_E \circ \pi_{\mathsf{T}E})$ o lokalnych trywializacjach $(\kappa_i^{-1}\times\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times n}\times\mathsf{T}F})\circ(\mathsf{T}\kappa_i\times\mathrm{id}_{\mathsf{T}F})\circ\mathsf{T}\tau_i$. Ponadto niech $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną nad bazą B, o potencjale powiązania głównego $\underline{\mathcal{A}} \equiv \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A \in \Omega^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E)$ określamy jego **pochodną $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantną**

$$
\nabla^{\times\underline{\mathcal{A}}}\phi := \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \otimes \Phi_{\mathsf{T}_2\Lambda}^{\times\,-1}\big) \circ \big(\mathsf{d}\Phi_\Lambda^\times[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{C^k(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathbb{R})} \mathcal{K}_{t_A}\big(\Phi_\Lambda^\times[\phi]\big)\big)\,.
$$

Pochodna Crittendena na wiązce produktowej stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E$ nad B to odwzorowanie

$$
\begin{aligned}
\nabla^{\times\,\mathrm{C}} \quad &: \quad \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda}E) \times \Gamma(\mathsf{T}B) \longrightarrow \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\mathsf{T}_2\Lambda}\mathsf{T}E) \\
&: \quad (\phi, \mathcal{X}) \longmapsto \Phi_{\mathsf{T}_2\Lambda}^{\times\,-1}\big[\mathsf{T}\big(\Phi_\Lambda^\times[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X})\big]\,,
\end{aligned}
$$

w którego zapisie

$$
\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\mathsf{T}_2\Lambda}\mathsf{T}E \equiv \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}}\!\times_{\pi_E\circ\pi_{\mathsf{T}E}}\mathsf{T}E\big)/\mathrm{G}
$$

jest wiązką produktową stowarzyszoną otrzymaną – w procedurze określonej w Def. 7.3 – z produktu włóknistego $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{T}E \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}\,\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}}\!\times_{\pi_E\circ\pi_{\mathsf{T}E}}\mathsf{T}E$.

Uwaga 1. Dowód G-ekwiwariantności wyrażenia: $\mathsf{d}\Phi_\Lambda^\times[\phi] + \underline{\mathcal{A}}^A \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}(\Phi_\Lambda^\times[\phi])$ przebiega identycznie jak w przypadku pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-ekwiwariantnej na wiązce stowarzyszonej, patrz: dyskusja poprzedzającą Def. 1, i gwarantuje, że pochodna $\nabla^{\times\underline{\mathcal{A}}}\phi$ jest dobrze określona. Takąż ekwiwariantności wyrażenia $\mathsf{T}\big(\Phi_\Lambda^\times[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X})$ zapewnia zgodność powiązania na P_{G} z działaniem grupy strukturalnej oraz G-ekwiwariantny charakter odwzorowania $\Phi_\Lambda^\times[\phi]$, oto bowiem dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{T}\big(\Phi_\Lambda^\times[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \circ r_g = \mathsf{T}\big(\Phi_\Lambda^\times[\phi]\big) \circ \mathsf{T}r_g \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) = \mathsf{T}\big(\Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ r_g\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \\
= \quad &\mathsf{T}\big(\Lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_\Lambda^\times[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) = \mathsf{T}\Lambda_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}\big(\Phi_\Lambda^\times[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X})\,.
\end{aligned}
$$

Wobec przemienności diagramów

$$\begin{tikzcd} \mathsf{TP}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\mathsf{T}(\Phi^{\times}_{\Lambda}[\phi])"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{T}E \arrow[d, "\pi_{\mathsf{T}E}"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi^{\times}_{\Lambda}[\phi]"'] & E \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi^{\times}_{\Lambda}[\phi]"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & E \arrow[d, "\pi_E"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

tak określone odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami totalnymi wiązek P_{G} i $\mathsf{T}E$ nad wspólną bazą B zachowuje przy tym włókna,

$$\begin{aligned} (\pi_E \circ \pi_{\mathsf{T}E}) \circ \mathsf{T}\big(\Phi^{\times}_{\Lambda}[\phi]\big) \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) &= \pi_E \circ \Phi^{\times}_{\Lambda}[\phi] \circ \pi_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) \\ &= \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \pi_{\mathsf{TP}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} , \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równości wynika stąd, że $\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})$ jest cięciem podwiązki poziomej $\mathsf{HP}_{\mathrm{G}} \subset \mathsf{TP}_{\mathrm{G}}$. Odwzorowanie to jest zatem w istocie G-ekwiwariantnym morfizmem wiązek. Wreszcie $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantny charakter pierwszej ze zdefiniowanych tu pochodnych weryfikujemy analogicznie jak poprzednio.

Jak w przypadku wcześniejszym, otrzymujemy

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 3. Dla dowolnego cięcia (globalnego) $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\Lambda} E)$ i dowolnego pola wektorowego $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathsf{T}B)$ zachodzi tożsamość

$$\nabla^{\times \mathrm{C}}_{\mathcal{X}} \phi = \nabla^{\times \mathcal{A}}_{\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})} \phi .$$

<u>Dowód:</u> Analogiczny jak w przypadku Stw. 2. □

Tak przygotowani, możemy już przejść do dyskusji fizykalnych zastosowań powiązania indukowanego na wiązce stowarzyszonej.

Cechowanie symetrii globalnych – aspekt dynamiczny w schemacie minimalnym

Jak to zostało szeroko i szczegółowo omówione na Wykładzie 7, wiązka stowarzyszona dostarcza nam naturalnego modelu geometrii kowariantnej wiązki konfiguracyjnej (wiązki pól) teorii pola z wycechowaną grupą symetrii globalnych G. Pojawia się oczywiste pytanie o możliwość wykorzystania powiązania Crittendena na tejże wiązce stowarzyszonej, indukowanego z powiązania głównego na odnośnej wiązce głównej P_{G}, do przepisania wyjściowego funkcjonału działania w formie jawnie niezmienniczej względem transformacji cechowania z $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$. Tak postawione, pytanie to okazuje się nazbyt ogólnym, aby można było dać uniwersalną na nie odpowiedź – schemat cechowania symetrii globalnej w sektorze dynamicznym zależy od struktury teorii, o czym dowodnie zaświadczają wyniki uzyskane przez Autora i współpracowników w pracach [GSW10, Sus12, GSW13]. Poniżej omówimy sytuację, w której odpowiedź jest prosta i naturalna, a procedura cechowania symetrii globalnej poddaje się algorytmizacji.

Sytuacja, o której jest tu mowa, to taka, w której wiązka pól jest trywialna, $\mathcal{F} \equiv \Sigma \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \Sigma$, funkcjonał działania zaś jest zapisany w terminach tensorów kowariantnych na jej włóknie,

$$\mathscr{T} \;:\; \Gamma\big(\mathsf{T}F^{\otimes_{F,\mathbb{R}} N}\big) \longrightarrow C^{\infty}(F,\mathbb{R}) , \tag{2}$$

obliczanych na odwzorowaniach stycznych do pól teorii, tj.,

$$\mathcal{L}_{\mathscr{T}} \;:\; \Gamma(\mathcal{F}) \equiv C^{\infty}(\Sigma, F) \ni \varphi \longmapsto \mathscr{T}_{(2)}\big(\mathsf{T}\varphi(\cdot) \otimes \mathsf{T}\varphi(\cdot) \otimes \cdots \otimes \mathsf{T}\varphi(\cdot)\big) , \tag{3}$$

a następnie całkowanych po czasoprzestrzeni Σ względem stosownej miary, np.

- człon „kinetyczny” typu Kleina–Gordona:

  $$C^{\infty}(F,\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto \int_{\Sigma} \mathscr{G}_{(2)}\big(\varphi(\cdot)\big)\big(\mathsf{T}\varphi \otimes (\star \otimes \mathrm{id}_{\mathsf{T}F})\mathsf{T}\varphi\big) + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} ,$$

  w którego zapisie $\mathsf{T}\varphi$ jest naturalnie interpretowane jako wektor z przestrzeni $\mathsf{T}^*\Sigma \otimes \mathsf{T}\varphi(\Sigma)$, $\mathscr{G}$ jest strukturą metryczną na $\mathsf{T}F$, a $\star$ jest operatorem Hodge'a na $\Omega^{\bullet}(\Sigma)$,

- człon prądowy

$$C^\infty(F,\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto \int_\Sigma \mathscr{A}_{(2)}\big(\varphi(\cdot)\big)\big(\mathsf{T}\varphi(\cdot) \wedge \mathsf{T}\varphi(\cdot) \wedge \cdots \wedge \mathsf{T}\varphi(\cdot)\big) + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,,$$

w którego zapisie $\mathscr{A} \in \Omega^d(\mathcal{F})$, $d = \dim\Sigma$ jest (globalnym) potencjałem zewnętrznego pola ładunkowego sprzęgającego się do prądu ładunkowego opisywanego przez ewolucję konfiguracji pola φ we włóknie F

(we wszystkich przypadkach indeks (2) informuje o tym, że odnośne pole tensorowe na F jest obliczane na drugim czynniku tensorowym swych argumentów), przy czym zakładamy, że tensory $\mathscr{T}$ występujące w definicji funkcjonału działania są niezmiennicze względem (naturalnego) działania

$$\lambda_\cdot \ :\ \mathrm{G} \times F \longrightarrow F$$

pewnej wyróżnionej podgrupy $\mathrm{G} \subset \mathrm{Aut}\,F$ grupy automorfizmów $\mathrm{Aut}\,F \equiv \mathrm{Diff}\,(F,F)$ włókna F, tj.

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \mathscr{T} \circ \big(\mathsf{T}_2\lambda_g \otimes \mathsf{T}_2\lambda_g \otimes \cdots \otimes \mathsf{T}_2\lambda_g\big) = \mathscr{T}\,,$$

gdzie

$$\mathsf{T}_2\lambda_\cdot\ :\ \mathrm{G} \times \mathsf{T}F \longrightarrow \mathsf{T}F\ :\ (g,v) \longmapsto \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}F}(v)}\lambda_g(v)$$

jest działaniem stycznościowym wyindukowanym według znajomego schematu. Jest zupełnie jasne, że w opisanych okolicznościach, w których obliczenie całki działania wymaga ewaluacji każdej z kopii odwzorowania stycznościwego $\mathsf{T}\varphi$ na jednym z elementów lokalnej bazy $\{\partial_\mu\}_{\mu\in\overline{0,d-1}}$ przestrzeni cięć $\Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathsf{T}\Sigma)$, „minimalne" przeformułowanie wyjściowego modelu powinno sprowadzić się do zastąpienia zwykłych pochodnych kierunkowych $\mathsf{T}\varphi(\partial_\mu)$ pól $\varphi \in C^\infty(\Sigma,F)$ pochodnymi kowariantnymi $\nabla^{\mathrm{C}}_{\partial_\mu}\phi$ cięć globalnych $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda F)$ wiązki stowarzyszonej z pewną wiązką cechowania P_{G} poprzez działanie $\lambda_\cdot$. Jedyny kłopot, jaki pozostaje na tym etapie, to… przeciwdziedzina pochodnej Crittendena – wynik wypisanego różniczkowania $\nabla^{\mathrm{C}}_{\partial_\mu}\phi$ jest cięciem wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_2\lambda} \mathsf{T}F$, nie zaś – wiązki $\mathsf{T}F$, jak byśmy chcieli. I temu jednak daje się zaradzić, oto bowiem odwzorowanie $\Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}$ przeprowadza rzeczone cięcie w odwzorowanie G-ekwiwariantne $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{T}F$, które dla uzyskania pożądanego wyniku końcowego wystarczy prekomponować z dowolnym cięciem referencyjnym σ_* w duchu Def. 7.5. *Globalna* gładkość tak uzyskanego odwzorowania $\Sigma \longrightarrow \mathsf{T}F$ wymaga, rzecz jasna, istnienia *globalnego* cięcia referencyjnego $\sigma_* \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, co w świetle Stw. 5.5 jest równoważne z trywialnością wiązki cechowania P_{G}, którą od tej pory będziemy zakładać w naszych rozważaniach fizykalnych.

Punktem wyjścia jest

Definicja 4. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\Sigma,\mathrm{G},\mathrm{pr}_1)$ będzie wiązką główną nad bazą Σ, indukującą powiązanie Crittendena ∇^{C} na wiązce z nią stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda F$ poprzez działanie $\lambda_\cdot\ :\ \mathrm{G} \times F \longrightarrow F$ na swym włóknie typowym F. **Prezentacja lokalna pochodnej kowariantnej pola $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda F)$ w cechowaniu** $\sigma_*\ :\ \mathcal{O} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, $\mathcal{O} \subset \Sigma$ to odwzorowanie

$$D^{\sigma_*}\phi \equiv \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}[\nabla^{\mathrm{C}}_\cdot\phi]_{\sigma_*}\ :\ \Gamma(\mathsf{T}\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O},\mathsf{T}F)\ :\ \mathcal{X} \longmapsto \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}[\nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi] \circ \sigma_*\,.$$

Fizykalne znaczenie wprowadzonego tu obiektu podsumowuje

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 4 przy dodatkowym założeniu trywialności wiązki P_{G}, co zapewnia istnienie *globalnego* cięcia σ_*, i niechaj $\mathscr{T}$ będzie tensorem ($\mathsf{T}_2\lambda$-niezmienniczym) jak w Równ. (2). Odwzorowanie

$$\mathcal{L}^{\mathrm{min}}_{\mathscr{T}}\ :\ \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda F) \ni \phi \longmapsto \mathscr{T}_{(2)}\big(D^{\sigma_*}\phi(\cdot) \otimes D^{\sigma_*}\phi(\cdot) \otimes \cdots \otimes D^{\sigma_*}\phi(\cdot)\big)\,,$$

otrzymane z tego zdefiniowanego w Równ. (3) przy użyciu $\mathscr{T}$ poprzez podstawienie

$$\mathsf{T}\varphi \longmapsto D^{\sigma_*}\phi\,, \tag{4}$$

jest **niezmiennicze względem transformacji cechowania** w rozumieniu tożsamości

$$\mathcal{L}^{\mathrm{min}}_{\mathscr{T}}({}^\gamma\phi) = \mathcal{L}^{\mathrm{min}}_{\mathscr{T}}(\phi)\,.$$

Dowód: Oczywisty. □

Tym sposobem udało nam się – w opisanych powyżej szczególnych okolicznościach – zrealizować nadrzędny cel fizykalny, jakim było przeformułowanie wyjściowej teorii pola w taki sposób, iżby uzyskany w wyniku opis dynamiki pól tego samego typu był nie tylko współzmienniczy względem działania grupy cechowania, ale zarazem *strukturalnie* tożsamy z wyjściowym, tj. iżby był zapisany przy użyciu tych samych tensorów $\mathsf{T}_2\lambda$-niezmienniczych na przestrzeni F wewnętrznych stopni swobody pola, choć w terminach adaptowanych różniczkowań. To jednak nie wyczerpuje fizycznego sensu podstawienia (4), o czym przekonamy się poniżej.

W tym celu odwrócimy obecnie rozumowanie przedstawione w dowodzie Stw. 2, które przeprowadziło nas od pochodnej $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$-kowariantnej cięcia wiązki stowarzyszonej wzdłuż (podniesienia poziomego) pola wektorowego w bazie tejże wiązki do cięcia tego pochodnej Crittendena. Rozważmy zatem pole wektorowe $\widetilde{\mathcal{X}} \in \Gamma(\mathsf{TP}_{\mathrm{G}})$ o składowej poziomej $\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})$ zadanej przez pewne pole $\mathcal{X} \in \Gamma(\mathsf{T}\Sigma)$ na bazie i o składowej pionowej $\mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{VP}_{\mathrm{G}})$,

$$\widetilde{\mathcal{X}} := \mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) + \mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{HP}_{\mathrm{G}} \oplus_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathbb{R}} \mathsf{VP}_{\mathrm{G}}) \equiv \Gamma(\mathsf{TP}_{\mathrm{G}})\,.$$

Przy tym w świetle Stw. 9.1 mamy rozkład

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^A \triangleright \mathcal{K}^{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}_{t_A}\,,$$

obliczamy zatem – w odwołaniu do Def. 2, Def. 4.2 i Uwagi 4.1 oraz własności definiujących odwzorowania $\Phi_\lambda[\phi]$ (które przesądzają o tym, że obrazem pola fundamentalnego względem odwzorowania stycznego do $\Phi_\lambda[\phi]$ jest pole fundamentalne stowarzyszone z tym samym elementem algebry Liego $\mathfrak{g}$, przy czym zamiana działania prawego na lewe skutkuje zamianą znaku) –

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}[\nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi] &\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ\mathrm{Hor.}(\mathcal{X}) = \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ\big(\widetilde{\mathcal{X}}-\mathcal{V}\big) = \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ\widetilde{\mathcal{X}} + \mathcal{V}^A \triangleright \mathcal{K}^{(F)}_{t_A}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\\
&\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ\widetilde{\mathcal{X}} + \mathcal{V}^A \triangleright \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda\big(t_A, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi]}F}\big)\\
&= \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ\widetilde{\mathcal{X}} + \mathcal{V}^A \triangleright \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda\big(\mathcal{K}^{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}_{t_A} \lrcorner\, \underline{\mathcal{A}}, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi]}F}\big)\\
&= \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ\widetilde{\mathcal{X}} + \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda\big(\mathcal{V} \lrcorner\, \underline{\mathcal{A}}, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi]}F}\big)\\
&\equiv \mathsf{T}\big(\Phi_\lambda[\phi]\big)\circ\widetilde{\mathcal{X}} + \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda\big(\widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner\, \underline{\mathcal{A}}, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\Phi_\lambda[\phi]}F}\big)\\
&\equiv \widetilde{\mathcal{X}} \lrcorner \big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \otimes \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda\big)\circ\big(\underline{\mathcal{A}},0\big)\big)\,.
\end{aligned}$$

Ograniczając dyskusję po raz kolejny do interesującego nas przypadku trywialnej wiązki cechowania $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} = \Sigma \times \mathrm{G}$ (wzgl. do pewnego podzbioru otwartego $\mathcal{O} \subset B$, nad którym wiązka cechowania trywializuje się), możemy wybrać $\widetilde{\mathcal{X}}$ w postaci pchnięcia stycznego pola $\mathcal{X}$ wzdłuż dowolnego cięcia (lokalnego) $\sigma_* \in \Gamma_{(\mathrm{loc})}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ (nad $\mathcal{O}$) – w rzeczy samej, składowa pozioma pola

$$\widetilde{\mathcal{X}} \equiv \mathsf{T}\sigma_*(\mathcal{X})$$

to $\mathrm{Hor.}(\mathcal{X})$, co wynika z jednoznaczności rozkładu pól wektorowych na P_{G} na składowe: poziomą i pionową oraz tożsamości

$$\mathsf{T}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{\mathcal{X}}) = \mathsf{T}(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\sigma_*)(\mathcal{X}) = \mathsf{T}\mathrm{id}_\Sigma(\mathcal{X}) = \mathrm{id}_{\mathsf{T}\Sigma}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}\,.$$

Dokonawszy ewaluacji poprzedniego wyrażenia na tym polu wektorowym, a następnie obliczywszy rezultat na cięciu σ_*, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
D^{\sigma_*}_{\mathcal{X}}\phi &\equiv \Phi_{\mathsf{T}_2\lambda}[\nabla^{\mathrm{C}}_{\mathcal{X}}\phi]\circ\sigma_* = \mathsf{T}\sigma_*(\mathcal{X}) \lrcorner \big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \otimes \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda\big)\circ\big(\underline{\mathcal{A}},0\big)\big)\circ\sigma_*\\
&= \mathcal{X} \lrcorner \big(\sigma_*^* \otimes \mathrm{id}_{\mathsf{T}F}\big)\big(\mathsf{d}\Phi_\lambda[\phi] + \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \otimes \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi])}\lambda\big)\circ\big(\underline{\mathcal{A}},0\big)\big)\\
&= \mathcal{X} \lrcorner \big(\mathsf{d}\big(\Phi_\lambda[\phi]\circ\sigma_*\big) + \big(\sigma_*^* \otimes \mathsf{T}_{(e,\Phi_\lambda[\phi]\circ\sigma_*)}\lambda\big)\circ\big(\underline{\mathcal{A}},0\big)\big)
\end{aligned}$$

$$\equiv \quad \mathcal{X} \lrcorner \left(\mathsf{d}\phi_{\sigma_*} + \left(\sigma_*^* \otimes \mathsf{T}_{(e,\phi_{\sigma_*})}\lambda \right) \circ \left(\underline{\mathcal{A}}, 0 \right) \right),$$

czyli ostatecznie prezentacja lokalna pochodnej kowariantnej w cechowaniu σ_* przybiera postać

$$D^{\sigma_*}\phi = \mathsf{d}\phi_{\sigma_*} + \left(\sigma_*^* \otimes \mathsf{T}_{(e,\phi_{\sigma_*})}\lambda \right) \circ \left(\underline{\mathcal{A}}, 0 \right).$$

Oznaczmy

$$\underline{\mathcal{A}} =: \underline{\mathcal{A}}^A \otimes t_A$$

oraz

$$\mathrm{A}_{\sigma_*}^A := \sigma_*^* \underline{\mathcal{A}}^A,$$

aby móc przepisać powyższą formułę w postaci

$$D^{\sigma_*}\phi = \mathsf{d}\phi_{\sigma_*} + \mathrm{A}_{\sigma_*}^A \otimes \mathcal{K}_{t_A}^{(F)}\left(\phi_{\sigma_*} \right),$$

w której pojawia się ona zazwyczaj (o ile w ogóle!) w literaturze fizycznej. Dotychczasowe nasze rozważania sankcjonują

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj σ_* będzie cięciem (lokalnym) wiązki głownej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \Sigma, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ o potencjale powiązania głównego $\underline{\mathcal{A}}$. 1-Formę o wartościach w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy strukturalnej G daną wzorem

$$\mathrm{A}_{\sigma_*} := \sigma_*^* \underline{\mathcal{A}}$$

określamy mianem (**lokalnego**) **pola cechowania w cechowaniu** σ_*. Przy podstawieniu (4) realizującym wycechowanie symetrii globalnej modelowanej przez grupę Liego G w sektorze dynamicznym teorii pola typu F pole to **sprzęga się** z polami materii $\phi \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda F)$ (choćby poprzez zależność $\mathcal{K}_{t_A}^{(F)}$ od ϕ_{σ_*}) w prezentacji lokalnej pochodnej kowariantnej

$$D^{\sigma_*}\phi = \mathsf{d}\phi_{\sigma_*} + \mathrm{A}_{\sigma_*}^A \otimes \mathcal{K}_{t_A}^{(F)}\left(\phi_{\sigma_*} \right),$$

co znajduje odzwierciedlenie w określeniu **sprzężenie minimalne** zwyczajowo używanym w odniesieniu do transkrypcji

$$\left(\Gamma(\Sigma \times F), \mathsf{T}\varphi \right) \longmapsto \left(\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda F), D^{\sigma_*}\phi \right).$$

Pojawienie się nowego pola fizycznego – (lokalnego) pola cechowania – w teorii pola z symetrią wycechowaną (w charakterze niedynamicznego tła[1]) każe zadać pytanie o możliwą dynamikę tegoż. Jak zawsze, odpowiedzi dostarcza studium niezmienników naturalnego działania grupy cechowania $\Gamma(\mathrm{Ad}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \cong \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B)$ (Stw. 6.6) na formę powiązania i utworzone z niej obiekty pochodne. Tę najbardziej rozpowszechnioną w modelowaniu fizykalnym zawiera

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 9.5 i niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \Sigma, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną z powiązaniem głównym o formie powiązania $\mathcal{A} \in \Omega^1(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, o pokryciu trywializującym $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$. Oznaczmy jako

$$\|\mathrm{F}\|_{\Omega^2(\Sigma),\mathfrak{g}} \in \Omega^d(\Sigma), \qquad d \equiv \dim \Sigma$$

d-formę o prezentacjach lokalnych

$$\|\mathrm{F}\|_{\Omega^2(\Sigma),\mathfrak{g}} \restriction_{\mathcal{O}_i} = \left(\mathrm{id}_{\Omega^d(\Sigma)} \otimes \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}} \right) \left(\mathrm{F}_i \wedge \star_\Sigma \mathrm{F}_i \right), \qquad i \in I,$$

w których zapisie $\star_\Sigma$ jest izomorfizmem Hodge'a na $\Omega^\bullet(\Sigma)$. **Funkcjonał Yanga–Millsa** to funkcjonał

$$\mathrm{A}_i \longmapsto -\tfrac{1}{4} \int_\Sigma \|\mathrm{F}\|_{\Omega^2(\Sigma),\mathfrak{g}} \equiv S_{\mathrm{YM}}[\mathrm{A}_i].$$

[1]Praktycznie rzecz ujmując, niedynamiczny charakter tego pola odzwierciedla czysto algebraiczny (tj. nieróżniczkowy) charakter jego wystąpień w funkcjonale działania.

References

[GSW10] K. Gawędzki, R.R. Suszek, and K. Waldorf, *"Global gauge anomalies in two-dimensional bosonic sigma models"*, Comm. Math. Phys. **302** (2010), 513–580.

[GSW13] ———, *"The gauging of two-dimensional bosonic sigma models on world-sheets with defects"*, Rev. Math. Phys. **25** (2013), 1350010.

[Sus12] R.R. Suszek, *"Defects, dualities and the geometry of strings via gerbes II. Generalised geometries with a twist, the gauge anomaly and the gauge-symmetry defect"*, Hamb. Beitr. Math. Nr. **361** (2011) [arXiv preprint: 1209.2334 [hep-th]].