GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II W CZASACH ZARAZY
2. WYKŁAD ZDALNY (6. KWIETNIA 2020 R.)

1. Wiązki z dodatkową strukturą (we włóknie) – studium kanoniczne

Rozważania fizykalne doprowadziły nas ostatnio do nader pojemnego pojęcia wiązki włóknistej, którą zasadnie jest postrzegać jako naturalne uogólnienie konstrukcji produktu kartezjańskiego rozmaitości, przez co rozumiemy, że ten dostarcza jej (wiązki) modelu lokalnego w tym samym znaczeniu, w jakim podzbiór otwarty przestrzeni topologicznej $\mathbb{R}^n$ z naturalną strukturą gładką dostarcza modelu lokalnego rozmaitości. W konkretnych sytuacjach teoretycznych pojawia się zazwyczaj potrzeba geometryzacji przy użyciu wiązki właśnie dodatkowych struktur algebraicznych lub teoriogrupowych, a to celem umodelowania gładkiej dystrybucji takowych struktur nad zadaną rozmaitością (np. gładkiej dystrybucji iloczynów skalarnych na przestrzeniach stycznych do punktów rozmaitości lub gładkiej dystrybucji spinorów nad czasoprzestrzenią). Naszą tak właśnie umotywowaną peregrynację po rozległym uniwersum wiązek zaczynamy od konstrukcji kanonicznej stowarzyszonej z *każdą* rozmaitością różniczkowalną i stanowiącej fundamentalną składową opisu pól tensorowych na rozmaitościach, jaką jest konstrukcja opisana w poniższej

Definicja 1. Wiązka styczna nad rozmaitością gładką $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ wymiaru $n \in \mathbb{N}^\times$ o atlasie $\widehat{\mathscr{A}}$ złożonym z map lokalnych $\kappa_i \,:\, \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n}),\ i \in I$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ rozmaitości M,

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i = M\,,$$

to wiązka włóknista o składowych:

- baza M, o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ zadawanej przez atlas $\widehat{\mathscr{A}}$;
- przestrzeń totalna będąca sumą rozłączną
$$\mathsf{T}M := \bigsqcup_{x\in M} \mathsf{P}_x$$
zbiorów klas abstrakcji
$$\mathsf{P}_x = \{\ \gamma\ :\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow M \quad | \quad \varepsilon > 0\ \wedge\ \gamma(0) = x\ \}/\sim_x$$
ścieżek (lokalnych) klasy C^1 przez $x \in M$ względem relacji równoważności (współstyczności)
$$\gamma_1 \sim_x \gamma_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \gamma_2(0) = x = \gamma_1(0) \\ D(\kappa\circ\gamma_2)(0) = D(\kappa\circ\gamma_1)(0) \end{cases}$$
(zapisanej w *dowolnej* mapie lokalnej $\kappa\ :\ \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_x$ punktu x) o strukturze rozmaitości opisanej poniżej;
- włókno typowe $\mathbb{R}^{\times n}$ o naturalnej strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞;
- rzut na bazę
$$\pi_{\mathsf{T}M}\ :\ \mathsf{T}M \longrightarrow M\ :\ ([\gamma]_{\sim_x}, x) \longmapsto x\,.$$

Przy tym odwzorowania

$$\mathsf{T}\kappa_i\ :\ \mathsf{T}\mathcal{O}_i := \pi^{-1}_{\mathsf{T}M}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n}\ :\ [\gamma]_{\sim_x} \longmapsto \big(\kappa_i(x), \mathsf{D}(\kappa_i\circ\gamma)(0)\big)$$

indukują na $\mathsf{T}M$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \subset \mathbb{R}^{\times 2n}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset \mathsf{T}M$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall_{i\in I}\ :\ \mathsf{T}\kappa_i(\mathcal{V} \cap \mathsf{T}\mathcal{O}_i) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n}\big)\,.$$

W tej topologii odwzorowania $\mathsf{T}\kappa_i$ są jawnie homeomorficzne, stanowią przeto mapy lokalne, zwane **mapami naturalnymi**, dla których transformacje współrzędniowe to

$$\begin{aligned}\mathsf{T}t_{ij} := \mathsf{T}\kappa_i \circ \big(\mathsf{T}\kappa_j\big)^{-1} \quad &: \quad \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{\times n} \\ &: \quad \big(\kappa_j(x), \mathsf{D}(\kappa_j \circ \gamma)(0)\big) \longmapsto \big(\kappa_i(x), \mathsf{D}(\kappa_i \circ \gamma)(0)\big) \\ &\qquad \equiv \big(t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big), \mathsf{D}(t_{ij} \circ \kappa_j \circ \gamma)(0)\big) \\ &\qquad = \big(t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big), \mathsf{D}t_{ij}\big(\kappa_j(x)\big)\big(\mathsf{D}(\kappa_j \circ \gamma)(0)\big)\big)\,.\end{aligned}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy C^∞ w składowej bazowej (z założenia),

$$t_{ij} \in \mathrm{Diff}^\infty\big(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \kappa_i(\mathcal{O}_{ij})\big)\,,$$

i klasy C^∞ w składowej z włókna w argumencie bazowym,

$$\mathsf{D}t_{ij} \in C^\infty\big(\kappa_j(\mathcal{O}_{ij}), \mathbb{R}^{\times n^2}\big)\,,$$

a nadto liniowa, więc klasy C^∞ w argumencie z włókna $\mathsf{D}(\kappa_j \circ \gamma)(0)$, czyli ostatecznie klasy C^∞, i jako taka zadaje na $\mathsf{T}M$ strukturę gładkiej rozmaitości różniczkowalnej. Zarazem odwzorowania $\mathsf{T}\kappa_i$ pełnią też rolę lokalnych trywializacji, tautologicznie C^∞-gładkich względem zdefiniowanej tu (przy ich użyciu) struktury różniczkowej. Wreszcie też rzut na bazę jest surjekcją klasy C^∞ jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{\mathsf{T}M}\restriction_{\mathsf{T}\mathcal{O}_i} = \kappa_i^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \mathsf{T}\kappa_i\,.$$

Na włóknie P_x tak określonej wiązki stycznej znajdujemy naturalną ***strukturę liniową***. Istotnie, oznaczywszy $v_\gamma := \mathsf{D}(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{\times n}$ dla skrótu, na zbiorze P_x klas abstrakcji ścieżek względem relacji współstyczności określamy strukturę grupy przemiennej z działaniem

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}_x \times \mathsf{P}_x \longrightarrow \mathsf{P}_x \\ : \quad &\big([\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x}\big) \longmapsto \big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\,\ni t \mapsto \kappa^{-1}\big(\kappa(x) + t \triangleright (v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2})\big) \in \mathcal{O}_x\big]_{\sim_x} \\ &\qquad =: [\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x}\end{aligned}$$

i elementem neutralnym danym w postaci klasy $[\gamma_x]_{\sim_x}$ ścieżki stałej

$$x \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow M \;:\; t \longmapsto x\,,$$

a następnie działanie ciała $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times \mathsf{P}_x \longrightarrow \mathsf{P}_x \;:\; \big(\lambda, [\gamma]_{\sim_x}\big) \longmapsto \big[\,]-\varepsilon,\varepsilon[\,\ni t \mapsto \kappa^{-1}\big(\kappa(x) + t \cdot \lambda \triangleright v_\gamma\big) \in \mathcal{O}_x\big]_{\sim_x}\,,$$

przy czym w obu przypadkach $\varepsilon > 0$ jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wynikiem działania leżała w całości w $\mathcal{O}_x$.

Zadanie domowe 1. Sprawdź niezależność definicji relacji współstyczności oraz struktury liniowej na P_x od użytych w nich map lokalnych κ, ustalonych dowolnie.

Zadanie domowe 2. Biorąc za punkt wyjścia sumę rozłączną

$$\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\times n}$$

i wykorzystując odwzorowania przejścia pomiędzy dziedzinami map lokalnych na M (a ściślej – odwzorowania styczne do nich), a podpierając się przy tym intuicjami wyrobionymi przy dowodzie Twierdzenia o rekonstrukcji wiązki włóknistej z poprzedniego wsadu notatek wykładowych, skonstruuj alternatywny model wiązki stycznej nad M i wskaż naturalny izomorfizm z modelem z powyższej definicji. Następnie zidentyfikuj kanoniczną strukturę $\mathbb{R}$-liniową w tym nowym modelu i zdefiniuj izomorfizm (włókno po włóknie) pomiędzy tą strukturą a strukturą opisaną pod definicją.

2. Wiązki wektorowe

Strukturę wiązki przestrzeni liniowych zaobserwowaną w poprzednim rozdziale formalizujemy w

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasową notację, ustalmy (dowolnie) $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ze standardową topologią (euklidesową) i strukturą różniczkową klasy C^∞. **Wiązka wektorowa rzędu** n **nad ciałem** $\mathbb{K}$ klasy C^∞ to wiązka włóknista $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ o własnościach

- włókno $\mathbb{V}_x \equiv \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\{x\})$ nad dowolnym punktem $x \in B$ jest przestrzenią $\mathbb{K}$-liniową;
- ograniczenia dyfeomorfizmów klasy C^∞ (lokalnych trywializacji)

$$\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \restriction_{\mathbb{V}_x} \;:\; \mathbb{V}_x \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times n}\,, \quad x \in B$$

  są izomorfizmami przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowych,

przy czym odwzorowania definiujące strukturę $\mathbb{K}$-liniową na włóknach $\mathbb{V}$ są klasy C^∞, w szczególności więc mamy dyfeomorfizm

$$\mathbb{A} \;:\; \mathbb{V} \times_B \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \tag{1}$$

modelowany na definiującej operacji binarnej $A^n \;:\; \mathbb{K}^{\times n} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ (dodawanie „po współrzędnych") w rozumieniu diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times_B \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{A}"] \arrow[d, "\tau_i \times \tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \big(\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}\big) \times_{\mathcal{O}_i} \big(\mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}\big) \arrow[r, "(\mathrm{pr}_1, A^n \circ \mathrm{pr}_{2,4})"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{tikzcd} \tag{2}$$

oraz rodzinę dyfeomorfizmów

$$\mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathrm{Diff}^k(\mathbb{V}) \;:\; \lambda \longmapsto \mathbb{L}_\lambda \tag{3}$$

o $\mathbb{K}$-liniowych ograniczeniach do włókien, uzupełnianą przez odwzorowanie $\mathbb{K}$-liniowe $\mathbb{L}_{0_{\mathbb{K}}}$, modelowanych na definiującym działaniu $\ell^n \;:\; \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{\times n}$ (mnożenie w $\mathbb{K}$ „po współrzędnych") w rozumieniu diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[r, "\mathbb{L}_\lambda"] \arrow[d, "\tau_i"'] & \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[d, "\tau_i"] \\ \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \arrow[r, "\ell^n_\lambda"'] & \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \end{tikzcd} . \tag{4}$$

W przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej wiązce wektorowej**, gdy zaś $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – o **zespolonej wiązce wektorowej**.

Rząd wiązki będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{rk}\,\mathbb{V}$. Ilekroć $\mathrm{rk}\,\mathbb{V} = 1$, wiązkę określamy mianem **wiązki liniowej** i zwyczajowo oznaczamy symbolem L,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r] & L \arrow[d, "\pi_L"] \\ & B \end{tikzcd} .$$

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy C^∞)

$$\mathbf{0}_{\mathbb{V}} \;:\; B \longrightarrow \mathbb{V} \;:\; x \longmapsto \tau_i^{-1}(x, \mathbf{0}^n)\,, \quad x \in \mathcal{O}_i\,,$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki wektorowej $\mathbb{V}$. Jest ono cięciem globalnym $\mathbb{V}$. Zarówno zbiór cięć lokalnych $\Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{V})$, jak i zbiór cięć globalnych $\Gamma(\mathbb{V})$ niosą naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(B, \mathbb{K})$.

Podwiązka wektorowa wymiaru m wiązki wektorowej $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ to podwiązka $(\mathbb{W}, B, \mathbb{K}^{\times m}, \pi_{\mathbb{V}}\restriction_{\mathbb{W}})$, $m < n$ tejże wiązki (włóknistej) o tej własności, że nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ jej włókno $\mathbb{W}_x \subset \mathbb{V}_x$ jest podprzestrzenią $\mathbb{K}$-liniową.

Morfizm wiązek wektorowych (**nad ciałem** $\mathbb{K}$) $(\mathbb{V}_A, B_A, \mathbb{K}^{\times n_A}, \pi_{\mathbb{V}_A})$, $n_A \in \mathbb{N}$, $A \in \{1, 2\}$ to dwójka (Φ, f) złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) \;:\; (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2}),$$

którego ograniczenie do włókna nad dowolnym punktem bazy $x \in B_1$,

$$\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}} \;:\; \mathbb{V}_{1\,x} \longrightarrow \mathbb{V}_{2\,f(x)}, \tag{5}$$

jest odwzorowaniem $\mathbb{K}$-liniowym. **Rząd morfizmu wiązek wektorowych** (Φ, f) to odwzorowanie

$$\mathrm{rk}\,(\Phi, f) \;:\; B_1 \longrightarrow \mathbb{N} \;:\; x \longmapsto \mathrm{rk}\big(\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\big).$$

Mamy istotne

Twierdzenie 1. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między nigdzie nieznikającymi cięciami lokalnymi klasy C^∞ wiązki liniowej klasy C^∞ i jej trywializacjami lokalnymi (tejże klasy). W szczególności wiązka liniowa jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma nigdzie nieznikające cięcie globalne.

Dowód: Każde nigdzie nieznikające cięcie $\sigma \;:\; \mathcal{O} \longrightarrow L \smallsetminus \{\mathbf{0}_L(B)\}$ wiązki liniowej L nad zbiorem $\mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ jest gładko indeksowaną przez bazę $\mathcal{O}$ wiązki rodziną baz $\sigma(x)$, $x \in \mathcal{O}$ poszczególnych jednowymiarowych włókien L_x, zatem dowolnemu wektorowi $v \in \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ z włókna $L_{\pi_L(v)}$ możemy przypisać w jednoznaczny sposób skalar $\lambda(v) \in \mathbb{K}$ o własności

$$v = \mathbb{L}_{\lambda(v)}\big(\sigma \circ \pi_L(v)\big),$$

przy czym zależność tegoż skalara od wektora v jest gładka (wszak własność tę ma superpozycja odwzorowań gładkich $\sigma \circ \pi_L$). To pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$\tau_\sigma \;:\; \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K} \;:\; v \longmapsto \big(\pi_L(v), \lambda(v)\big),$$

jawnie $\mathbb{K}$-liniowe i gładkie (klasy C^∞). Bez trudu wskazujemy jego odwrotność:

$$\tau_\sigma^{-1} \;:\; \mathcal{O} \times \mathbb{K} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \;:\; (x, \lambda) \longmapsto \mathbb{L}_\lambda\big(\sigma(x)\big),$$

o tych samych cechach strukturalnych.

Cięcie lokalne przyporządkowane dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau \;:\; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}$ to

$$\sigma_\tau \;:\; \mathcal{O} \longrightarrow \pi_L^{-1}(\mathcal{O}) \;:\; x \longmapsto \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}).$$

O jego niezerowości przekonuje prosty argument: jeśli dopuścimy równość

$$0_{L_x} = \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}})$$

nad pewnym punktem $x \in \mathcal{O}$, to wówczas wobec założonej przez nas $\mathbb{K}$-liniowości τ dochodzimy do sprzeczności

$$(x, 0_{\mathbb{K}}) \equiv \tau(0_{L_x}) = \tau \circ \tau^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = (x, 1_{\mathbb{K}}).$$

Wypisane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, nad dowolnym punktem $x \in \mathcal{O}$ wyznaczamy

$$\sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x, 1_{\mathbb{K}}) = \mathbb{L}_{1_{\mathbb{K}}}\big(\sigma(x)\big) = \sigma(x),$$

zatem

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma.$$

Ponadto jeśli dla dowolnego wektora $v \in L_{\pi_L(v)} \subset \pi_L^{-1}(\mathcal{O})$ zdefiniować (w sposób jednoznaczny) skalar $\lambda(v)$ równaniem

$$v =: \mathbb{L}_{\lambda(v)}\big(\sigma_\tau \circ \pi_L(v)\big) \equiv \mathbb{L}_{\lambda(v)} \circ \tau^{-1}\big(\pi_L(v), 1_{\mathbb{K}}\big) = \tau^{-1}\big(\pi_L(v), \lambda(v)\big),$$

to wyznaczamy

$$\lambda(v) = \mathrm{pr}_2 \circ \tau(v)\,,$$

a stąd także

$$\tau_{\sigma_\tau}(v) = \big(\pi_L(v), \mathrm{pr}_2 \circ \tau(v)\big) \equiv \tau(v)\,,$$

czyli

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau\,.$$

□

Zadanie domowe 3. Udowodnij następujące uogólnienie powyższego twierdzenia na przypadek $\mathrm{rk}\,\mathbb{V} > 1$.

Twierdzenie 2. Przyjmijmy oznaczenia Def. 2. Wiązka wektorowa rzędu $n \in \mathbb{N}^\times$ nad bazą B jest globalnie trywialna, tj. izomorficzna z wiązką $(B \times \mathbb{K}^{\times n}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \mathrm{pr}_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n jej cięć globalnych σ^k, $k \in \overline{1,n}$, które nad każdym punktem $x \in B$ bazy definiują n wektorów liniowo niezależnych $\sigma^k(x)$, $k \in \overline{1,n}$.

Podobnie jak same wiązki wektorowe, morfizmy tych wiązek pokrywające dyfeomorfizm identycznościowy na bazie mają prosty opis lokalny, z którego nieraz przyjdzie nam korzystać.

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 2. Dowolny morfizm (Φ, id_B) wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_A, B, \mathbb{K}^{\times n_A}, \pi_{\mathbb{V}_A})$, $A \in \{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^A : \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n_A}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g_{ij}^A : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n_A; \mathbb{K})$, opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_1}"'] & \mathbb{V}_2 \arrow[d, "\pi_{\mathbb{V}_2}"] \\
B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B
\end{tikzcd}\,,$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i \in I}$ odwzorowań macierzowych (lokalnie) klasy C^∞

$$h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2, \mathbb{K})\,, \quad i \in I$$

o własności

(6) $$\forall_{x \in \mathcal{O}_{ij}} : g_{ij}^2(x) \cdot h_j(x) = h_i(x) \cdot g_{ij}^1(x)\,.$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

Dowód: Wybierzmy (dowolnie) bazę $\{e_a\}_{a \in \overline{1,n_1}}$ w przestrzeni $\mathbb{K}^{\times n_1}$ i na tej podstawie zdefiniujmy cięcia lokalne

(7) $$\varepsilon_a^{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_1 : x \longmapsto \tau_i^{1\,-1}(x, e_a)\,.$$

Zauważmy, że odwzorowanie Φ jest w pełni określone przez wartości przyjmowane przezeń na powyższych cięciach, oto bowiem wobec założonej $\mathbb{K}$-liniowości τ_i oraz Φ w dowolnym punkcie

$$v \equiv \tau_i^{-1}\big(x, v^a \triangleright_n e_a\big) \equiv \mathbb{L}^{(1)}_{v^a}\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,, \qquad x \in \mathcal{O}_i$$

otrzymujemy

$$\Phi(v) = \Phi\Big(\mathbb{L}^{(1)}_{v^a}\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\Big) = \mathbb{L}^{(2)}_{v^a} \circ \Phi\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,.$$

Wybierzmy zatem (dowolnie) bazę $\{f_r\}_{r \in \overline{1,n_2}}$ w $\mathbb{K}^{\times n_2}$, o bazie dualnej $\{f_r^*\}_{r \in \overline{1,n_2}}$, i oznaczmy odnośne cięcia lokalne $\mathbb{V}_2$ jako

$$\phi_r^{(i)} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{V}_2 : x \longmapsto \tau_i^{2\,-1}(x, f_r)\,,$$

po czym zdefiniujmy

$$h_{i\,ar} := f_r^* \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i^2 \circ \Phi \circ \tau_i^{1\,-1}(\cdot, e_a) \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})\,,$$

czyli poprzez formułę

(8) $$\mathbb{L}^2_{h_{i\,ar}(x)}\big(\phi_r^{(i)}(x)\big) := \Phi\big(\varepsilon_a^{(i)}(x)\big)\,.$$

Powyższe dane lokalne morfizmu Φ możemy zapisać w postaci macierzy

$$h_i(x) := h_{i\,ar}(x) \triangleright (e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} f_r)\,, \quad x \in \mathcal{O}_i\,,$$

podobnie reprezentujemy też odwzorowania przejścia:

$$g^1_{ij}(x) = g^1_{ij\,ab}(x) \triangleright (e_a^* \otimes_{\mathbb{K}} e_b)\,, \qquad g^2_{ij}(x) = g^2_{ij\,rs}(x) \triangleright (f_r^* \otimes_{\mathbb{K}} f_s)\,.$$

Przywołując definicję tych ostatnich, ustalamy relację

$$\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)(e_a)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, g^2_{ij}(x) \cdot h_j(x)(e_a)\big)\,,$$

a jednocześnie, wobec $\mathbb{K}$-liniowości τ_i^α oraz Φ, znajdujemy

$$\begin{aligned}
\tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x)(e_a)\big) &= \Phi\big(\tau_j^{1\,-1}(x, e_a)\big) = \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}\big(x, g^1_{ij}(x)(e_a)\big)\big) \\
&= \mathbb{L}^2_{g^1_{ij\,ab}(x)} \circ \Phi\big(\tau_i^{1\,-1}(x, e_b)\big) = \mathbb{L}^2_{g^1_{ij\,ab}(x)} \circ \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(e_b)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x) \cdot g^1_{ij}(x)(e_a)\big)\,.
\end{aligned}$$

Niechaj teraz $(\mathbb{V}_A, B, \mathbb{K}^{\times n_A}, \pi_{\mathbb{V}_A})$, $A \in \{1,2\}$ będą wiązkami wektorowymi o trywializacjach lokalnych $\tau_i^A \;:\; \pi^{-1}_{\mathbb{V}_A}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ i odwzorowaniach przejścia $g^A_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(n_A; \mathbb{K})$. Niech też $h_i \;:\; \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{Mat}(n_1 \times n_2; \mathbb{K})$, $i \in I$ będzie rodziną odwzorowań jak w tezie dowodzonego stwierdzenia, przy użyciu której określamy odwzorowania lokalne

$$\Phi_i \;:\; \pi^{-1}_{\mathbb{V}_1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathbb{V}_2}(\mathcal{O}_i) \;:\; \tau_i^{1\,-1}(x, v) \longmapsto \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(v)\big)\,,$$

które w świetle tożsamości, spełnionej dla dowolnych $x \in \mathcal{O}_{ij}$ i $v \in \mathbb{K}^{\times n_1}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_j\big(\tau_i^{1\,-1}(x, v)\big) &= \Phi_j\big(\tau_j^{1\,-1}\big(x, g^1_{ji}(x)(v)\big)\big) = \tau_j^{2\,-1}\big(x, h_j(x) \cdot g^1_{ji}(x)(v)\big) \\
&= \tau_i^{2\,-1}\big(x, g^2_{ij}(x) \cdot h_j(x) \cdot g^1_{ji}(x)(v)\big) = \tau_i^{2\,-1}\big(x, h_i(x)(v)\big) \\
&= \Phi_i\big(\tau_i^{1\,-1}(x, v)\big)\,,
\end{aligned}$$

jawią się ograniczeniami odwzorowania globalnie gładkiego

$$\Phi \;:\; \mathbb{V}_1 \longrightarrow \mathbb{V}_2\,, \qquad \Phi\restriction_{\pi^{-1}_{\mathbb{V}_1}(\mathcal{O}_i)} = \Phi_i\,.$$

Odwzorowanie to jest w oczywisty sposób $\mathbb{K}$-liniowe i zachowuje włókna. □

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $(\Phi, f) \;:\; (\mathbb{V}_1, B_1, \mathbb{K}^{\times n_1}, \pi_{\mathbb{V}_1}) \longrightarrow (\mathbb{V}_2, B_2, \mathbb{K}^{\times n_2}, \pi_{\mathbb{V}_2})$ będzie morfizmem wiązek wektorowych $\mathbb{V}_A$, $A \in \{1,2\}$ stałego rzędu $\mathrm{rk}\,(\Phi, f) \equiv r \in \mathbb{N}$. Wówczas **jądro morfizmu** (Φ, f)

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) := \bigsqcup_{x \in B_1} \ker\big(\Phi\restriction_{\mathbb{V}_{1\,x}}\big)$$

niesie kanoniczną strukturę podwiązki wektorowej jego dziedziny $\mathbb{V}_1$, przy czym

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,(\Phi, f) = n_1 - r\,.$$

Dowód: Jest oczywistym, że ograniczenie atlasu $\mathbb{V}_1$ do podprzestrzeni topologicznej $\mathrm{Ker}\,(\Phi, f)$ indukuje na niej strukturę (pod)rozmaitości klasy C^∞ (wszak nad każdym punktem bazy mamy do czynienia z podprzestrzenią liniową włókna), przy czym nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ zachodzi – na mocy algebraicznego bilansu wymiarów –

$$\big(\pi_{\mathbb{V}_1}\restriction_{\mathrm{Ker}\,(\Phi, f)}\big)^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{K}^{\times n_1 - r}\,.$$

Pozostaje jedynie skonstruować gładkie trywializacje lokalne tak otrzymanej wiązki (wzajem izomorficznych) przestrzeni wektorowych. Zważywszy lokalny charakter zagadnienia, ograniczymy się do (dostatecznie małych) otoczeń otwartych: $\mathcal{O}_1$ (ustalonego dowolnie) punktu $x_1 \in B_1$ oraz $\mathcal{O}_2 \supset f(\mathcal{O}_1)$ punktu $f(x_1)$, na których określone są dyfeomorfizmy (klasy C^∞)

$$\tau_{\mathcal{O}_A} \ : \ \pi_{\mathbb{V}_A}^{-1}(\mathcal{O}_A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_A \times \mathbb{K}^{\times n_A} , \quad A \in \{1,2\} .$$

W obrazie tychże morfizm (Φ, f) przybiera postać

$$\Phi_{21} \equiv \tau_{\mathcal{O}_2} \circ \Phi \circ \tau_{\mathcal{O}_1}^{-1} \ : \ \mathcal{O}_1 \times \mathbb{K}^{\times n_1} \longrightarrow \mathcal{O}_2 \times \mathbb{K}^{\times n_2} \ : \ (x, v) \longmapsto \big(f(x), L_\Phi(x)(v)\big)$$

dla pewnego gładkiego odwzorowania

$$L_\Phi \ : \ \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathbb{K}(n_2) \ : \ x \longmapsto L_\Phi(x)$$

o rzędzie

$$\operatorname{rk} L_\Phi(x) = r .$$

Dokonajmy rozkładu

$$\mathbb{K}^{\times n_1} = \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 , \qquad \mathbb{K}^{\times n_2} = \operatorname{Image} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 ,$$

określonego dla pewnych przestrzeni dopełniających $\Delta_A \subset \mathbb{K}^{\times n_A}$ o wymiarach

$$\dim_{\mathbb{K}} \Delta_1 = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Image} L_\Phi(x_1) = n_2 - \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2 .$$

Wobec oczywistej relacji

$$\Delta_1 \cong \operatorname{Image} L_\Phi(x_1)$$

możemy następnie skonstruować indeksowaną przez $\mathcal{O}_1 \ni x$ rodzinę odwzorowań $\mathbb{K}$-liniowych

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_\Phi(x) \quad &: \quad \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2 \equiv \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \oplus \Delta_2 \longrightarrow \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \operatorname{Image} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_2 \\ &\qquad\qquad \equiv \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \\ &: \quad (k, \delta_1, \delta_2) \longmapsto (k, 0_{\operatorname{Image} L_\Phi(x_1)}, \delta_2) +_\oplus \big(0, L_\Phi(x)\big)(k, \delta_1) , \end{aligned}$$

o jawnie odwracalnym elemencie

$$\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1) = \mathrm{id}_{\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1)} \oplus L_\Phi(x_1) \restriction_{\Delta_1} \oplus \mathrm{id}_{\Delta_2} .$$

Jako że odwzorowania odwracalne tworzą podzbiór otwarty w $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2})$ (a mianowicie: dopełnienie przeciwobrazu zbioru domkniętego $\{0_{\mathbb{K}}\}$ względem odwzorowania $\det_{(n_1 + \dim_{\mathbb{K}} \Delta_2)}$ będącego superpozycją odwzorowań ciągłych, więc też ciągłego), przeto $\widetilde{\Lambda}_\Phi(x_1)$ należy do tego podzbioru wraz z pewnym swoim otoczeniem otwartym $\mathcal{U}$, którego przeciwobraz względem (ciągłego) odwzorowania $\widetilde{\Lambda}_\Phi$ jest otoczeniem otwartym $\mathcal{V}_1 \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi^{-1}(\mathcal{U}) \ni x_1$ o własności $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{O}_1$. Oto więc obok C^∞-gładkiego odwzorowania

$$\Lambda_\Phi \equiv \widetilde{\Lambda}_\Phi \restriction_{\mathcal{V}_1} \ : \ \mathcal{V}_1 \longrightarrow \operatorname{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2, \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}\big) ,$$

mamy też C^∞-gładkie odwzorowanie

$$V_\Phi \equiv \operatorname{Inv} \circ \Lambda_\Phi \ : \ : \ \mathcal{V}_1 \longrightarrow \operatorname{Iso}_{\mathbb{K}}\big(\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2\big) ,$$

(punktowo) odwrotne do Λ_Φ w każdym $x \in \mathcal{V}_1$. Rozważmy dowolny wektor

$$(k, \delta_1) \in \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \Delta_1 \equiv \mathbb{K}^{\times n_1} .$$

Ustaliwszy $x \in \mathcal{V}_1$, stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} (k, \delta_1) \in \operatorname{Ker} L_\Phi(x) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \Lambda_\Phi(x)(k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = (k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) \\ &\Longleftrightarrow \qquad (k, \delta_1, 0_{\Delta_2}) = V_\Phi(x)(k, 0_{\Delta_1}, 0_{\Delta_2}) . \end{aligned}$$

Wziąwszy pod uwagę włożenia kanoniczne:

$$\jmath_{\operatorname{Ker} L_\Phi(x_1)} \ : \ \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \rightarrowtail \operatorname{Ker} L_\Phi(x_1) \oplus \mathbb{K}^{\times n_2}$$

oraz

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \;:\; \mathbb{K}^{\times n_1} \rightarrowtail \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \Delta_2\,,$$

możemy zatem zapisać

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x)\big) \subseteq V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\,\jmath_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

ale też

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{K}} \jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x)\big) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x) = n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\,L_\Phi(x) \\ = \quad & n_1 - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Image}\,\jmath_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)} \\ \equiv \quad & \dim_{\mathbb{K}} V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\,\jmath_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)}\big)\,, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z odwracalności $V_\Phi(x)$. Widzimy więc, że

$$\jmath_{\mathbb{K}^{\times n_1}}\big(\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x)\big) = V_\Phi(x)\big(\mathrm{Image}\,\jmath_{\mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1)}\big)\,,$$

i na tej podstawie konstatujemy, że odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1}^{-1} \quad &: \quad \mathcal{V}_1 \times \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\Phi_{21}, f\restriction_{\mathcal{O}_1})\restriction_{\mathcal{V}_1} \\ &: \quad (x,k) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_{1,2} \circ V_\Phi(x)(k, 0_{\mathrm{Image}\,L_\Phi(x_1)}, 0_{\Delta_2})\big) \end{aligned}$$

jest (C^∞-)gładką odwrotnością trywializacji lokalnej (także (C^∞-)gładkiej)

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{V}_1} \quad &: \quad \mathrm{Ker}\,(\Phi_{21}, f\restriction_{\mathcal{O}_1})\restriction_{\mathcal{V}_1} \longrightarrow \mathcal{V}_1 \times \mathrm{Ker}\,L_\Phi(x_1) \\ &: \quad (x,v) \longmapsto \big(x, \mathrm{pr}_1 \circ \Lambda_\Phi(x)(v, 0_{\Delta_2})\big)\,. \end{aligned}$$

□

Corollarium 1. Przyjmijmy dotychczasowy zapis, w tym ten ze Stw. 4, i niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą klasy C^∞. Jądro epimorfizmu wiązek wektorowych

$$(\mathsf{T}\pi_E, \pi_E) \;:\; \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}B$$

jest podwiązką wektorową klasy C^∞

$$\big(\mathsf{V}E \equiv \mathrm{Ker}\,(\mathsf{T}\pi_E, \pi_E), E, \mathbb{K}^{\times \dim F}, \pi\big)$$

wiązki stycznej $\mathsf{T}E$. Określamy ją mianem (**pod**)**wiązki pionowej** (lub **wertykalnej**) nad E. Jej włókno $\mathsf{V}_pE \equiv (\mathsf{V}E)_p$ nad $p \in E$, zwane (**pod**)**przestrzenią pionową** (lub **wertykalną**), rozpinają **wektory pionowe** (lub **wertykalne**).

Zadanie domowe 4. Udowodnij corollarium.

3. Geometryzacja konstrukcji bazy przestrzeni wektorowej – krok w nieznane...

Jedną z naturalnych konstrukcji na przestrzeni wektorowej jest wybór bazy $\{e_i\}_{i \in \overline{1,D}}$, $D = \dim_{\mathbb{K}} V$, tj. wybór izomorfizmu

$$V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\times D} \;:\; v = v^i\, e_i \longmapsto (v^1, v^2, \ldots, v^D)\,.$$

Konstrukcja ta ma swój nader istotny odpowiednik w teorii wiązek wektorowych, który teraz omówimy.

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 2 i niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową rzędu $n \in \mathbb{N}^\times$, o trywializacjach lokalnych $\tau_i \;:\; \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n}$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O}_B = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B. **Wiązka reperów** (zwana też **wiązką baz**) **wiązki wektorowej** $\mathbb{V}$ to wiązka włóknista

$$\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}\big)$$

o składowych

- przestrzeń totalna
$$\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} := \bigsqcup_{x\in B} {\rm Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big)$$
o strukturze rozmaitości różniczkowalnej klasy C^∞ indukowanej przez trywializacje $\{\tau_i\}_{i\in I}$ i o włóknie $(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V})_x \equiv {\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ nad dowolnym punktem $x \in B$ będącym zbiorem baz $\beta_x : \mathbb{K}^{\times n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{V}_x$ włókna $\mathbb{V}_x$;
- włókno typowe ${\rm GL}(n;\mathbb{K}) \equiv {\rm Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$;
- rzut na bazę $\pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}} : \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \longrightarrow B : (\beta_x, x) \longmapsto x$.

Przy tym bijekcje $\mathsf{F}\tau_i$ odwrotne do
$$\mathsf{F}\tau_i^{-1} : \mathcal{O}_i \times {\rm GL}(n;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i) : (x,\chi) \longmapsto \big(\tau_i^{-1}\big(x, \chi(\cdot)\big), x\big)$$
indukują na $\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $\mathcal{O}_i \times {\rm GL}(n;\mathbb{K})$ (gdzie topologia na ${\rm GL}(n;\mathbb{K})$ to topologia podprzestrzeni topologicznej przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}^{\times n^2}$), tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{U} \subset \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek
$$\forall_{i\in I} : \mathsf{F}\tau_i\big(\mathcal{U} \cap \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i)\big) \in \mathscr{T}\big(\mathcal{O}_i \times {\rm GL}(n;\mathbb{K})\big)\,.$$
W tej topologii odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i$ są homeomorficznymi trywializacjami lokalnymi o odwzorowaniach przejścia klasy C^∞:
$$\begin{aligned} g_{ij}^{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}} \equiv {\rm Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(\cdot)\big) \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow {\rm End}_{\mathbb{K}}\big({\rm GL}(n;\mathbb{K})\big) \\ &: \quad x \longmapsto {\rm Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)\big)\,, \end{aligned}$$
gdzie
$${\rm Hom}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \tau_{ij}(x)\big) : {\rm GL}(n;\mathbb{K}) \circlearrowleft : \chi \longmapsto g_{ij}(x) \circ \chi\,.$$
Struktura rozmaitości różniczkowej klasy C^∞ jest indukowana wzdłuż homeomorfizmów $\mathsf{F}\tau_i$ ze struktury produktowej na lokalnym modelu $\mathcal{O}_i \times {\rm GL}(n;\mathbb{K})$, trywialnej (klasy C^∞) w drugim czynniku i wyznaczanej przez przecięcie z atlasem $\widehat{\mathscr{A}_B}$ na rozmaitości B w czynniku pierwszym. Względem tak określonej struktury różniczkowalnej trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$ są tautologicznie gładkie klasy C^∞, podobnie jak rzut kanoniczny na bazę, $\pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}} \equiv {\rm pr}_1 \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}$.

Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. W pierwszej kolejności odnotujmy istnienie naturalnego prawego działania – włókno po włóknie – grupy ${\rm GL}(n;\mathbb{K})$ na przestrzeni totalnej $\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$ danego w postaci
$$r : \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \times {\rm GL}(n;\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} : \big((\beta_x, x), \chi\big) \longmapsto (\beta_x \circ \chi, x) \equiv (\beta_x, x) \triangleleft \chi\,.$$
Działanie to jest w jawny sposób wolne (wobec odwracalności elementów włókna ${\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$), a nadto przechodnie nad dowolnym punktem $x \in B$ – wszak dla dowolnej pary $\beta_{x\,1}, \beta_{x\,2} \in {\rm Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big)$ spełniona jest tożsamość
$$\beta_{x\,2} \equiv \beta_{x\,1} \circ \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big)\,,$$
a ponieważ $\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2} \in {\rm End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n})$ jest odwzorowaniem o odwrotności $\beta_{x\,2}^{-1} \circ \beta_{x\,1}$, przeto możemy zapisać
$$(\beta_{x\,2}, x) = (\beta_{x\,1}, x) \triangleleft \big(\beta_{x\,1}^{-1} \circ \beta_{x\,2}\big)\,,$$
konstatując przy tym, że ${\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ jest torsorem grupy ${\rm GL}(n;\mathbb{K})$. Wybór dowolnego elementu $\beta_{x\,*} \in {\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x)$ zadaje *niekanoniczny* (${\rm GL}(n;\mathbb{K})$-ekwiwariantny) izomorfizm
$${\rm Iso}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x\big) \xrightarrow{\cong} {\rm GL}(n;\mathbb{K}) : \beta_x \longmapsto \beta_{x\,*}^{-1} \circ \beta_x\,.$$
Wobec powyższego bez trudu stwierdzamy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ są bijektywne, oto bowiem przyporządkowują w sposób jawnie injektywny elementom zbioru $\{x\} \times {\rm GL}(n;\mathbb{K})$, $x \in \mathcal{O}_i$ elementy zbioru ${\rm Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n}, \mathbb{V}_x) \times \{x\}$. Są więc odwracalne, co pozwala użyć ich do zaindukowania topologii

na $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ według opisanego schematu. Ich identyfikacja jako trywializacji lokalnych zasadza się na bezpośrednim rachunku:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1} \quad &: \quad \mathcal{O}_{ij} \times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \circlearrowleft \\
&: \quad (x,\chi) \longmapsto \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1} \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big) \\
&\qquad = \mathsf{F}\tau_i\big(\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\circ\chi(\cdot)\big),x\big) \equiv \mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\circ\chi(\cdot)\big) \\
&\qquad = \big(x,g_{ij}(x)\circ\chi(\cdot)\big)\,,
\end{aligned}$$

w którym $g_{ij} \in C^\infty(\mathcal{O}_{ij},\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}))$ są odwzorowaniami przejścia wiązki $\mathbb{V}$, a który ukazuje gładki charakter odwzorowań $\mathsf{F}\tau_i \circ \mathsf{F}\tau_j^{-1}$.

Na koniec zauważmy, że odwzorowania $\mathsf{F}\tau_i^{-1}$ (więc także trywializacje lokalne $\mathsf{F}\tau_i$) są ekwiwariantne względem prawostronnego działania grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$: regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim ich dziedziny oraz opisanego powyżej r na przeciwdziedzinie. Istotnie, obliczamy wprost – dla dowolnego elementu $\gamma \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ –

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}\tau_i^{-1} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp_\gamma)(x,\chi) \quad &= \quad \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi\circ\gamma) = \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi\circ\gamma(\cdot)\big),x\big) \\
&\equiv \quad \big(\tau_i^{-1}\big(x,\chi(\cdot)\big),x\big) \triangleleft \gamma \equiv r_\gamma \circ \mathsf{F}\tau_i^{-1}(x,\chi)\,.
\end{aligned}$$

Trywializacje lokalne są zatem zgodne z zaobserwowaną wcześniej strukturą torsora grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ na włóknie wiązki reperów. Następny wykład przyniesie stosowną formalizację poczynionej tu obserwacji.