GR II W CZASACH ZARAZY
3. WYKŁAD ZDALNY

1. Grupy Liego

Ostatni wykład zakończył się wprowadzeniem pojęcia wiązki baz wiązki wektorowej (rzędu n), której włókno typowe niosło strukturę algebraiczną grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$. Ażeby dokonać rzetelnej abstrakcji przeprowadzonego przy tej okazji studium przypadku, która doprowadzi nas do pojęcia wiązki głównej, musimy przyjrzeć się dokładniej grupom o strukturze rozmaitości różniczkowej na nośniku uzgodnionej ze strukturą algebraiczną. Ponieważ zaś ostatecznie przyjdzie nam wykorzystywać także (cartanowski) rachunek różniczkowy na grupach Liego w konstrukcjach motywowanych przez rozważania fizykalne (a grupy i algebry Liego jako takie odgrywają ogromną rolę w nowoczesnej fizyce), przeto dyskusję naszą poprowadzimy istotnie szerzej i głębiej, niż wymagałoby samo przygotowanie pojęciowe do wykładu poświęconego wiązkom głównym.

Zaczniemy od pojęć podstawowych

Definicja 1. **Grupa topologiczna** to grupa

$$\big(\mathrm{G}, m \equiv \cdot, \mathrm{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \longmapsto e\big),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa topologiczna $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G. **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(\mathrm{G}_1, m_1, \mathrm{Inv}_1, \bullet_1 \longmapsto e_1)$ i $(\mathrm{G}_2, m_2, \mathrm{Inv}_2, \bullet_2 \longmapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako grupę, której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞. **Podgrupa Liego** grupy Liego $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ to grupa Liego $(\mathrm{H}, m\restriction_{\mathrm{H}\times\mathrm{H}}, \mathrm{Inv}\restriction_{\mathrm{H}}, \bullet \longmapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G. **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Przykłady 1.
(1) $\mathbb{R}^{\times n}$
(2) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$
(3) $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$
(4) Grupa liniowa główna $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{\times n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym).

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj G będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ i dowolnego otoczenia otwartego $\mathcal{O}_e \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ elementu neutralnego $e \in \mathrm{G}$ istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_g \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ elementu g spełniające warunek

$$m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e\,.$$

Dowód: Odwzorowanie $f \equiv m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ jest ciągłe (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ elementu g o własności $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$. Otwarte otoczenie $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$ spełnia pożądany warunek $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$. $\square$

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $(\mathrm{G}, m, \mathrm{Inv}, \bullet \longmapsto e)$ będzie grupą Liego. Czwórka

$$\big(\mathsf{T}\mathrm{G}, \mathsf{T}m, \mathsf{T}\mathrm{Inv}, (\bullet, 0) \longmapsto 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}} \in \mathsf{T}_e\mathrm{G}\big)$$

jest grupą Liego noszącą miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny $\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} : \mathsf{T}\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ oraz cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}$ są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację

$$\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \circ \mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} = \mathrm{id}_{\mathrm{G}} \,. \tag{1}$$

<u>*Dowód:*</u> Chwila zastanowienia uświadamia nam, że przyporządkowanie rozmaitości gładkiej jej wiązki stycznej ma charakter funktorialny (zrozumienie użytego tu niezwykle ekonomicznego skrótu pojęciowego umożliwia krótkie wprowadzenie do języka teorii kategorii, które załączam w oddzielnym pliku). Funktorialność T zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli struktury gładkiej i odwzorowań) grupy Liego G, ale także jej aksjomatyki – funktorialnym obrazem diagramów przemiennych wyrażających aksjomaty G są analogiczne diagramy dla $\mathsf{T}\mathrm{G}$. Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zacznijmy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych $(g, h) \in \mathrm{G}^{\times 2}$ jest

$$\mathsf{T}_{(g,h)}m \ : \ \mathsf{T}_{(g,h)}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \cong \mathsf{T}_g\mathrm{G} \oplus \mathsf{T}_h\mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{T}_{m(g,h)}\mathrm{G} \,,$$

zatem

$$\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \circ \mathsf{T}m = m \circ (\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \times \pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}) \,,$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości m także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę $\mathsf{T}_{(g,h)}m$. Dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ zdefiniujmy odwzorowania gładkie

$$\ell_g \ : \ \mathrm{G} \circlearrowleft \ : \ h \longmapsto m(g, h) \,, \qquad\qquad \wp_g \ : \ \mathrm{G} \circlearrowleft \ : \ h \longmapsto m(h, g) \,.$$

Wybierzmy lokalne mapy: $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n) \ : \ \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $n = \dim \mathrm{G}$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_g$ punktu g, $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \ldots, y^n) \ : \ \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_h$ punktu h oraz $\kappa_{g\cdot h} \equiv (z^1, z^2, \ldots, z^n) \ : \ \mathcal{O}_{g\cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g\cdot h} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_{g\cdot h}$ punktu $g \cdot h$, a wtedy – dla dowolnych $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \mathsf{T}_g\mathrm{G}$ i $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \mathsf{T}_h\mathrm{G}$ – dostajemy

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{(g,h)}m(V, W) \quad &= \quad V^i \, \tfrac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}\big(\kappa_g(g), \kappa_h(h)\big) \, \tfrac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h) \\ &\quad + W^a \, \tfrac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}\big(\kappa_g(g), \kappa_h(h)\big) \, \tfrac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h) \,. \end{aligned}$$

W wyrażeniach $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}\big(\kappa_g(g), \kappa_h(h)\big)$ i $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}\big(\kappa_g(g), \kappa_h(h)\big)$ rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych $\mathsf{T}_g\wp_h$ i $\mathsf{T}_h\ell_g$, odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

$$\mathsf{T}_{(g,h)}m = \mathsf{T}_g\wp_h \circ \mathrm{pr}_1 + \mathsf{T}_h\ell_g \circ \mathrm{pr}_2 \,. \tag{2}$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned} \mathsf{T}m \circ (\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \times \mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}})(g, h) \quad &= \quad \mathsf{T}_{(g,h)}m(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}, 0_{\mathsf{T}_h\mathrm{G}}) = \mathsf{T}_g\wp_h(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}) + \mathsf{T}_h\ell_g(0_{\mathsf{T}_h\mathrm{G}}) \\ &= \quad 0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}} + 0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}} = 0_{\mathsf{T}_{g\cdot h}\mathrm{G}} \equiv \mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \circ m(g, h) \,, \end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter $\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}$, przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1) jest oczywista. □

Uwaga 1. Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu $\mathsf{T}\mathrm{Inv}$. W tym celu rozważymy tożsamości

$$m \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{Inv}) \circ \Delta = \eta = m \circ (\mathrm{Inv} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}) \circ \Delta \,,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \times \mathrm{G} \;:\; g \longmapsto (g,g)\,, \qquad \eta \;:\; \mathrm{G} \circlearrowleft \;:\; g \longmapsto e\,,$$

a których funktorialnym obrazem względem T jest

$$\mathsf{T}m \circ (\mathrm{id}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \times \mathsf{T}\mathrm{Inv}) \circ \mathsf{T}\Delta = 0 = \mathsf{T}m \circ (\mathsf{T}\mathrm{Inv} \times \mathrm{id}_{\mathsf{T}\mathrm{G}}) \circ \mathsf{T}\Delta\,.$$

Uwzględniając Równ. (2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych $g \in \mathrm{G}$ i $V \in \mathsf{T}_g\mathrm{G}$)

$$\mathsf{T}_g \wp_{g^{-1}}(V) + \mathsf{T}_{g^{-1}}\ell_g \circ \mathsf{T}_g\mathrm{Inv}(V) = 0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}} = \mathsf{T}_{g^{-1}}\wp_g \circ \mathsf{T}_g\mathrm{Inv}(V) + \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}(V)\,,$$

czyli

$$\mathsf{T}_g\mathrm{Inv} = -\mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_g\wp_{g^{-1}} = -\mathsf{T}_e\wp_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\,.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności ℓ_g i $\wp_h$ dla dowolnych $g, h \in \mathrm{G}$.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i zdefiniujmy **działanie dołączone**

$$\mathrm{Ad}_\cdot \;:\; \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; (g,h) \longmapsto m\big(m(g,h), \mathrm{Inv}(g)\big) \equiv \mathrm{Ad}_g(h)\,.$$

Odwzorowanie

$$\mathsf{T}_e\ell_\cdot \;:\; \mathrm{G}\,{}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_\cdot}\!\ltimes \mathsf{T}_e\mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{T}\mathrm{G} \;:\; (g,X) \longmapsto \mathsf{T}_e\ell_g(X)$$

jest izomorfizmem grup Liego.

<u>*Dowód:*</u> Na podstawie Równ. (2) możemy przepisać

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})(g,X) &= \mathsf{T}_{(g,e)}m(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}, X) = \mathsf{T}_g\wp_e(0_{\mathsf{T}_g\mathrm{G}}) + \mathsf{T}_e\ell_g(X) \\ &= \mathsf{T}_e\ell_g(X) \equiv \mathsf{T}_e\ell_\cdot(g,X)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

czyli

$$\mathsf{T}_e\ell_\cdot = \mathsf{T}_{(g,e)}m \circ (\mathbf{0}_{\mathsf{T}\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}})\,,$$

co dowodzi gładkości $\mathsf{T}_e\ell_\cdot$. W połączeniu z obserwacją

$$\big(\mathsf{T}_e\ell_\cdot\big)^{-1} = \big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big)\,,$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym $v \in \mathsf{T}\mathrm{G}$):

$$\begin{aligned} &\big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big) \circ \mathsf{T}_e\ell_\cdot(g,X) \\ = \;&\big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big) \circ \mathsf{T}_e\ell_g(X) = \big(g, \mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_e\ell_g(X)\big) \\ = \;&\big(g, \mathsf{T}_e(\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g)(X)\big) = \big(g, \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}\cdot g}(X)\big) = \big(g, \mathsf{T}_e\ell_e(X)\big) = (g,X)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}_e\ell_\cdot \circ \big(\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}, \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}\ell_{\mathrm{Inv}\circ\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(\cdot)}(\cdot)\big)(v) \\ = \;&\mathsf{T}_e\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)} \circ \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)^{-1}}(v) = \mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}\big(\ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)} \circ \ell_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)^{-1}}\big)(v) \\ = \;&\mathsf{T}_{\pi_{\mathsf{T}\mathrm{G}}(v)}(\ell_e)(v) = v\,, \end{aligned}$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność $\big(\mathsf{T}_e\ell_\cdot\big)^{-1}$ od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych $X, Y \in \mathsf{T}_e\mathrm{G}$ oraz $g, h \in \mathrm{G}$, a w odwołaniu do Równ. (2) –

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}_e\ell.\big((g,X)\,{}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.}\cdot\,(h,Y)\big) = \mathsf{T}_e\ell.\big(g\cdot h, \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y\big) \\
= \quad &\mathsf{T}_e\ell_{g\cdot h}\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y\big) = \mathsf{T}_e(\ell_{g\cdot h\cdot h^{-1}} \circ \wp_h)(X) + \mathsf{T}_h\ell_g \circ \mathsf{T}_e\ell_h(Y) \\
= \quad &\mathsf{T}_e(\wp_h \circ \ell_g)(X) + \mathsf{T}_h\ell_g \circ \mathsf{T}_e\ell_h(Y) = \mathsf{T}_g\wp_h\big(\mathsf{T}_e\ell_g(X)\big) + \mathsf{T}_h\ell_g\big(\mathsf{T}_e\ell_h(Y)\big) \\
\equiv \quad &\mathsf{T}_{(g,h)}m\big(\mathsf{T}_e\ell_g(X), \mathsf{T}_e\ell_h(Y)\big) \equiv \mathsf{T}_{(g,h)}m\big(\mathsf{T}_e\ell.(g,X), \mathsf{T}_e\ell.(h,Y)\big)\,.
\end{aligned}$$

Warto odnotować na marginesie, że $\mathsf{T}_e\ell.$ jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu $\ell.\upharpoonright_{\mathrm{G}\times\{e\}}\ :\ \mathrm{G}\times\{e\} \longrightarrow \mathrm{G}$. □

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Pole wektorowe lewoniezmiennicze** na grupie Liego G to pole wektorowe $\mathcal{V}_L \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ o własności

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \ell_{g\,*}\mathcal{V} = \mathcal{V}\,.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniezmiennicze** na G to pole wektorowe $\mathcal{V}_R \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ o własności

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \wp_{g\,*}\mathcal{V} = \mathcal{V}\,.$$

Stwierdzenie 3. Zbiory

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) \quad &:= \quad \{\ \mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \quad | \quad \mathcal{V} \quad \text{lewoniezmiennicze}\ \}\,, \\
\mathfrak{X}_R(\mathrm{G}) \quad &:= \quad \{\ \mathcal{V} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \quad | \quad \mathcal{V} \quad \text{prawoniezmiennicze}\ \}
\end{aligned}$$

są podprzestrzeniami $\mathbb{R}$-liniowymi w $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$, a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}\big(\mathfrak{X}_H(\mathrm{G}) \times \mathfrak{X}_H(\mathrm{G})\big) \subset \mathfrak{X}_H(\mathrm{G})\,, \quad H \in \{L, R\}\,.$$

Parę

$$\big(\mathfrak{X}_L(\mathrm{G}), [\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}\upharpoonright_{\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})\times\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})}\big)$$

nazywamy **algebrą pól lewoniezmienniczych na** G, a parę

$$\big(\mathfrak{X}_R(\mathrm{G}), [\cdot,\cdot]_{\mathrm{G}}\upharpoonright_{\mathfrak{X}_R(\mathrm{G})\times\mathfrak{X}_R(\mathrm{G})}\big)$$

algebrą pól prawoniezmienniczych na G.

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z $\mathbb{R}$-liniowości warunku lewoniezmienniczości (wzgl. prawoniezmienniczości), a druga – z prostego rachunku (przeprowadzonego dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ i dowolnych pól lewoniezmienniczych $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$):

$$\ell_{g\,*}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}} = [\ell_{g\,*}\mathcal{V}_1, \ell_{g\,*}\mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}} = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{\mathrm{G}}\,.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawoniezmienniczości komutatora dowolnej pary pól prawoniezmienniczych. □

Definicja 3. **Algebra Liego** nad ciałem $\mathbb{K}$ to kolekcja $\big(\big((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_V), \ell_V\big), [\cdot,\cdot]_V\big)$ złożona z przestrzeni $\mathbb{K}$-liniowej $\big((V, +_V, P_V, \bullet \longmapsto \mathbf{0}_V), \ell_V\big)$ oraz odwzorowania dwu-$\mathbb{K}$-liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot,\cdot]_V\ :\ V \times V \longrightarrow V\ :\ (v, w) \longmapsto [v, w]_V = -[w, v]_V\,,$$

zwanego **nawiasem Liego na** V, którego **jakobiator**

$$\mathrm{Jac}_V \quad : \quad V \times V \times V \longrightarrow V$$

$$:\quad (X_1,X_2,X_3)\longmapsto [[X_1,X_2]_V,X_3]_V+[[X_3,X_1]_V,X_2]_V+[[X_2,X_3]_V,X_1]_V$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

Podalgebrą Liego algebry Liego $\big(((V,+_V,P_V,\bullet\longmapsto \mathbf{0}_V),\ell_V\big),[\cdot,\cdot]_V\big)$ nazwiemy algebrę Liego $\big(((W,+_V\restriction_{W\times W},P_V\restriction_W,\bullet\longmapsto \mathbf{0}_V),\ell_V\restriction_{\mathbb{K}\times W}\big),[\cdot,\cdot]_V\restriction_{W\times W}\big)$ o nośniku $W\subseteq V$ będącym podprzestrzenią $\mathbb{K}$-liniową V.

Homomorfizm algebr Liego między algebrami Liego $\big(((V_\alpha,+_\alpha,P_\alpha,\bullet\longmapsto \mathbf{0}_\alpha),\ell_\alpha\big),[\cdot,\cdot]_\alpha\big)$, $\alpha\in\{1,2\}$ to odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1,V_2)$ o własności

$$[\cdot,\cdot]_2\circ(\chi\times\chi)=\chi\circ[\cdot,\cdot]_1\,.$$

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 3. Odwzorowanie

$$\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\ :\ \mathfrak{X}_R(\mathrm{G})\xrightarrow{\cong}\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})\ :\ \mathcal{V}\longmapsto \mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewoniezmienniczych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych ($\mathrm{Der}_e\,C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})$ jest przestrzenią różniczkowań algebry funkcji klasy C^1 w e)

$$H.\ :\ \mathfrak{g}\equiv\mathrm{Der}_e\,C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})\xrightarrow{\cong}\mathfrak{X}_H(\mathrm{G})\,,\qquad H\in\{L,R\}\,,$$

o własności

$$L.\circ(R.)^{-1}\equiv\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\,.\tag{5}$$

Indukują one na przestrzeni $\mathfrak{g}\cong\mathsf{T}_e\mathrm{G}$ nawias Liego

$$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\ :\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}\ :\ (X_1,X_2)\longmapsto[L_{X_1},L_{X_2}]_{\mathrm{G}}(e)\,.$$

Algebra Liego

$$\big(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}\big)\equiv\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$$

(w której zapisie $\mathfrak{g}$ jest traktowana jako przestrzeń $\mathbb{R}$-liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego** G.

Dowód: Dla dowolnego pola prawoniezmienniczego $\mathcal{V}\in\mathfrak{X}_R(\mathrm{G})$ sprawdzamy lewoniezmienniczość jego obrazu względem (jawnie $\mathbb{R}$-liniowego i odwracalnego) $\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.$ w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych $g,h\in\mathrm{G}$ z uwzględnieniem prawoniezmienniczości $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}&\ell_{g\,*}\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big)(h)=\mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)}\ell_g\Big(\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big(\ell_{g^{-1}}(h)\big)\Big)\\ =\ &\mathsf{T}_{g^{-1}h}\ell_g\Big(\mathsf{T}_{g^{-1}h}\mathrm{Ad}_{g^{-1}h}\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big)\Big)=\mathsf{T}_{g^{-1}h}\big(\ell_h\circ\wp_{h^{-1}g}\big)\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big)\\ =\ &\mathsf{T}_e\ell_h\circ\mathsf{T}_{g^{-1}h}\wp_{h^{-1}g}\big(\mathcal{V}(g^{-1}h)\big)=\mathsf{T}_e\ell_h\big(\mathcal{V}(e)\big)\equiv\mathsf{T}_e\ell_h\circ\mathsf{T}_h\wp_{h^{-1}}\big(\mathcal{V}(h)\big)\\ \equiv\ &\big(\mathsf{T}.\mathrm{Ad}.\big(\mathcal{V}(\cdot)\big)\big)(h)\,.\end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu $L.$ zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniezmiennicze $\mathcal{V}\in\mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$ spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g)=(\ell_{g\,*}\mathcal{V})(g)\equiv\mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(g)}\ell_g\big(\mathcal{V}\circ\ell_{g^{-1}}(g)\big)=\mathsf{T}_e\ell_g\big(\mathcal{V}(e)\big)\equiv\mathcal{V}(e)\circ\ell_g^*\,,$$

gdzie ℓ_g^*, $g\in\mathrm{G}$ jest cofnięciem (funkcji). Jako że $\mathcal{V}(e)\in\mathfrak{g}$, powyższa obserwacja podpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie $\mathbb{R}$-liniowe,

$$L.\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{X}(\mathrm{G})\ :\ X\longmapsto X\circ\ell_\cdot^*\equiv L_X\,,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniezmienniczość pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned}\ell_{g\,*}L_X\ &=\ \mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\ell_g\big(L_X\circ\ell_{g^{-1}}(\cdot)\big)\equiv\big(L_X\circ\ell_{g^{-1}}(\cdot)\big)\circ\ell_g^*\equiv X\circ\ell^*_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\circ\ell_g^*\\ &=\ X\circ\big(\ell_g\circ\ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}\big)^*=X\circ\ell^*_{g\cdot\ell_{g^{-1}}(\cdot)}=X\circ\ell_\cdot^*\equiv L_X\,,\qquad g\in\mathrm{G}\,.\end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność $L.$ w postaci, także jawnie $\mathbb{R}$-liniowej,

$$\mathrm{ev}_e \;:\; \mathfrak{X}_L(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathfrak{g} \;:\; \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}(e)\,,$$

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \mathrm{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell_\cdot^* \equiv L_{\mathrm{ev}_e(\mathcal{V})}\,.$$

Z drugiej strony obliczamy

$$\mathrm{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X\,,$$

więc w istocie

$$\mathrm{ev}_e = (L.)^{-1}\,.$$

Zastąpiwszy w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne $\ell.$ jego prawym odpowiednikiem $\wp.$, możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawoniezmienniczych, co daje nam izomorfizm

$$R. \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_R(\mathrm{G}) \;:\; X \longmapsto X \circ \wp_\cdot^* \equiv R_X\,,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R.)^{-1} = \mathrm{ev}_e\,.$$

Tożsamość (5) jest w oczywisty sposób spełniona. Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu-$\mathbb{R}$-liniowego odwzorowania $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}$ znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość

$$L_{[X_1,X_2]_\mathfrak{g}} \equiv L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_1},L_{X_2}]_\mathrm{G})} = [L_{X_1},L_{X_2}]_\mathrm{G}\,.$$

Oto więc wyznaczamy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Jac}_\mathfrak{g}(X_1,X_2,X_3)\\
=\;& [L_{[X_1,X_2]_\mathfrak{g}},L_{X_3}]_\mathrm{G}(e) + [L_{[X_3,X_1]_\mathfrak{g}},L_{X_2}]_\mathrm{G}(e) + [L_{[X_2,X_3]_\mathfrak{g}},L_{X_1}]_\mathrm{G}(e)\\
=\;& [[L_{X_1},L_{X_2}]_\mathrm{G},L_{X_3}]_\mathrm{G}(e) + [[L_{X_3},L_{X_1}]_\mathrm{G},L_{X_2}]_\mathrm{G}(e) + [[L_{X_2},L_{X_3}]_\mathrm{G},L_{X_1}]_\mathrm{G}(e)\\
\equiv\;& \mathrm{Jac}_\mathrm{G}(L_{X_1},L_{X_2},L_{X_3})(e) = 0_\mathfrak{g}\,,
\end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu, przy czym założymy dodatkowo, że $N := \dim \mathrm{G} < \infty$. Wybierzmy w przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ dowolną bazę $\mathcal{T} := \{t_A\}_{A\in\overline{1,N}}$, a wówczas **stałe struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ w bazie $\mathcal{T}$ to liczby $f_{ABC} = -f_{BAC} \in \mathbb{R}$, $A,B,C \in \overline{1,N}$ zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$

$$[t_A,t_B] = f_{ABC} \triangleright t_C\,, \quad A,B \in \overline{1,N}\,.$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ spełniają one tożsamościowo dwuliniowe relacje

$$f_{ABD}\,f_{DCE} + f_{CAD}\,f_{DBE} + f_{BCD}\,f_{DAE} = 0\,, \quad A,B,C,E \in \overline{1,N}\,,$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury** $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$. Elementy bazy $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$ będącej $L.$- wzgl. $R.$-obrazem bazy $\mathcal{T}$ będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot) \equiv \mathsf{T}_e\ell.(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot) \equiv \mathsf{T}_e\wp.(t_A)\,.$$

Twierdzenie 1 (Funktorialność Lie)**.** Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 4. Przyporządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora

$$\mathrm{Lie}\ :\ \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}\,.$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned}\mathrm{Lie} \quad &: \quad \mathrm{Mor}\,\mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} \\ &: \quad \big(\ \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\chi} \mathrm{G}_2\ \big) \longmapsto \big(\ \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_1 \xrightarrow{\mathsf{T}_{e_1}\chi} \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_2\ \big)\,.\end{aligned}$$

Dowód: Odwzorowanie $\mathsf{T}_{e_1}\chi$ jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu $g_1 \in \mathrm{G}$:

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}\,.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji $f \in C^1(\mathrm{G}_2;\mathbb{R})$ oraz wektora $X \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{g_1}\chi\big(L_X(g_1)\big)(f) \quad &\equiv \quad L_X(g_1) \circ \chi^*(f) \equiv X \circ \ell_{g_1}^* \circ \chi^*(f) = X \circ (\chi \circ \ell_{g_1})^*(f) \\ &= \quad X \circ (\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi)^*(f) = (X \circ \chi^*) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \\ &\equiv \quad \mathsf{T}_{e_1}\chi(X) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \equiv L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)}\big(\chi(g_1)\big)(f)\,,\end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że

$$\mathsf{T}_{\cdot}\chi\big(L_X(\cdot)\big) = L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)}\big(\chi(\cdot)\big)\,,$$

a zatem dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned}[\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1), \mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)]_{\mathfrak{g}_2} \quad &\equiv \quad [L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{\mathrm{G}_2}(e_2) = [L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\mathsf{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{\mathrm{G}_2} \circ \chi(e_1) \\ &= \quad \mathsf{T}_{e_1}\chi\big([L_{X_1}, L_{X_2}]_{\mathrm{G}_1}(e_1)\big) \equiv \mathsf{T}_{e_1}\chi\big([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}\big)\,.\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 5. Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne.

Dowód: Rozważmy gładką krzywą całkową $\gamma\ :\ ]a,b[\longrightarrow \mathrm{G}$ przez $\gamma(t_0) = g_0 \in \mathrm{G}$ w $t_0 \in]a,b[$ pola lewoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(\mathrm{G})$, tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\mathsf{D}\gamma(t) = \mathcal{V}\big(\gamma(t)\big)\,, \quad t \in]a,b[\,, \qquad\qquad \gamma(t_0) = g_0\,.$$

Wybierzmy (dowolnie) czasy pośrednie t_1, t_2 spełniające warunki $a < t_1 < t_2 < b$ i oznaczmy $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$. Krzywą γ będziemy teraz dowolnie przedłużać wykorzystując przechodniość działania lewego regularnego na G, która pozwala nam wskazać $g_{21} := \gamma(t_2) \cdot \gamma(t_1)^{-1}$. Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t}\ :\ ]a + \Delta t, b + \Delta t[\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ t \longmapsto \ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t)\,.$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\mathsf{D}\gamma_{\Delta t}(t) = \mathsf{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathsf{D}\gamma(t - \Delta t)\,, \quad t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[\,, \qquad\qquad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2)\,,$$

a ponieważ $t - \Delta t \in]a,b[$ dla dowolnego czasu $t \in]a+\Delta t, b+\Delta t[$, przeto – wobec lewoniezmienniczości pola $\mathcal{V}$ –

$$\mathsf{D}\gamma_{\Delta t}(t) = \mathsf{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathcal{V}\big(\gamma(t - \Delta t)\big) = \mathcal{V}\big(\ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t)\big) \equiv \mathcal{V}\big(\gamma_{\Delta t}(t)\big)\,.$$

Widzimy więc, że także $\gamma_{\mathsf{D}t}$ jest gładką krzywą całkową pola $\mathcal{V}$, stąd też – na mocy Twierdzenia o Jednoznaczności Rozwiązania Zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności – na niepustym przedziale $\Delta I :=]a + \Delta t, b[\ni t_2$ zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t}\restriction_{\Delta I} = \gamma\restriction_{\Delta I}$$

i otrzymujemy gładkie przedłużenie $\widetilde{\gamma}$ krzywej γ do $]a, b+\Delta t[$ w postaci

$$\widetilde{\gamma}\ :\ ]a, b+\Delta t[\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t \in]a,b[\\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t \in]a+\Delta t, b+\Delta t[\end{cases} .$$

Dokonując iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału $]a,\infty[$. Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do $]-\infty, b[$, ostatecznie więc stwierdzamy, że γ przedłuża się gładko do $\mathbb{R}$, co wobec dowolności g_0 (wszak pole $\mathcal{V}$ jest określone na całej rozmaitości G) daje nam postulowaną tezę dla pól lewoniezmienniczych. Dowód w przypadku pól prawoniezmienniczych przebiega w pełni analogicznie. $\square$

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $X \in \mathfrak{g}$. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego G stowarzyszone z polami: lewoniezmienniczym L_X,

$$\mathcal{L}^X_{\cdot_1}(\cdot_2) \equiv \Phi_{L_X}(\cdot_1,\cdot_2)\ :\ \mathbb{R}\times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (t,g) \longmapsto \Phi_{L_X}(t,g) \equiv \mathcal{L}^X_t(g)\,,$$

oraz prawoniezmienniczym R_X,

$$\mathcal{R}^X_{\cdot_1}(\cdot_2) \equiv \Phi_{R_X}(\cdot_1,\cdot_2)\ :\ \mathbb{R}\times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (t,g) \longmapsto \Phi_{R_X}(t,g) \equiv \mathcal{R}^X_t(g)\,,$$

przyjmują postać, odpowiednio,

$$\mathcal{L}^X_t = \wp_{\mathcal{L}^X_t(e)}\,, \qquad \mathcal{R}^X_t = \ell_{\mathcal{R}^X_t(e)}\,. \tag{6}$$

<u>*Dowód:*</u> To, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawoniezmienniczych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów G, wynika wprost z wiedzy zgromadzonej w trakcie I semestru. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (6). Obliczamy, dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$,

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathcal{L}^X_t(g) = L_X(g) = \mathsf{T}_e\ell_g\big(L_X(e)\big) \equiv \mathsf{T}_e\ell_g\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathcal{L}^X_t(e)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\ell_g\circ\mathcal{L}^X_t(e)\,,$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z Reguły Łańcuchowej dla pochodnej funkcji złożonej. Ścieżki $\mathcal{L}^X_\cdot(g)$ i $\ell_g\circ\mathcal{L}^X_\cdot(e)$, przecinające się w chwili $t=0$,

$$\ell_g\circ\mathcal{L}^X_0(e) = \ell_g(e) = g\cdot e = g \equiv \mathcal{L}^X_0(g)\,,$$

są zatem współstyczne w tejże chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewoniezmienniczego L_X w g. Obie też są krzywymi całkowymi pola L_X, oto bowiem dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$ zachodzi – wprost z definicji –

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathcal{L}^X_t(g) = L_X\circ\mathcal{L}^X_t(g)\,,$$

a także – wobec lewoniezmienniczości L_X –

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\ell_g\circ\mathcal{L}^X_t(e) = \mathsf{T}_{\mathcal{L}^X_t(e)}\ell_g\big(L_X\circ\mathcal{L}^X_t(e)\big) = L_X\circ\ell_g\circ\mathcal{L}^X_t(e)\,.$$

Na mocy Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (6). $\square$

W dalszej części zajmiemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami $\mathcal{L}^X_\cdot(e)$ oraz $\mathcal{R}^X_\cdot(e)$.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 6. Gładkie ścieżki

$$\lambda_X \equiv \mathcal{L}^X_\cdot(e)\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{G}\,, \qquad \rho_X \equiv \mathcal{R}^X_\cdot(e)\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{G}$$

spełniają tożsamości

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \big(\ \lambda_{t\triangleright X}(1) = \lambda_X(t) \quad\wedge\quad \rho_{t\triangleright X}(1) = \rho_X(t)\ \big)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> W świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego krzywa λ_X jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0) = e \qquad\wedge\qquad \forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(t) = L_X\circ\lambda_X(t) \equiv \mathsf{T}_e\ell_{\lambda_X(t)}(X)\,.$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \mathsf{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(X) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}(st)} \lambda_X(st) = \tfrac{1}{s} \cdot \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \lambda_X(st)\,,$$

czyli też równoważną jej (wobec $\mathbb{R}$-liniowości $\mathsf{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}$)

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \lambda_X(st) = \mathsf{T}_e \ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X)\,,$$

Zdefiniujmy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G} \; : \; t \longmapsto \lambda_X(st)\,, \quad s \in \mathbb{R}\,,$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \gamma_s(t) = \mathsf{T}_e \ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X)\,,$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) \equiv \lambda_X(0) = e\,,$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall_{s\in\mathbb{R}} \; : \; \gamma_s = \lambda_{s\triangleright X}\,,$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s\triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st)\,,$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s\triangleright X}(1) = \lambda_X(s)\,.$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawoniezmiennicze przebiega w pełni analogicznie. □

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Gładkie ścieżki λ_X i ρ_X są homomorfizmami addytywnej grupy Liego $\mathbb{R}$ (z naturalną strukturą różniczkową) w G, spełniającymi warunek początkowy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \lambda_X(t) = X = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \rho_X(t)\,.$$

I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego

$$\chi \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{G}$$

spełniający warunek początkowy

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \chi(t) = X \in \mathfrak{g} \tag{7}$$

jest postaci

$$\lambda_X = \chi = \rho_X\,.$$

W szczególności więc ścieżki λ_X i ρ_X są tożsame.

<u>*Dowód:*</u> Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$, jest warunek homomorfizmu

$$\forall_{s,t\in\mathbb{R}} \; : \; \gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t)\,.$$

Zaczniemy od $\gamma = \lambda_X$. Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek λ_X i $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s + \cdot)$ przy ustalonym (dowolnie) s. W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki γ oraz z lewoniezmienniczości L_X –

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \gamma_s(t) &= \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \lambda_X(t+s) \big) \equiv \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}(s+t)} \lambda_X(s+t) \big) \\
&= \mathsf{T}_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \big(L_X \circ \lambda_X(s+t) \big) = L_X \circ \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+t) \\
&\equiv L_X \circ \gamma_s(t)\,,
\end{aligned}$$

skąd wniosek, że ścieżka γ_s jest krzywą całkową pola L_X tak jak λ_X, a nadto

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\gamma_s(t) = L_X \circ \gamma_s(0) = L_X(e) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\gamma(t)$$

i

$$\gamma_s(0) = e = \gamma(0)\,,$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku $\gamma = \rho_X$ powtarzamy rozumowanie dla $\widetilde{\gamma}_s := \wp_{\rho_X(s)^{-1}} \circ \rho_X(s+\cdot)$.

Niechaj teraz χ będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (7). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność χ,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\chi(s) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi}\restriction_{\xi=s}\chi(\xi) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(s+t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\ell_{\chi(s)}\circ\chi(t)\\
&= \mathsf{T}_{\chi(0)}\ell_{\chi(s)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)\big) = \mathsf{T}_e\ell_{\chi(s)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)\big)\\
&\equiv L_{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)}\circ\chi(s)\,,
\end{aligned}$$

stwierdzamy, że χ jest krzywą całkową przez $e = \chi(0)$ (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności χ) lewoniezmienniczego pola wektorowego będącego obrazem wektora $\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\chi(t)$ względem izomorfizmu $L.$ ze Stw. 4. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\chi(t) &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\xi}\restriction_{\xi=t}\chi(\xi) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\chi(s+t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\wp_{\chi(t)}\circ\chi(s)\\
&= \mathsf{T}_{\chi(0)}\wp_{\chi(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\chi(s)\big) = \mathsf{T}_e\wp_{\chi(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{s=0}\chi(s)\big)\\
&\equiv R_{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\chi(s)}\circ\chi(t)\,,
\end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy. □

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Odwzorowanie

$$\lambda.\ :\ \mathfrak{g}\times\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (X,t)\longmapsto\lambda_X(t)$$

jest gładkie.

<u>*Dowód:*</u> Gładkość zależności $\lambda.$ od drugiego argumentu wynika wprost z Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, oto bowiem dla ustalonego X ścieżka λ_X jest krzywą całkową gładkiego pola L_X. Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności $\lambda.$ od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy λ_X jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na $\mathfrak{g}\times\mathrm{G}$ o danych początkowych (X,e), co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Twierdzenia. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać $\mathrm{Der}_e\,C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})$ z $\mathsf{T}_e\mathrm{G}$. Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\ &:\ \mathfrak{g}\times\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{T}(\mathfrak{g}\times\mathrm{G})\\
&:\ (X,g)\longmapsto\big(0_{\mathfrak{g}},\mathsf{T}_e\ell_g(X)\big)\equiv\big(0_{\mathfrak{g}},L_X(g)\big)\in\mathfrak{g}\oplus\mathsf{T}_e\ell_g(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\oplus\mathsf{T}_g\mathrm{G}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\equiv\mathsf{T}_{(X,g)}(\mathfrak{g}\times\mathrm{G})\,.
\end{aligned}$$

Jego potok $\Phi_{\mathcal{V}}$ spełnia równanie

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;t_0,(X_0,g_0)\big)=\mathcal{V}\big(\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;t_0,(X_0,g_0)\big)\big)\,,$$

w którego zapisie (X_0,g_0) jest warunkiem początkowym (w czasie t_0),

$$\Phi_{\mathcal{V}}\big(t_0;t_0,(X_0,g_0)\big)=(X_0,g_0)\,.$$

Ustalmy warunek początkowy $(X_0, g_0) := (X, e)$ dla $t_0 := 0$. Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na G), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\mathrm{pr}_2\circ\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;0,(X,e)\big) &= \mathrm{pr}_2\circ\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;0,(X,e)\big) = \mathrm{pr}_2\circ\mathcal{V}\big(\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;0,(X,e)\big)\big)\\ &= L_{\mathrm{pr}_1\circ\Phi_{\mathcal{V}}(t;0,(X,e))}\big(\mathrm{pr}_2\circ\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;0,(X,e)\big)\big)\\ &= L_X\big(\mathrm{pr}_2\circ\Phi_{\mathcal{V}}\big(t;0,(X,e)\big)\big)\,,\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji $\mathcal{V}$ (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola $\mathcal{V}$). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować $\mathrm{pr}_2\circ\Phi_{\mathcal{V}}(\cdot;0,(X,e))$ jako (jedyną) krzywą całkową pola L_X wychodzącą z punktu $g_0 = e$, czyli

$$\mathrm{pr}_2\circ\Phi_{\mathcal{V}}(\cdot;0,(X,e)) = \lambda_X(\cdot)\,,$$

co stanowi właśnie zapowiedzianą wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola L_X. □

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw. 9. Odwzorowanie

$$\exp\equiv\exp^{\mathrm{G}} := \lambda_{\cdot}(1)\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathrm{G}$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na** G.

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 5. Istnieją otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{g}$ oraz $\mathcal{O}_e$ elementu e w G takie, że odwzorowanie $\exp\restriction_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$ jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ na $\mathcal{O}_e$.

<u>*Dowód:*</u> Obliczymy odwzorowanie styczne do exp w $0_{\mathfrak{g}}$ na dowolym wektorze $X\in\mathfrak{g}\equiv\mathsf{T}_{0_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}$, odwołując się po drodze do Stw. 7. Znajdujemy

$$\mathsf{T}_{0_{\mathfrak{g}}}\exp(X) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp(0_{\mathfrak{g}}+t\triangleright X)\equiv\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_{t\triangleright X}(1) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_X(t) = X\,,$$

czyli

$$\mathsf{T}_{0_{\mathfrak{g}}}\exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\,.$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika teraz wprost z Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. □

Stwierdzenie 11 (Naturalność odwzorowania eksponencjalnego)**.** Przyjmijmy zapis Def. 5 oraz Tw. 1 i niechaj $\chi\ :\ \mathrm{G}_1\longrightarrow\mathrm{G}_2$ będzie homomorfizmem grup Liego między grupami Liego G_α, $\alpha\in\{1,2\}$. Poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_1 \arrow[r, "\mathrm{Lie}\,\chi"] \arrow[d, "\exp^{\mathrm{G}_1}"'] & \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}_2 \arrow[d, "\exp^{\mathrm{G}_2}"] \\ \mathrm{G}_1 \arrow[r, "\chi"'] & \mathrm{G}_2\end{tikzcd}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy ścieżkę gładką

$$\gamma := \chi\circ\lambda_X\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathrm{G}_2$$

przez

$$\gamma(0)\equiv\chi\circ\lambda_X(0) = \chi(e_1) = e_2\,.$$

Na podstawie bezpośredniego rachunku (wykorzystującego definicję ścieżki λ_X oraz lewoniezmienniczość L_X, jak również Regułę Łańcuchową)

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\gamma(t) = \mathsf{T}_{\lambda_X(t)}\chi\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\lambda_X(t)\big) = \mathsf{T}_{\lambda_X(t)}\chi\big(L_X\circ\lambda_X(t)\big) = \mathsf{T}_{\lambda_X(t)}\chi\circ\mathsf{T}_{e_1}\ell^1_{\lambda_X(t)}(X)$$

$$= \mathsf{T}_{e_1}\big(\chi \circ \ell^1_{\lambda_X(t)}\big)(X) = \mathsf{T}_{e_1}\big(\ell^1_{\chi\circ\lambda_X(t)} \circ \chi\big)(X) = \mathsf{T}_{\chi(e_1)}\ell^1_{\chi\circ\lambda_X(t)}\big(\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)\big)$$

$$= \mathsf{T}_{e_2}\ell^1_{\chi\circ\lambda_X(t)}\big(\mathsf{T}_{e_1}\chi(X)\big) \equiv \mathsf{T}_{e_2}\ell^1_{\gamma(t)}\big(\mathrm{Lie}\,\chi(X)\big) \equiv L_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)} \circ \gamma(t)$$

i wreszcie

$$\gamma(0) = e_2 \equiv \lambda_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)}(0)\,,$$

konstatujemy na gruncie Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, że dla γ jest spełniona tożsamość

$$\chi \circ \lambda_X \equiv \gamma = \lambda_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)}\,,$$

co w chwili $t = 1$ daje pożądaną równość

$$\chi \circ \exp^{\mathrm{G}_1}(X) \equiv \chi \circ \lambda_X(1) = \lambda_{\mathrm{Lie}\,\chi(X)}(1) \equiv \exp^{\mathrm{G}_2} \circ \mathrm{Lie}\,\chi(X)\,.$$

□

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niech $\big((\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.)_A^{\ \ B}\big)_{A,B\in\overline{1,\dim\mathrm{G}}}$ o będzie macierzą o wartościach w $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$ określoną równaniami

$$\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.(t_A) =: \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.\big)_A^{\ \ B} \triangleright t_B\,, \quad A \in \overline{1,\dim\mathrm{G}}\,.$$

Pola wektorowe L_A i R_A, $A \in \overline{1,\dim\mathrm{G}}$ spełniają relacje (zapisane dla dowolnych $A, B \in \overline{1,\dim\mathrm{G}}$)

$$[L_A, L_B] = f_{ABC} \triangleright L_C\,, \qquad [R_A, R_B] = -f_{ABC} \triangleright R_C\,, \qquad [L_A, R_B] = 0\,.$$

Ponadto prawdziwe są tożsamości:

$$L_A(\cdot) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.\big)_A^{\ \ B} \triangleright R_B(\cdot) \tag{8}$$

oraz

$$\mathrm{Inv}_* L_A = -R_A\,, \qquad \mathrm{Inv}_* R_A = -L_A\,,$$

a także – dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ –

$$\wp_{g\,*} L_A = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ \ B} \triangleright L_B\,, \qquad \ell_{g\,*} R_A = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ \ B} \triangleright R_B$$

Dowód: Pierwsza równość wynika wprost z definicji komutatora w $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$, oto bowiem wobec lewoniezmienniczości komutatora pól lewoniezmienniczych zachodzi

$$f_{ABC}\, L_C(\cdot) = f_{ABC}\,\mathsf{T}_e\ell.\big(L_C(e)\big) \equiv f_{ABC}\,\mathsf{T}_e\ell.(t_C) = \mathsf{T}_e\ell.\big([t_A, t_B]\big)$$

$$\equiv \mathsf{T}_e\ell.\big([L_A, L_B](e)\big) = [L_A, L_B](\cdot)\,.$$

Komutator bazowego pola lewoniezmienniczego z takimż polem prawoniezmienniczym obliczamy na dowolnej funkcji $f \in C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})$ w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$, korzystając przy tym ze Stw. 6,

$$[L_A, R_B](f)(g) \equiv L_A\big(R_B(f)\big)(g) - R_B\big(L_A(f)\big)(g)$$

$$\equiv L_A\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\big)(g) - R_B\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\big)(g)$$

$$\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\big) \circ \mathcal{L}_s^{t_A}(g) - \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\big) \circ \mathcal{R}_t^{t_B}(g)$$

$$= \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0} \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} f\big(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot \big(g \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e)\big)\big) - \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\restriction_{s=0} f\big(\big(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot g\big) \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e)\big)$$

$$= 0\,.$$

Wreszcie też wyznaczamy wprost, w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$,

$$L_A(g) = \mathsf{T}_e\ell_g\big(L_A(e)\big) \equiv \mathsf{T}_e\ell_g(t_A) = \mathsf{T}_e\wp_g \circ \mathsf{T}_g\wp_{g^{-1}} \circ \mathsf{T}_e\ell_g(t_A)$$

$$= \mathsf{T}_e\wp_g \circ \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(t_A) \equiv \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ B} \triangleright \mathsf{T}_e\wp_g(t_B)$$
$$\equiv \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ B} \triangleright \mathsf{T}_e\wp_g\big(R_B(e)\big) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ B} \triangleright R_B(g)\,.$$

Jest też – w świetle Uwagi 1, a dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$ –

$$\mathrm{Inv}_* L_A(g) \equiv \mathsf{T}_{g^{-1}}\mathrm{Inv}\big(L_A(g^{-1})\big) = \mathsf{T}_{g^{-1}}\mathrm{Inv} \circ \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}(t_A)$$
$$= -\mathsf{T}_e\wp_g \circ \mathsf{T}_{g^{-1}}\ell_g \circ \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}(t_A) = -\mathsf{T}_e\wp_g(t_A) \equiv -R_A(g)\,,$$

a stąd już wprost wynika

$$\mathrm{Inv}_* R_A = -\mathrm{Inv}_* \circ \mathrm{Inv}_* L_A = -(\mathrm{Inv} \circ \mathrm{Inv})_* L_A = -L_A\,.$$

Pierwsza z tych tożsamości pozwala łatwo udowodnić drugą równość wypisaną w tezie stwierdzenia w odwołaniu do podstawowej własności komutatora pól wektorowych, jaką jest jego niezmienniczość względem pchnięć, oraz zweryfikowanej wcześniej równości pierwszej,

$$-f_{ABC}\, R_C = f_{ABC}\, \mathrm{Inv}_* L_C = \mathrm{Inv}_*\big([L_A, L_B]\big) = [\mathrm{Inv}_* L_A, \mathrm{Inv}_* L_B] \equiv [R_A, R_B]\,.$$

Sprawdzamy także – dla dowolnego $h \in \mathrm{G}$ –

$$(\wp_{g\,*} L_A)(h) \equiv \mathsf{T}_{\wp_{g^{-1}}(h)}\wp_g\big(L_A \circ \wp_{g^{-1}}(h)\big) = \mathsf{T}_{hg^{-1}}\wp_g \circ \mathsf{T}_e\ell_{hg^{-1}}(t_A)$$
$$= \mathsf{T}_e\ell_h \circ \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ B} \triangleright \mathsf{T}_e\ell_h(t_B)$$
$$= \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ B} \triangleright L_B(h)$$

i

$$(\ell_{g\,*} R_A)(h) \equiv \mathsf{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)}\ell_g\big(R_A \circ \ell_{g^{-1}}(h)\big) = \mathsf{T}_{g^{-1}h}\ell_g \circ \mathsf{T}_e\wp_{g^{-1}h}(t_A)$$
$$= \mathsf{T}_e\big(\ell_g \circ \wp_h \circ \wp_{g^{-1}}\big)(t_A) = \mathsf{T}_e\big(\wp_h \circ \mathrm{Ad}_g\big)(t_A)$$
$$= \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ B} \triangleright \mathsf{T}_e\wp_h(t_B) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ B} \triangleright R_B(h)\,.$$

□

Uwaga 2. Powyższe stwierdzenie orzeka, że algebry pól lewo- i prawoniezmienniczych są wzajem antyizomorficznymi komutującymi podalgebrami Liego w algebrze Liego (gładkich) pól wektorowych na G, przy czym $\big(\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big)_A^{\ B}\big)_{A,B\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$ jest macierzą przejścia pomiędzy lewo- i prawoniezmienniczą bazą stycznej do grupy w tym punkcie. Tożsamości, w których pojawia się pchnięcie wzdłuż Inv, stanowią stycznościowy (w e) wariant relacji między lewym i prawym działaniem regularnym w grupie i grupie przeciwnej. Ostatnie dwie tożsamości w tezie stwierdzenia określają własności współzmienniczości względem – odpowiednio – prawych i lewych translacji (pchnięć) pól lewo- i prawoniezmienniczych.

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj $\{\theta_{\mathrm{L}}^A\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ i $\{\theta_{\mathrm{R}}^A\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ będą bazami $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Omega^1(\mathrm{G})$ dualnymi do baz – odpowiednio – $\{L_A\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ i $\{R_A\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$ $C^\infty(\mathrm{G},\mathbb{R})$-modułu $\Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G})$,

$$L_A \lrcorner\, \theta_{\mathrm{L}}^B = \delta_A^B = R_A \lrcorner\, \theta_{\mathrm{R}}^B\,, \quad A, B \in \overline{1, \dim \mathrm{G}}\,.$$

Pole 1-form o wartościach w $\mathfrak{g}$ postaci

$$\theta_{\mathrm{L}} := \theta_{\mathrm{L}}^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nosi miano **kanonicznego pola 1-form lewoniezmienniczych** lub **lewoniezmienniczej formy Maurera–Cartana na** G. Analogicznie, pole 1-form

$$\theta_{\mathrm{R}} := \theta_{\mathrm{R}}^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nazywamy **kanonicznym polem 1-form prawoniezmienniczych** lub **prawoniezmienniczą formą Maurera–Cartana na** G.

Uwaga 3. Warto odnotować, że formy Maurera–Cartana wraz z odnośnymi polami niezmienniczymi na grupie dają nam do ręki wygodną reprezentację operatora różniczki zewnętrznej (de Rhama), oto bowiem dla dowolnej funkcji $f \in C^1(\mathrm{G},\mathbb{R})$ i w dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$ zachodzą tożsamości:

$$\mathsf{d}f(g) = L_A(f)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{L}}^A(g) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(f \circ \mathcal{L}_t^{t_A}\big)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{L}}^A(g)$$

oraz

$$\mathsf{d}f(g) = R_A(f)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{R}}^A(g) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(f \circ \mathcal{R}_t^{t_A}\big)(g) \triangleright \theta_{\mathrm{R}}^A(g)\,.$$

Stwierdzenie 13. Przyjmijmy zapis Def. 6 oraz Stw. 12. Formy Maurera–Cartana są – odpowiednio – lewo- i prawoniezmiennicze,

$$(\ell_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}} = \theta_{\mathrm{L}}\,, \qquad (\wp_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}} = \theta_{\mathrm{R}}\,,$$

a ponadto spełniają tożsamości:

$$\theta_{\mathrm{R}} = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.\big) \circ \theta_{\mathrm{L}} \tag{9}$$

i

$$(\mathrm{Inv}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{L}} = -\theta_{\mathrm{R}}\,, \qquad (\mathrm{Inv}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\theta_{\mathrm{R}} = -\theta_{\mathrm{L}} \tag{10}$$

oraz – dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ –

$$\big(\wp_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{L}} = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big) \circ \theta_{\mathrm{L}}\,, \qquad \big(\ell_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)\theta_{\mathrm{R}} = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g\big) \circ \theta_{\mathrm{R}}\,.$$

Dowód: W dowodach wszystkich relacji wykorzystujemy bazowy charakter układów $\{\theta_{\mathrm{H}}^A\}_{A\in\overline{1,\dim \mathrm{G}}}$, $H \in \{\mathrm{L},\mathrm{R}\}$ (w dowolnym punkcie G) oraz ich dualność względem odnośnego układu pól niezmienniczych. I tak z równości, słusznej dla dowolnych $g,h \in \mathrm{G}$,

$$(L_A \lrcorner\, \ell_g^*\theta_{\mathrm{L}}^B)(h) = \theta_{\mathrm{L}}^B\big(\ell_g(h)\big) \circ \mathsf{T}_h\ell_g\big(L_A(h)\big) = \theta_{\mathrm{L}}^B(gh)\big(L_A(gh)\big) = \delta_A^B$$

wywodzimy wniosek:

$$\ell_g^*\theta_{\mathrm{L}}^B(h) = \theta_{\mathrm{L}}^B(h)\,,$$

czyli

$$\ell_g^*\theta_{\mathrm{L}}^B = \theta_{\mathrm{L}}^B\,.$$

Analogicznie dowodzimy prawoniezmienniczości 1-form θ_{R}^B. W następnej kolejności przywołujemy Równ. (8) i na tej podstawie obliczamy

$$L_A \lrcorner\, \theta_{\mathrm{R}}^B = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.\big)_A^{\ C} \triangleright R_C \lrcorner\, \theta_{\mathrm{R}}^B = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.\big)_A^{\ C}\, \delta_C^B = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}.\big)_A^{\ B}\,,$$

skąd odczytujemy Równ. (9). W dowolnym punkcie $g \in \mathrm{G}$ jest też na mocy Uwagi 1 spełniona relacja

$$\begin{aligned} R_A \lrcorner\, \mathrm{Inv}^*\theta_{\mathrm{L}}^B(g) &= \theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1}) \circ \mathsf{T}_g\mathrm{Inv}\big(R_A(g)\big) = \theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1}) \circ \mathsf{T}_g\mathrm{Inv} \circ \mathsf{T}_e\wp_g(t_A) \\ &= -\theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1}) \circ \mathsf{T}_e\ell_{g^{-1}}(t_A) \equiv -\theta_{\mathrm{L}}^B(g^{-1})\big(L_A(g^{-1})\big) = -\delta_A^B\,, \end{aligned}$$

zatem

$$\mathrm{Inv}^*\theta_{\mathrm{L}}^B = -\theta_{\mathrm{R}}^B\,,$$

czyli także

$$\mathrm{Inv}^*\theta_{\mathrm{R}}^B = -\theta_{\mathrm{L}}^B\,.$$

Wreszcie na koniec obliczamy – dla dowolnych $g,h \in \mathrm{G}$ –

$$\begin{aligned} & L_A \lrcorner\, \big(\wp_g^*\theta_{\mathrm{L}}^B\big)(h) = \theta_{\mathrm{L}}^B(hg) \circ \mathsf{T}_h\wp_g\big(L_A(h)\big) = \theta_{\mathrm{L}}^B(hg) \circ \mathsf{T}_h\wp_g \circ \mathsf{T}_e\ell_h(t_A) \\ = \ & \theta_{\mathrm{L}}^B(hg) \circ \mathsf{T}_e\ell_{hg} \circ \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big)_A^{\ C}\, \theta_{\mathrm{L}}^B(hg) \circ \mathsf{T}_e\ell_{hg}(t_C) \end{aligned}$$

$$= \left(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\right)^C_{\ A} \theta^B_{\mathrm{L}}(hg)\big(L_C(hg)\big) = \left(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\right)^C_{\ A} \delta^B_C = \left(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\right)^B_{\ A}$$

i na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\wp_g^*\theta^B_{\mathrm{L}} = \left(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\right)^B_{\ A} \theta^A_{\mathrm{L}} .$$

Dowód ostatniej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. □

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ będzie rozmaitością gładką, G zaś – grupą Liego. **Pochodna logarytmiczna lewostronna** na $C^\infty(M,\mathrm{G})$ to odwzorowanie

$$\delta_{\mathrm{L}}\log \ : \ C^\infty(M,\mathrm{G}) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

określone wzorem

$$\delta_{\mathrm{L}}\log f(x)(v_x) \coloneqq \mathsf{T}_{f(x)}\ell_{f(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_x f(v_x) ,$$

słusznym dla dowolnych: punktu $x \in M$, wektora $v_x \in \mathsf{T}_x M$ oraz funkcji $f \in C^\infty(M,\mathrm{G})$. Podobnie, **pochodna logarytmiczna prawostronna** na $C^\infty(M,\mathrm{G})$ to odwzorowanie

$$\delta_{\mathrm{R}}\log \ : \ C^\infty(M,\mathrm{G}) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

zadane w postaci

$$\delta_{\mathrm{R}}\log f(x)(v_x) \coloneqq \mathsf{T}_{f(x)}\wp_{f(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_x f(v_x) .$$

Stwierdzenie 14. Przyjmijmy zapis Def. 7. Dla dowolnych $f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathrm{G})$ (wymnożonych punktowo) i w każdym punkcie $x \in M$ prawdziwe są następujące tożsamości

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{L}}\log(f_1\cdot f_2)(x) &= \delta_{\mathrm{L}}\log f_2(x) + \left(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{f_2(x)^{-1}}\right)\big(\delta_{\mathrm{L}}\log f_1(x)\big) ,\\
\delta_{\mathrm{R}}\log(f_1\cdot f_2)(x) &= \delta_{\mathrm{R}}\log f_1(x) + \left(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{f_1(x)}\right)\big(\delta_{\mathrm{R}}\log f_2(x)\big) .
\end{aligned}$$

Dowód: Dowodzimy pierwszej tożsamości. Dowód drugiej z nich przebiega analogicznie. Wprost na podstawie definicji, a w odwołaniu do Równ. (2), obliczamy

$$\begin{aligned}
& \delta_{\mathrm{L}}\log(f_1\cdot f_2)(x)\\
= \ & \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}\cdot f_1(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_x(f_1\cdot f_2)\\
= \ & \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\big(\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \ell_{f_1(x)^{-1}}\big) \circ \mathsf{T}_x\big(m \circ (f_1, f_2)\big)\\
= \ & \mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\ell_{f_1(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_{(f_1(x),f_2(x))}m \circ \mathsf{T}_x(f_1, f_2)\\
= \ & \mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_{f_1(x)\cdot f_2(x)}\ell_{f_1(x)^{-1}} \circ \big(\mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_1(x)} \circ \mathsf{T}_x f_2 + \mathsf{T}_{f_1(x)}\wp_{f_2(x)} \circ \mathsf{T}_x f_1\big)\\
= \ & \mathsf{T}_{f_2(x)}\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_x f_2 + (\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}} \otimes \mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{f_2(x)^{-1}}) \circ \mathsf{T}_{f_1(x)}\ell_{f_1(x)^{-1}} \circ \mathsf{T}_x f_1 .
\end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 15. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj $f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathrm{G})$, a wówczas prawdziwe są zdania:

$$\delta_{\mathrm{L}}\log f_1 = \delta_{\mathrm{L}}\log f_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{g\in\mathrm{G}} \ : \ f_2 = \ell_g \circ f_1$$

oraz

$$\delta_{\mathrm{R}}\log f_1 = \delta_{\mathrm{R}}\log f_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists_{g\in\mathrm{G}} \ : \ f_2 = \wp_g \circ f_1 .$$

Dowód: Wynikanie $\Longleftarrow$ jest oczywiste, a już z pewnością staje się takim po przeanalizowaniu dowodu wynikania przeciwnego. To udowodnimy dla pochodnej lewostronnej. Dowód dla pochodnej prawostronnej jest w pełni analogiczny. Oto więc, stosując pierwszą z tożsamości ze Stw. 14, otrzymujemy

$$\delta_{\rm L}\log(f_2\cdot{\rm Inv}\circ f_1)=\delta_{\rm L}\log({\rm Inv}\circ f_1)+\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{f_1}\big)\delta_{\rm L}\log f_2\,,$$

a ponieważ na podstawie tej samej tożsamości stwierdzamy też równość

$$0\equiv\delta_{\rm L}\log(f_1\cdot{\rm Inv}\circ f_1)=\delta_{\rm L}\log({\rm Inv}\circ f_1)+\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{f_1}\big)\delta_{\rm L}\log f_1\,,$$

przeto wobec założonej równości obu pochodnych lewostronnych

$$\begin{aligned}\delta_{\rm L}\log(f_2\cdot{\rm Inv}\circ f_1)&=-\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{f_1}\big)\delta_{\rm L}\log f_1+\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{f_1}\big)\delta_{\rm L}\log f_2\\&=-\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{f_1}\big)\delta_{\rm L}\log f_1+\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{f_1}\big)\delta_{\rm L}\log f_1\\&=0\,.\end{aligned}$$

Przywołując definicję pochodnej logarytmicznej, przepisujemy powyższe w postaci

$$0=\delta_{\rm L}\log(f_2\cdot{\rm Inv}\circ f_1)=\mathsf{T}_{f_2(\cdot)\cdot f_1(\cdot)^{-1}}\ell_{f_1(\cdot)\cdot f_2(\cdot)^{-1}}\circ\mathsf{T}.\big(f_2(\cdot)\cdot f_1(\cdot)^{-1}\big)\,,$$

albo równoważnej

$$\mathsf{T}.\big(f_2(\cdot)\cdot f_1(\cdot)^{-1}\big)=0\,,$$

która implikuje równość

$$\forall_{x\in M}\ \forall_{V\in\mathsf{T}_xM}\ :\ V\big(f_2(\cdot)\cdot f_1(\cdot)^{-1}\big)=0\,,$$

czyli

$$\forall_{x\in M}\ :\ f_2(x)\cdot f_1(x)^{-1}={\rm const}\in{\rm G}\,,$$

co jest właśnie postulowaną tezą. □

Stwierdzenie 16. W zapisie Def. 6 i 7 słuszne są tożsamości

$$\theta_{\rm L}\equiv\delta_{\rm L}\log{\rm id}_{\rm G}\,,\qquad\qquad\theta_{\rm R}=\delta_{\rm R}\log{\rm id}_{\rm G}\,.$$

Dowód: Bez trudu sprawdzamy, dla dowolnego $g\in{\rm G}$,

$$\begin{aligned}L_A\lrcorner\,\delta_{\rm L}\log{\rm id}_{\rm G}(g)&\equiv\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_g{\rm id}_{\rm G}\big(L_A(g)\big)=\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\circ{\rm id}_{\mathsf{T}_g{\rm G}}\big(L_A(g)\big)\\&=\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\circ\mathsf{T}_g\ell_g\big(L_A(e)\big)=L_A(e)\equiv t_A\,,\end{aligned}$$

co wobec bazowego charakteru układu $\{L_A\}_{A\in\overline{1,\dim{\rm G}}}$ kończy dowód pierwszej części tezy stwierdzenia. Dowód w przypadku pochodnej prawostronnej przebiega analogicznie. □

Stwierdzenie 17. Przyjmijmy zapis Def. 6. Formy Maurera–Cartana spełniają – dla dowolnych elementów $g,h\in{\rm G}$ – tożsamości

$$\begin{aligned}m^*\theta_{\rm L}(g,h)&=\theta_{\rm L}(h)+\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{h^{-1}}\big)\circ\theta_{\rm L}(g)\,,\\m^*\theta_{\rm R}(g,h)&=\theta_{\rm R}(g)+\big({\rm id}_{\mathsf{T}^*{\rm G}}\otimes\mathsf{T}_e{\rm Ad}_{g}\big)\circ\theta_{\rm R}(h)\,.\end{aligned}$$

Dowód: Na mocy Stw. 16 (odczytanego w połączeniu z Def. 7), a w odwołaniu do Równ. (2) stwierdzamy, co następuje:

$$\theta_{\rm L}(g\cdot h)\equiv m^*\theta_{\rm L}(g,h)=\mathsf{T}_{g\cdot h}\ell_{(g\cdot h)^{-1}}\circ\mathsf{T}_{(g,h)}m=\mathsf{T}_{gh}\big(\ell_{h^{-1}\cdot g^{-1}}\big)\circ\big(\mathsf{T}_g\wp_h\circ{\rm pr}_1+\mathsf{T}_h\ell_g\circ{\rm pr}_2\big)$$

$$\equiv \quad \mathsf{T}_g\big(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\circ\ell_{g^{-1}}\big)\circ\mathrm{pr}_1+\mathsf{T}_h\ell_{h^{-1}}\circ\mathrm{pr}_2=\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\circ\mathsf{T}_g\ell_{g^{-1}}\circ\mathrm{pr}_1+\mathsf{T}_h\ell_{h^{-1}}\circ\mathrm{pr}_2$$

$$\equiv \quad \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*\mathrm{G}}\otimes\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\big)\circ\theta_{\mathrm{L}}(g)+\theta_{\mathrm{L}}(h)\,.$$

Dowód drugiej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. □

Lemat 2. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Niechaj $\mathrm{H}\subset\mathrm{G}$ będzie grupą domkniętą grupy Liego G w topologii podprzestrzeni i niech $X.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathfrak{g}$ będzie ciągiem wektorów w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ tejże grupy, o granicy $X:=\lim_{n\to\infty}X_n\in\mathfrak{g}$, a nadto niech $t.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0}$ będzie ciągiem liczbowym zbieżnym do $\lim_{n\to\infty}t_n=0$, przy czym $\lambda_{X_n}(t_n)\in\mathrm{H}$, $n\in\mathbb{N}$. Wówczas

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \lambda_X(t)\in\mathrm{H}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Dla ustalonego (dowolnie) $t\in\mathbb{R}$ rozważmy ciąg

$$N.\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}\ :\ n\longmapsto E\big(\tfrac{t}{t_n}\big)\,,$$

gdzie $E\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$ jest cechą (funkcją *entier*). Jako że $\frac{t}{t_n}-1<N_n\leq\frac{t}{t_n}$, $n\in\mathbb{N}$, przeto – na mocy Twierdzenia o trzech ciągach, a wobec założenia poczynionego w odniesieniu do $t.$ –

$$\lim_{n\to\infty}t_n\cdot N_n=t\,,$$

wobec czego także

$$\lim_{n\to\infty}t_n\cdot N_n\triangleright X_n=t\triangleright X\,.$$

Na podstawie Stw. 6, 7, 9 oraz 10„ jak również Stw. 5 i podstawowych właściwości potoku pola wektorowego wyznaczamy

$$\begin{aligned}
\lambda_X(t) &= \lambda_{t\triangleright X}(1)\equiv\lambda_{\lim_{n\to\infty}t_n\cdot N_n\triangleright X_n}(1)=\lim_{n\to\infty}\lambda_{t_n\cdot N_n\triangleright X_n}(1)=\lim_{n\to\infty}\lambda_{t_n\triangleright X_n}(N_n)\\
&\equiv \lim_{n\to\infty}\Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n;0,e)=\lim_{n\to\infty}\Phi_{t_n\triangleright X_n}\big(1;N_n-1,\Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-1;0,e)\big)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-1;0,e)\cdot\lambda_{t_n\triangleright X_n}(1)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Phi_{t_n\triangleright X_n}\big(1;N_n-2,\Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-2;0,e)\big)\cdot\lambda_{t_n\triangleright X_n}(1)\\
&= \lim_{n\to\infty}\Phi_{t_n\triangleright X_n}(N_n-2;0,e)\cdot\lambda_{t_n\triangleright X_n}(1)^2=\ldots=\lim_{n\to\infty}\lambda_{t_n\triangleright X_n}(1)^{N_n}=\lim_{n\to\infty}\lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}\,,
\end{aligned}$$

a ponieważ $\mathrm{H}\ni\lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}$ jest domknięta, przeto – zgodnie z tezą stwierdzenia – także

$$\lambda_X(t)\in\overline{\mathrm{H}}\equiv\mathrm{H}\,.$$

□

Twierdzenie 2 (Cartana o podgrupie domkniętej)**.** Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\mathrm{H}\subset\mathrm{G}$ będzie podgrupą domkniętą w topologii podprzestrzeni i niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego G. Skonstruujemy bezpośrednio lokalną mapę podrozmaitości na otoczeniu otwartym punktu $e\in\mathrm{H}\subset\mathrm{G}$, a następnie utworzymy atlas podrozmaitości przesuwając ową mapę do każdego z punktów podgrupy. W tym celu rozważmy podzbiór

$$\mathfrak{h}:=\{\ \mathsf{D}\gamma(0)\quad|\quad\gamma\in C^\infty(\mathbb{R},\mathrm{H})\subset C^\infty(\mathbb{R},\mathrm{G})\quad\wedge\quad\gamma(0)=e\ \}\subset\mathfrak{g}\,.$$

Dla dowolnej pary ścieżek $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{H})$ spełniających warunki $\gamma_\alpha(0) = e,\ \alpha \in \{1,2\}$ i dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ definiujemy ścieżkę złożoną

$$\gamma\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{H}\ :\ t \longmapsto \gamma_1(t_1 \cdot t) \cdot \gamma_2(t_2 \cdot t)\,,$$

po czym obliczamy

$$\mathsf{D}\gamma(0) = t_1 \triangleright \mathsf{D}\gamma_1(0) + t_2 \triangleright \mathsf{D}\gamma_2(0)\,.$$

Wektor styczny do γ w $t = 0$ należy do $\mathfrak{h}$ (wprost z definicji), widzimy zatem, że dowolna $\mathbb{R}$-liniowa kombinacja elementów zbioru $\mathfrak{h}$ jest w nim zawarta, czyli – innymi słowy – $\mathfrak{h}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}$-liniową przestrzeni $\mathfrak{g}$. W następnej kolejności dowodzimy tożsamości

$$\mathfrak{h} = \{\ X \in \mathfrak{g}\ \mid\ \forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \lambda_X(t) \in \mathrm{H}\ \}\,. \tag{11}$$

Zawieranie $\supseteq$ jest oczywiste, rozważmy przeto dowolny wektor $X := \mathsf{D}\gamma(0) \in \mathfrak{h}$ określony przez pewną ścieżkę $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{H})$ i zdefiniujmy, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ (na tyle, by ścieżka $\gamma(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ była zawarta w dyfeomorficznym obrazie otoczenia $\mathcal{U}_0$ wektora $0 \in \mathfrak{g}$ względem odwzorowania $\exp$, zgodnie ze Stw. 10), ścieżkę wektorów

$$\xi\ :\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathfrak{g}\ :\ t \longmapsto \exp\restriction_{\mathcal{U}_0}^{-1} \circ\, \gamma(t)\,.$$

Otrzymujemy, przywoławszy po drodze Równ. (2),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} \ni X \quad &\equiv \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\gamma(t) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\circ\,\xi(t) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(\xi(0) + t \triangleright \mathsf{D}\xi(0) + \mathscr{O}(t^2)\big) \\
&= \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(t \triangleright \mathsf{D}\xi(0) + \mathscr{O}(t^2)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\exp\big(t \triangleright \mathsf{D}\xi(0)\big) \cdot \exp\big(\mathscr{O}(t^2)\big)\big) \\
&= \quad \mathsf{T}_e r_{\exp(\mathscr{O}(t^2))}\restriction_{t=0}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(t \triangleright \mathsf{D}\xi(0)\big)\big) \\
&\quad\ \ + \mathsf{T}_e l_{\exp(t\triangleright\mathsf{D}\xi(0))}\restriction_{t=0}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(\mathscr{O}(t^2)\big)\big) \\
&= \quad \mathsf{T}_e r_e\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(t \triangleright \mathsf{D}\xi(0)\big)\big) + \mathsf{T}_e l_e(0_{\mathfrak{g}}) \\
&= \quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\exp\big(t \triangleright \mathsf{D}\xi(0)\big) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_{t\triangleright\mathsf{D}\xi(0)}(1)\,,
\end{aligned}$$

czyli – w świetle Stw. 7 –

$$\mathfrak{h} \ni X = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\lambda_{\mathsf{D}\xi(0)}(t) = \mathsf{D}\xi(0)\,.$$

Możemy zatem zapisać

$$\lim_{n\to\infty} n \triangleright \xi\big(\tfrac{1}{n}\big) \in \mathfrak{h}\,.$$

Zdefiniujmy ciągi

$$X.\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{g}\ :\ n \longmapsto n \triangleright \xi\big(\tfrac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\big)\,, \qquad\qquad t.\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}\ :\ n \longmapsto \tfrac{1}{n}\,,$$

Na mocy Stw. 7 zachodzi relacja

$$\lambda_{X_n}(t_n) = \lambda_{t_n\triangleright X_n}(1) \equiv \lambda_{\xi(\frac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n})}(1) \equiv \exp\circ\,\xi\big(\tfrac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\big) = \gamma\big(\tfrac{1}{\varepsilon^{-1}+1+n}\big) \in \mathrm{H}\,,$$

możemy więc przywołać Lemat 2, aby stwierdzić, że

$$\forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \lambda_X(t) \equiv \lambda_{\mathsf{D}\xi(0)}(t) = \lambda_{\lim_{n\to\infty} X_n}(t) \in \mathrm{H}\,,$$

co dowodzi inkluzji

$$\mathfrak{h} \subseteq \{\ X \in \mathfrak{g}\ \mid\ \forall_{t\in\mathbb{R}}\ :\ \lambda_X(t) \in \mathrm{H}\ \}\,.$$

Tym sposobem zidentyfikowaliśmy algebrę Liego podgrupy H. Ta wraz z dowolnym jej dopełnieniem prostym $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \tag{12}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowej $\mathfrak{g}$ (dopełnienie to nie jest w ogólności podalgebrą Liego algebry $\mathfrak{g}$) stanowi poszukiwany model lokalnej mapy podrozmaitości na otoczeniu e w $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$. Ażeby się o tym przekonać, pokażemy najpierw, że istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{M}$ wektora $0_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{m}$ o własności $\exp(\mathcal{M}) \cap \mathrm{H} = \{e\}$. Istotnie, gdyby tak nie było, można byłoby wybrać ciąg wektorów $Y.\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow$

$\mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ zbieżny do $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0_{\mathfrak{g}}$ i o własności $\exp(Y_n) \in \mathrm{H}$, $n \in \mathbb{N}$, wtedy jednak – wybrawszy (dowolnie) normę $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ na $\mathfrak{m}$ ciągłą w topologii na $\mathfrak{g}$ (zatem np. wziąwszy normę euklidesową *indukującą* naturalną topologię na $\mathfrak{g}$) – uzyskalibyśmy ciąg wektorów

$$v_{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m} : n \longmapsto \|Y_n\|^{-1} \triangleright Y_n ,$$

z którego wobec zwartości sfery $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$ moglibyśmy następnie wybrać podciąg zbieżny $v_{n_{\cdot}}$ o granicy $v := \lim_{k\to\infty} v_{n_k} \in \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$, więc też położywszy

$$\tau_{\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \longmapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} ,$$

i sprawdziwszy relacje

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n \equiv \lim_{n\to\infty} \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|\lim_{n\to\infty} Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|0_{\mathfrak{g}}\|_{\mathfrak{g}} = 0 ,$$

$$\lambda_{v_n}(\tau_n) = \lambda_{\|Y_n\|_{\mathfrak{m}} \triangleright v_n}(1) = \lambda_{Y_n}(1) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathrm{H} ,$$

moglibyśmy ponownie skorzystać z Lematu 2, dostając

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} : \lambda_v(t) \in \mathrm{H} ,$$

czyli – w świetle równości (11) – $v \in \mathfrak{h}$, a zatem – wobec rozkładu (12) – sprzeczność z wcześniejszym wynikiem $v \in \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$. Mając pożądane otoczenie $\mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$, wybierzmy następnie takie otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{h}$ oraz $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{m}$, a także $\mathcal{O}_e$ elementu e w G, iżby odwzorowanie

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_e : (X,Y) \longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y)$$

było dyfeomorfizmem. O tym, że wybór taki jest możliwy, przesądza analiza rozszerzonego odwzorowania

$$\widetilde{\varphi} : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{G} : (X,Y) \longmapsto \exp(X) \cdot \exp(Y) .$$

Jego styczna w $(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ to

$$\mathsf{D}\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}}) : \mathsf{T}_{(0_{\mathfrak{g}},0_{\mathfrak{g}})}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathsf{T}_{\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}},0_{\mathfrak{g}})}\mathrm{G} = \mathsf{T}_e\mathrm{G} \equiv \mathfrak{g} : (x,y) \longmapsto x + y ,$$

co w świetle Stw. 7 oraz Równ. (2) wynika wprost z rachunku

$$\begin{aligned} \mathsf{D}\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})(x,y) &= \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright x) \cdot \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright y)\big) \\ &\equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\lambda_{t\triangleright x}(1) \cdot \lambda_{t\triangleright y}(1)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\lambda_x(t) \cdot \lambda_y(t)\big) \\ &= \mathsf{T}_e r_{\lambda_y(0)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \lambda_x(t)\big) + \mathsf{T}_e l_{\lambda_x(0)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \lambda_y(t)\big) \\ &= \mathsf{T}_e r_e(x) + \mathsf{T}_e l_e(y) = x + y \end{aligned}$$

i dowodzi izomorficznego charakteru $\mathsf{D}\widetilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ (wszak $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$), który pozwala odnieść do $\widetilde{\varphi}$ Twierdzenie o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. Niechaj teraz $h \in \mathcal{O}_e \cap \mathrm{H}$, a wtedy $h = \exp(X) \cdot \exp(Y)$ dla pewnych $(X,Y) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$, ale też $\exp(X) \in \exp(\mathfrak{h}) = \mathrm{H}$, więc $\exp(Y) = \exp(X)^{-1} \cdot g \in \mathrm{H} \cdot (\mathcal{O}_e \cap \mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$, co wobec założenia $Y \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M}$ oznacza, że $Y = 0_{\mathfrak{g}}$, czyli $h = \exp(X) \in \exp(\mathcal{O}_{\mathfrak{h}})$. Jest przeto $\kappa_e \equiv \varphi^{-1}$ mapą na otoczeniu $\mathcal{O}_e$ elementu neutralnego w G, a przy tym

$$\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e = \kappa^{-1}\big(\{ (X, 0_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad | \quad X \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \}\big) .$$

Mapę na otoczeniu punktu $h \in \mathrm{H}$ definiujemy jako

$$\kappa_h := \kappa \circ l_{h^{-1}} : l_h(\mathcal{O}_e) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$$

(podzbiór $l_h(\mathcal{O}_e)$ jest otwarty jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego $\mathcal{O}_e$). Uzyskujemy tym sposobem atlas podrozmaitości $\{\kappa_h\}_{h\in\mathrm{H}}$ dla $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$, w którym operacje grupowe są gładkie jako ograniczenia operacji z G.

I odwrotnie, niech $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ będzie podgrupą i podrozmaitością grupy Liego G. Operacje grupowe na H są stosownymi złożeniami tychże operacji na G (z założenia gładkich) z kanonicznymi gładkimi włożeniami $\iota_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \xrightarrow{\cong} \iota_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{G}$ i ich odwrotnościami $\iota_{\mathrm{H}}^{-1} : \iota_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}$,

$$m_{\mathrm{H}} \equiv \iota_{\mathrm{H}}^{-1} \circ m_{\mathrm{G}} \circ (\iota_{\mathrm{H}} \times \iota_{\mathrm{H}}) , \qquad \mathrm{Inv}_{\mathrm{H}} = \iota_{\mathrm{H}}^{-1} \circ \mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \circ \iota_{\mathrm{H}} ,$$

i jako takie są gładkie. Jest zatem H podgrupą Liego. Pozostaje pokazać, że jest ona domknięta. W tym celu rozważmy dowolny punkt $g \in \overline{\mathrm{H}}$ z domknięcia $\overline{\mathrm{H}}$ podgrupy H, wraz z odnośnym ciągiem $h. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{H}$ doń zbieżnym, $\lim_{n\to\infty} h_n = g$. Niechaj $\mathcal{O}_e \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ będzie dziedziną lokalnej mapy podrozmaitości κ na otoczeniu $e \in \iota_{\mathrm{H}}(\mathrm{H})$, a $\mathcal{U}_e \in \mathscr{T}(\mathrm{G})$ – pewnym podotoczeniem $\mathcal{O}_e \supset \mathcal{U}_e$ o własności $\overline{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$ (wystarczy wybrać $\mathcal{U}_e$ jako przeciwobraz względem κ dostatecznie małej kuli w $\mathbb{R}^{\dim \mathrm{G}}$ wokół $\kappa(e)$). Przywoławszy Lemat 1, ustalmy (dowolnie) otoczenie otwarte $\mathcal{O}$ elementu neutralnego $e \in \mathrm{G}$ o własności $m_{\mathrm{G}} \circ (\mathrm{Inv}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e$, po czym rozważmy ciąg

$$g. := g^{-1} \cdot h. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G} : n \longmapsto g^{-1} \cdot h_n$$

o granicy (obliczonej z wykorzystaniem ciągłości mnożenia)

$$\lim_{n\to\infty} g_n = e .$$

Prawie wszystkie jego wyrazy są zawarte w $\mathcal{O}$, a zatem – dla dostatecznie dużych $m, n \in \mathbb{N}$ –

$$h_n^{-1} \cdot h_m = g_n^{-1} \cdot g_m \equiv f(g_n, g_m) \in f(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e .$$

Przy tym dla ustalonego n otrzymujemy – wobec ciągłości mnożenia –

$$\lim_{m\to\infty} h_n^{-1} \cdot h_m = h_n^{-1} \cdot g ,$$

a ponieważ granica ciągu punktów z $\mathcal{U}_e$ należy do $\overline{\mathcal{U}}_e \subset \mathcal{O}_e$, przeto także $h_n^{-1} \cdot g \in \mathcal{O}_e$. Przy tym w dziedzinie $\mathcal{O}_e$ mapy podrozmaitości κ przecięcie $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$ jest homeomorficznym przeciwobrazem względem κ dopełnienia (w $\kappa(\mathcal{O}_e) \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\dim \mathrm{G}})$) sumy mnogościowej pary zbiorów otwartych złożonych z punktów o – odpowiednio – ściśle dodatnich i ściśle ujemnych ostatnich $\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}$ współrzędnych (opisujących kierunki transwersalne do obrazu $\kappa(\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e) = \mathcal{V} \times \{(0, 0, \ldots, 0)\}$, $\mathcal{V} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\dim \mathrm{H}})$), co oznacza, że podzbiór $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$ jest domknięty *w* $\mathcal{O}_e$. Ilekroć zatem mamy do czynienia z ciągiem punktów w $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$ zbieżnym *w* $\mathcal{O}_e$, a takim jest $h_n^{-1} \cdot h.$, granica jego leży także w $\mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e$, czyli w szczególności

$$h_n^{-1} \cdot g \in \mathrm{H} \cap \mathcal{O}_e \subset \mathrm{H} ,$$

więc też $g \in \mathrm{H}$, to zaś przesądza o postulowanej równości

$$\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} .$$

□

Przykłady 2.

(1) Grupa (pseudo)ortogonalna $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p, q)$ (1) jest (jako zbiór) przeciwobrazem $\tau^{-1}(\{\mathbf{0}_n\})$ podzbioru domkniętego $\{\mathbf{0}_n\} \subset \mathbb{R}(p+q)$ względem odwzorowania (jawnie ciągłego)

$$\tau : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(p+q) \longrightarrow \mathbb{R}(p+q) : A \longmapsto A^{\mathrm{T}} \boxdot \mathbf{1}_{p,q} \boxdot A - \mathbf{1}_{p,q} ,$$

zapisanego przy użyciu macierzy

$$\mathbf{1}_{p,q} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p \text{ razy}}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{q \text{ razy}}) ,$$

jest przeto podgrupą domkniętą grupy Liego $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(p+q)$ z Przykł. 1 (4), czyli też (pod)grupą Liego. Grupa ta ma wyróżnioną podgrupę Liego

$$\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv \det{}_{(p+q)}^{-1}(\{1\}) ,$$

zwaną grupą specjalną ortogonalną.

W przypadku $pq = 0$ ta ostatnia podgrupa zadaje rozkład grupy ortogonalnej na składowe spójne

$$\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q) = \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q)\,,$$

w którego zapisie

$$\mathsf{P}_{e_1} \;:\; \mathbb{R}^{\times p} \circlearrowleft \;:\; (v^1, v^2, \ldots, v^p) \longmapsto (-v^1, v^2, \ldots, v^p)$$

jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^1 = 0$.

W przypadku $pq \neq 0$ podgrupa $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q)$ rozkłada się na składowe spójne

$$\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(p,q) = \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathsf{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q)\,,$$

przy czym $\mathsf{P}_{e_{p+1}}$ jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^{p+1} = 0$, a (pod)grupę Liego będącą składową spójną jedności $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q)$, zwaną **grupą specjalną ortogonalną ortochroniczną**, tworzą macierze zachowujące zarówno orientację podprzestrzeni $\mathbb{R}^{\times p} \times \{\mathbf{0}_q\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$, jak i orientację podprzestrzeni $\{\mathbf{0}_p\} \times \mathbb{R}^{\times q} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ (należy zwrócić uwagę, że przekształcenia ortogonalne zachowują każdą z tych podprzestrzeni, a to z racji określoności formy kwadratowej $\delta^{(p,q)}_{\mathrm{E}}$ w ograniczeniu do każdej z nich). Ostatecznie otrzymujemy rozkład pełnej grupy ortogonalnej na składowe spójne w postaci

$$\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(p,q) = \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q) \sqcup \mathsf{P}_{e_1} \cdot \mathsf{P}_{e_{p+1}} \cdot \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(p,q)\,. \tag{13}$$