GR II W CZASACH ZARAZY
4. WYKŁAD ZDALNY

Rozmaitości z działaniem grupy Liego

Dotychczasowa dyskusja dostarczyła nam należytych podstaw pojęciowych do omówienia zbioru zagadnień dotyczących działania grup (Liego) na rozmaitościach, którymi zajmiemy się obecnie.

Zaczniemy od pojęć podstawowych opisanych w

Definicja 1. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą[1] i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej[2]. Homomorfizm grup

$$\lambda_{\cdot} \,:\, \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \,:\, g \longmapsto \lambda_g$$

określamy mianem **działania lewostronnego grupy** G **na zbiorze** X, na którym jest określone działanie grupy G, nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy** G. Antyhomomorfizm

$$\varrho_{\cdot} \,:\, \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \,:\, g \longmapsto \rho_g$$

nazywamy **działaniem prawostronnym grupy** G **na zbiorze** X, a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy** G. Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako

$$\lambda \,:\, \mathrm{G} \times X \longrightarrow X \,:\, (g, x) \longmapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g, x)\,,$$

a podgrupy $\varrho_{\mathrm{G}} \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako

$$\varrho \,:\, X \times \mathrm{G} \longrightarrow X \,:\, (x, g) \longmapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x, g)\,.$$

Niechaj $X_A,\ A \in \{1, 2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f \,:\, X_1 \longrightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem lewostronnie** G**-ekwiwariantnym**, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times X_1 \arrow[r, "\lambda^1"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times f"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{G} \times X_2 \arrow[r, "\lambda^2"'] & X_2 \end{tikzcd}\,.$$

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych $\varrho^A,\ A \in \{1, 2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f \,:\, X_1 \longrightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^1"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \times \mathrm{G} \arrow[r, "\varrho^2"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie** G**-ekwiwariantnym**.

[1] Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.
[2] Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

Parę $((X,\mathscr{T}(X)),\lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X,\mathscr{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy** G (albo G-**przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo G-**przestrzeń topologiczną prawostronną**) G. Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) topologicznie G-**ekwiwariantnego**.

Zastępując w powyższej definicji przestrzeń topologiczną $(X,\mathscr{T}(X))$ rozmaitością różniczkowalną $(M,\widehat{\mathscr{A}})$ klasy C^∞, grupę topologiczną G – grupą Liego (oznaczaną tym samym symbolem), określenie zaś „topologiczny" – określeniem „gładki" (w rozumieniu: klasy C^∞) otrzymujemy, odpowiednio: **rozmaitość z działaniem gładkim lewostronnym** (albo G-**rozmaitość gładką lewostronną**) wzgl. **prawostronnym** (albo G-**rozmaitość gładką prawostronną**), **odwzorowanie lewostronnie** (wzgl. **prawostronnie**) **gładko** G-**ekwiwariantne**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami $X_A,\ A\in\{1,2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(X_1,X_2)\,.$$

Działanie gładkie grupy Liego na rozmaitości indukuje na niej wyróżnione pola wektorowe, o których mówi

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 (i poprzednich) i niechaj $((M,\widehat{\mathscr{A}}),\lambda)$ będzie rozmaitością z działaniem gładkim (lewostronnym) grupy Liego G o algebrze Liego $\mathfrak{g}$. **Pole wektorowe fundamentalne lewostronne** na M to obraz dowolnego elementu $X\in\mathfrak{g}$ względem odwzorowania

$$\mathcal{K}_{\cdot_1}(\cdot_2)\equiv\mathsf{T}_{(e,\cdot_2)}\lambda(\cdot_1,\mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\cdot_2}M})\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{X}(M)\ :\ X\longmapsto\mathsf{T}_{(e,\cdot_2)}\lambda(X,\mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\cdot_2}M})\equiv\mathcal{K}_X(\cdot_2)\,,$$

przy czym wartość otrzymanego tą drogą pola wektorowego w dowolnym punkcie $x\in M$ to

$$\mathcal{K}_X(x)\equiv\mathsf{T}_{(e,\cdot_2)}\lambda(X,\mathbf{0}_{\mathsf{T}_{\cdot_2}M})(x)\equiv\mathsf{T}_{(e,x)}\lambda(X,\mathbf{0}_{\mathsf{T}_xM})\in\mathsf{T}_xM\,.$$

Pole wektorowe fundamentalne prawostronne definiujemy analogicznie.

Uwaga 1. Ze względów tak praktycznych, jak i historycznych, warto poświęcić chwilę na wyprowadzenie formuły określającej działanie pola fundamentalnego na przestrzeni funkcji (klasy C^1) na rozmaitości M. W tym celu ustalmy (dowolnie) taką funkcję $f\in C^1(M,\mathbb{R})$ i policzmy jej pochodną wzdłuż $\mathcal{K}_X$ w punkcie $x\in M$,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_X(f)(x)&\equiv\mathsf{T}_xf\big(\mathcal{K}_X(x)\big)=\mathsf{T}_xf\circ\mathsf{T}_{(e,x)}\lambda(X,\mathbf{0}_{\mathsf{T}_xM})=\mathsf{T}_{(e,x)}(f\circ\lambda)(X,\mathbf{0}_{\mathsf{T}_xM})\\&\equiv\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}(f\circ\lambda)\big(\mathcal{L}_t^X(e),\Phi_0(t,x)\big)=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}f\big(\mathcal{L}_t^X(e)\triangleright\Phi_0(t,x)\big)\\&=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}f\big(\big(e\cdot\exp(t\triangleright X)\big)\triangleright x\big)=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}f\big(\exp(t\triangleright X)\triangleright x\big)\,.\end{aligned}$$

W szczególności odnosząc powyższy rachunek do funkcji współrzędniowych na otoczeniu x, otrzymujemy jawną reprezentację pola fundamentalnego w postaci

$$\mathcal{K}_X(x)=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\mathcal{L}_t^X(e)\triangleright x\big)=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\exp(t\triangleright X)\triangleright x\big)\,.$$

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Odwzorowanie $\mathcal{K}_\cdot\ :\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ jest G-ekwiwariantnym antyhomomorfizmem algebr Liego, tj. dla dowolnych $X,Y\in\mathfrak{g}$ i $g\in\mathrm{G}$ zachodzą tożsamości:

$$\lambda_{g\,*}\mathcal{K}_X=\mathcal{K}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(X)}$$

oraz

$$[\mathcal{K}_X,\mathcal{K}_Y]_M=-\mathcal{K}_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Pierwszej z postulowanych tożsamości bronimy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym oczywistą relację

$$\lambda_g\circ\lambda=\lambda\circ(\mathrm{Ad}_g\times\lambda_g)\,,$$

a prowadzonym w dowolnym punkcie $x \in M$,

$$\begin{aligned}
\lambda_{g\,*}\mathcal{K}_X(x) &\equiv \mathsf{T}_{(\lambda_{g^{-1}}(x))}\lambda_g\big(\mathcal{K}_X \circ \lambda_{g^{-1}}(x)\big) \equiv \mathsf{T}_{g^{-1}\rhd x}\lambda_g \circ \mathsf{T}_{(e,g^{-1}\rhd x)}\lambda(X, 0_{\mathsf{T}_{g^{-1}\rhd x}M}) \\
&= \mathsf{T}_{(e,g^{-1}\rhd x)}(\lambda_g \circ \lambda)(X, 0_{\mathsf{T}_{g^{-1}\rhd x}M}) \\
&= \mathsf{T}_{(e,g^{-1}\rhd x)}\big(\lambda \circ (\mathrm{Ad}_g \times \lambda_g)\big)(X, 0_{\mathsf{T}_{g^{-1}\rhd x}M}) \\
&= \mathsf{T}_{(e,x)}\lambda\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(X), \mathsf{T}_{g^{-1}\rhd x}\lambda_g(0_{\mathsf{T}_{g^{-1}\rhd x}M})\big) = \mathsf{T}_{(e,x)}\lambda\big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(X), 0_{\mathsf{T}_xM}\big) \\
&\equiv \mathcal{K}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_g(X)}(x)\,.
\end{aligned}$$

Celem udowodnienia homomorficznego charakteru odwzorowania $\mathcal{K}.$ ustalamy relację między polami wektorowymi $R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M} \in \Gamma(\mathsf{T}\mathrm{G}) \oplus \Gamma(\mathsf{T}M) \equiv \Gamma(\mathsf{T}(\mathrm{G}\times M))$ (gdzie $\mathbf{0}_{\mathsf{T}M}$ jest cięciem zerowym $\mathsf{T}M$) i $\mathcal{K}_X$. Przydatną okazuje się przy tym tożsamość

$$\lambda \circ (\wp_g \times \mathrm{id}_M) = \lambda \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \lambda_g)\,,$$

słuszna dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$ (i prawego działania $\wp.$ grupy na sobie). Obliczamy – dla dowolnych $(g,x) \in \mathrm{G} \times M$ –

$$\begin{aligned}
&\mathsf{T}_{(g,x)}\lambda\big((R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M})(g,x)\big) = \mathsf{T}_{(g,x)}\lambda \circ (\mathsf{T}_e\wp_g \times \mathrm{id}_{\mathsf{T}_xM})(X, 0_{\mathsf{T}_xM}) \\
=\ & \mathsf{T}_{(e,x)}\big(\lambda \circ (\wp_g \times \mathrm{id}_M)\big)(X, 0_{\mathsf{T}_xM}) = \mathsf{T}_{(e,x)}\big(\lambda \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \lambda_g)\big)(X, 0_{\mathsf{T}_xM}) \\
=\ & \mathsf{T}_{(e,g\rhd x)}\lambda \circ \mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \lambda_g)\big)(X, 0_{\mathsf{T}_xM}) = \mathsf{T}_{(e,g\rhd x)}\lambda\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}(X), \mathsf{T}_x\lambda_g(0_{\mathsf{T}_xM})\big) \\
=\ & \mathsf{T}_{(e,g\rhd x)}\lambda(X, 0_{\mathsf{T}_{g\rhd x}M}) \equiv \mathcal{K}_X \circ \lambda(g,x)\,.
\end{aligned}$$

Możemy przeto zapisać

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M(x) \equiv [\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M \circ \lambda(e,x) = \mathsf{T}_{(e,x)}\lambda\big([R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M}, R_Y \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M}]_{\mathrm{G}\times M}(e,x)\big) \\
=\ & \mathsf{T}_{(e,x)}\lambda\big([R_X, R_Y]_{\mathrm{G}}(e), \mathbf{0}_{\mathsf{T}M}(x)\big) \equiv \mathsf{T}_{(e,x)}\lambda(-[X,Y]_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathsf{T}_xM}) \equiv -\mathcal{K}_{[X,Y]_{\mathfrak{g}}}(x)\,.
\end{aligned}$$

□

W następnej kolejności dowodzimy pomocniczego

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. Stabilizator G_x punktu $x \in X$ przestrzeni X z działaniem topologicznym grupy topologicznej G jest podgrupą domkniętą w G, a przy tym stabilizatory punktów z tej samej G-orbity są podgrupami wzajem sprzężonymi,

$$\forall_{(g,x)\in\mathrm{G}\times X}\ :\ \mathrm{G}_{g\rhd x} = g\mathrm{G}_x g^{-1}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Domkniętość stabilizatora punktu $x \in X$ wynika wprost z ciągłości działania λ w drugim argumencie, domkniętości $\{x\} \subset X$ oraz tożsamości

$$\mathrm{G}_x \equiv \lambda(\cdot, x)^{-1}\big(\{x\}\big)\,.$$

Zachodzi ponadto, dla dowolnego elementu $h \in \mathrm{G}$,

$$h \in \mathrm{G}_{g\rhd x} \qquad\Longleftrightarrow\qquad (hg) \rhd x = h \rhd (g \rhd x) = g \rhd x \qquad\Longleftrightarrow\qquad g^{-1}hg \in \mathrm{G}_x\,.$$

□

Mamy też istotne dla dowodu zasadniczego i fizycznie istotnego Tw. 2, proste

Twierdzenie 1 (O rzędzie odwzorowania ekwiwariantnego)**.** Przyjmijmy zapis Def. 1 (i wcześniejszy). Niechaj $((M_A, \widehat{\mathscr{A}_A}), \lambda^A)$, $A \in \{1,2\}$ będą rozmaitościami z odnośnymi działaniami gładkimi (lewostronnymi) grupy Liego G, przy czym zakładamy dodatkowo, że λ^1 jest przechodnie, tj.,

$$\forall_{x,y\in M_1}\ \exists_{g\in\mathrm{G}}\ :\ y = \lambda^1(g,x)\,,$$

i niech $F : M_1 \longrightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem gładko (lewostronnie) G-ekwiwariantnym. Wówczas F ma stały rząd, w szczególności zaś przeciwobrazy punktów w M_2 względem F są domkniętymi podrozmaitościami włożonymi w M_1.

Dowód: Wobec przechodniości działania G na rozmaitości M_1, dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in M_1$ istnieje element $g_{21} \in \mathrm{G}$ o własności $x_2 = \lambda^1_{g_{21}}(x_1)$, przy czym z racji G-ekwiwariantności F zachodzi tożsamość funkcjonalna

$$F \circ \lambda^1_{g_{21}} = \lambda^2_{g_{21}} \circ F\,,$$

a zatem także tożsamość

$$\mathsf{T}_{x_1}(F \circ \lambda^1_{g_{21}}) = \mathsf{T}_{x_1}(\lambda^2_{g_{21}} \circ F)\,,$$

którą możemy przepisać w postaci

$$\mathsf{T}_{x_2}F \circ \mathsf{T}_{x_1}\lambda^1_{g_{21}} = \mathsf{T}_{F(x_1)}\lambda^2_{g_{21}} \circ \mathsf{T}_{x_1}F\,.$$

Z racji dyfeomorficznego charakteru odwzorowań $\lambda^A_{g_{21}},\ A \in \{1,2\}$ (przesądzającego o odwracalności odwzorowań do nich stycznych) z powyższej tożsamości wywodzimy wniosek o tożsamości rzędów:

$$\mathrm{rk}\,\mathsf{T}_{m_2}F = \mathrm{rk}\,\mathsf{T}_{m_1}F\,,$$

który w konsekwencji przechodniości λ^1 możemy rozciągnąć na całą dziedzinę F. Końcowa część tezy wynika wprost z twierdzenia o rzędzie (odwzorowania). □

Kluczową z punktu widzenia zastosowań (w opisie procedury ulokalnienia symetrii globalnych teorii fizycznej, zw. procedurą cechowania) własność działania grupy Liego na rozmaitości wprowadzamy w poniższej

Definicja 3. Przyjmijmy zapis Def. 1. Działanie $\lambda : \mathrm{G} \times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ nazywamy **właściwym**, ilekroć odwzorowanie

$$\Lambda := (\lambda, \mathrm{pr}_2) : \mathrm{G} \times X \longrightarrow X \times X : (g, x) \longmapsto (g \triangleright x, x) \tag{1}$$

jest właściwe, tj. ilekroć przeciwobrazy zbiorów zwartych względem Λ są zwarte.

Warunek właściwości działania można przeformułować jak poniżej.

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 3. Działanie $\lambda : \mathrm{G} \times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na przestrzeni Hausdorffa $(X, \mathscr{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$ podzbiór

$$\mathrm{G}(\mathcal{K}) := \{\ g \in \mathrm{G} \quad | \quad \lambda_g(\mathcal{K}) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing\ \}$$

jest zwarty.

Dowód: Załóżmy najpierw, że działanie λ jest właściwe, tj. przeciwobraz dowolnego podzbioru zwartego w $X \times X$ względem odwzorowania Λ (z Def. 3) jest zwarty. Niechaj $\mathcal{K} \subset X$ będzie wybranym (dowolnie) podzbiorem zwartym, a wtedy podzbiór

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(\mathcal{K}) \quad &\equiv \quad \{\ g \in \mathrm{G} \quad | \quad \exists_{x \in \mathcal{K}}\ :\ g \triangleright x \in \mathcal{K}\ \} \equiv \{\ g \in \mathrm{G} \quad | \quad \exists_{x \in X}\ :\ \Lambda(g, x) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}\ \} \\ &= \quad \mathrm{pr}_1\big(\Lambda^{-1}(\mathcal{K} \times \mathcal{K})\big)\end{aligned}$$

jest zwarty jako ciągły obraz (rzut kanoniczny pr_1 jest odwzorowaniem ciągłym) przeciwobrazu kwadratu kartezjańskiego zbioru zwartego (czyli zbioru zwartego w topologii produktowej) względem odwzorowania właściwego Λ.

I odwrotnie, niechaj podzbiór $\mathrm{G}(\mathcal{K})$ będzie zwarty dla dowolnego podzbioru zwartego $\mathcal{K} \subset X$. Rozważmy dowolny podzbiór zwarty $\widetilde{\mathcal{K}} \subset X \times X$. Jego ciągłe obrazy $\mathrm{pr}_A(\widetilde{\mathcal{K}}) \subset X,\ A \in \{1,2\}$ są zwarte, przeto własność tę ma także ich suma mnogościowa, $\mathcal{K}_{12} \equiv \mathrm{pr}_1(\widetilde{\mathcal{K}}) \cup \mathrm{pr}_2(\widetilde{\mathcal{K}}) \subset X$. Przy tym oczywiście ilekroć $(g, x) \in \mathrm{G} \times X$ spełnia warunek $\Lambda(g, x) \in \widetilde{\mathcal{K}}$, to tym bardziej para ta spełnia warunek $\Lambda(g,x) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, oto bowiem relacja $(x_1, x_2) \in \widetilde{\mathcal{K}}$ implikuje relacje $x_1 \in \mathrm{pr}_1(\widetilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$ oraz $x_2 \in \mathrm{pr}_2(\widetilde{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K}_{12}$, więc też $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}$, zatem ostatecznie

$$\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathcal{K}}) \subset \Lambda^{-1}(\mathcal{K}_{12} \times \mathcal{K}_{12}) \equiv \{ \ (g,x) \in \mathrm{G} \times \mathcal{K}_{12} \quad | \quad g \triangleright x \in \mathcal{K}_{12} \ \} \subset \mathrm{G}(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12} \,,$$

co w świetle twierdzenia o zwartości podzbiorów domkniętych przestrzeni topologicznej przesądza o zwartości $\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathcal{K}})$. Istotnie, podzbiór ten jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc – na mocy twierdzenia o domkniętości podzbiorów zwartych przestrzeni Hausdorffa, a wobec hausdorffowskości X, która jest dziedziczona przez $X \times X$ – domkniętego podzbioru $\widetilde{\mathcal{K}}$, a ponieważ – jak pokazaliśmy – jest podzbiorem (pod)przestrzeni zwartej $\mathrm{G}(\mathcal{K}_{12}) \times \mathcal{K}_{12}$ (iloczynu kartezjańskiego zbiorów zwartych), przeto jest – znów na mocy pierwszego z przywoływanych twierdzeń – także zwarty. □

Nierzadko wygodniejszym okazuje się opis działania właściwego zawarty w

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3. Działanie $\lambda \ : \ \mathrm{G} \times X \longrightarrow X$ grupy topologicznej G na lokalnie prezwartej[3] przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T}(X))$ jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy ze zbieżności dowolnego ciągu punktów

$$\lambda(g_., x_.) \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow M \ : \ n \longmapsto g_n \triangleright x_n \,,$$

określonego dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów $x_. \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow X$ oraz dowolnego ciągu elementów $g_. \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G}$, wynika zbieżność pewnego podciągu ciągu $g_.$.

Dowód: Załóżmy najpierw, że odwzorowanie Λ jest właściwe i niechaj $x_. \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow X$ oraz $g_. \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G}$ będą ciągami o własnościach

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X \,, \qquad\qquad y := \lim_{n\to\infty} g_n \triangleright x_n \in X \,.$$

Korzystając z założenia o lokalnej prezwartości X, wybierzmy dowolne zbiory prezwarte $\mathcal{U} \ni x$ oraz $\mathcal{V} \ni y$ zawierające punkty x i – odpowiednio – y wraz z pewnymi ich otoczeniami (otwartymi). Zbieżność $x_.$ do x (wzgl. $\lambda(g_., x_.)$ do y) oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są zawarte w $\mathcal{U}$ (wzgl. $\mathcal{V}$), więc tym bardziej w zwartym zbiorze $\overline{\mathcal{U}}$ (wzgl. $\overline{\mathcal{V}}$), to jednak oznacza, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\Lambda(g_., x_.) \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow X \times X \ : \ n \longmapsto (g_n \triangleright x_n, x_n)$ są zawarte w zwartym podzbiorze $\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}}$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu $(g_., x_.) \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G} \times X \ : \ n \longmapsto (g_n, x_n)$ są zawarte w podzbiorze $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}})$, który wobec właściwego charakteru Λ jest zwarty. Ta cecha $\Lambda^{-1}(\overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{V}})$ przesądza o istnieniu podciągu zbieżnego ciągu $(g_., x_.)$, co w szczególności implikuje zbieżność odnośnego podciągu ciągu $g_.$.

I odwrotnie, załóżmy, że spełniona jest implikacja z końca tezy dowodzonego stwierdzenia. Ustalmy podzbiór zwarty $\mathcal{K} \subset X \times X$ i wybierzmy dowolny ciąg $(g_., x_.)$ (j/w) w zbiorze $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$. Jego obraz w $X \times X$ względem Λ jest zawarty w zwartym podzbiorze $\mathcal{K}$, można zeń przeto wybrać podciąg zbieżny, którego przeciwobraz przecina się z ciągiem wyjściowym $(g_., x_.)$ definiując (pod)ciąg, o którym mowa we wspomnianej wcześniej implikacji. Tym sposobem otrzymujemy podciąg $(g_., x_.)$ w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathrm{G} \times X$ zbieżny w $\mathrm{G} \times X$ w topologii produktowej, a ponieważ zbiór $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty jako ciągły przeciwobraz zwartego, więc też domkniętego (j/w) podzbioru $\mathcal{K}$, przeto granica tego zbieżnego podciągu leży w $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$, co ostatecznie dowodzi zwartości $\Lambda^{-1}(\mathcal{K})$ i tym samym przekonuje, że Λ jest odwzorowaniem właściwym. □

Przykładu bezpośredniego zastosowania powyższego rezultatu jest

Stwierdzenie 5. Działanie topologiczne zwartej grupy topologicznej na dowolnej rozmaitości różniczkowalnej jest właściwe.

Dowód: Każdy ciąg elementów grupy ma podciąg zbieżny z racji zwartości grupy, teza wynika zatem wprost ze Stw. 4. □

[3] Przestrzeń topologiczną nazywamy **lokalnie prezwartą**, jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze prezwartym (tj. takim, którego domknięcie jest zwarte) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu.

Mamy także

Stwierdzenie 6. Działanie dowolnej podgrupy domkniętej dowolnej grupy Liego stanowiące ograniczenie do podgrupy działania regularnego prawego (wzgl. lewego) grupy na sobie jest właściwe.

Dowód: Zastosujemy kryterium ze Stw. 4. Niechaj $g. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G}$ będzie ciągiem zbieżnym, $h. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G}$ zaś – takim, dla którego ciąg $g. \cdot h. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G} : n \longmapsto g_n \cdot h_n$ jest zbieżny. Wobec ciągłości operacji grupowych w G zbieżnym jest wówczas także ciąg $(\mathrm{Inv} \circ g.) \cdot (g. \cdot h.) = h.$. □

Tytułem przygotowania gruntu pod wynik wieńczący nasze rozważania wysłowimy jeszcze

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $((X, \mathscr{T}(X)), \lambda)$ będzie przestrzenią z działaniem topologicznym grupy topologicznej G. Rzut kanoniczny

$$\pi_{X/\mathrm{G}} : X \longrightarrow X/\mathrm{G}$$

na przestrzeń orbit

$$X/\mathrm{G} := \{ \mathrm{G} \triangleright x \quad | \quad x \in X \}$$

jest odwzorowaniem otwartym[4] względem topologii ilorazowej na X/G.

Dowód: Rozważmy zbiór otwarty $\mathcal{O} \subset X$. Jego obraz $\pi_{X/\mathrm{G}}(\mathcal{O})$ jest – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej – otwarty w X/G, jeśli przeciwobraz tego ostatniego,

$$\pi_{X/\mathrm{G}}^{-1}(\pi_{X/\mathrm{G}}(\mathcal{O})) = \{ \lambda(g, x) \quad | \quad (g, x) \in \mathrm{G} \times \mathcal{O} \} \equiv \mathrm{G} \triangleright \mathcal{O}$$

jest otwarty w X. Tak jednak jest w istocie, oto bowiem zbiór ten jest sumą mnogościową

$$\mathrm{G} \triangleright \mathcal{O} = \bigcup_{g \in \mathrm{G}} \lambda_g(\mathcal{O})$$

obrazów zbioru otwartego $\mathcal{O}$ względem automorfizmów λ_g przestrzeni X, czyli zbiorów otwartych. □

Możemy już sformułować fundamentalne

Twierdzenie 2 (O rozmaitości ilorazowej)**.** Przyjmijmy notację Def. 3 oraz Lematu 1 (i wcześniejszą). Ilekroć działanie grupy Liego G na rozmaitości $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ jest gładkie, swobodne i właściwe, przestrzeń orbit M/G jest rozmaitością topologiczną wymiaru $\dim M - \dim \mathrm{G}$ i istnieje na niej jedyna struktura gładka, względem której rzut kanoniczny $\pi_{M/\mathrm{G}}$ jest gładką submersją. Przestrzeń orbit z ową wyróżnioną strukturą rozmaitości nosi miano **rozmaitości ilorazowej**.

Dowód: Zaczniemy od zidentyfikowania struktury rozmaitości topologicznej na zbiorze orbit M/G. Topologia M/G jest topologią ilorazową indukowaną z M: zbiór $\mathcal{O} \subset M/\mathrm{G}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz $\pi_{M/\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w M. Jest to topologia Hausdorffa. Istotnie, wykorzystajmy relację równoważności $\mathscr{R}_\lambda$ na M, jaką jest przynależność do tej samej orbity działania G,

$$\mathscr{R}_\lambda = \Lambda(\mathrm{G} \times M) \subset M \times M ,$$

gdzie Λ jest odwzorowaniem zdefiniowanym w Równ. 1. Relacja ta zadaje rozkład M na wzajem rozłączne orbity działania grupy G. Niechaj x i y będą punktami w M, których obrazy $\pi_{M/\mathrm{G}}(x)$ i $\pi_{M/\mathrm{G}}(y)$ są dwoma różnymi punktami w przestrzeni orbit, tj. $\pi_{M/\mathrm{G}}(x) \neq \pi_{M/\mathrm{G}}(y)$, a wtedy $(x_1, x_2) \notin \mathscr{R}_\lambda$, a ponieważ podzbiór $\mathscr{R}_\lambda \subset M \times M$ jest w świetle twierdzenia o domkniętości odwzorowania właściwego o prezwartej przeciwdziedzinie domknięty w topologii produktowej na $M \times M$ jako ciągły obraz zbioru domkniętego $\mathrm{G} \times M$ względem odwzorowania właściwego Λ,

[4] **Odwzorowanie otwarte** między przestrzeniami topologicznymi to takie, które przeprowadza podzbiory otwarte dziedziny w podzbiory otwarte przeciwdziedziny.

przeto istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_{(x_1,x_2)} \ni (x_1,x_2)$ o własności $\mathcal{O}_{(x_1,x_2)} \cap \mathscr{R}_\lambda = \varnothing$. Wprost na mocy definicji topologii produktowej otoczenie takie jest sumą mnogościową pewnej rodziny iloczynów kartezjańskich podzbiorów otwartych w M, wybierając zatem dowolny z nich – powiedzmy $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathscr{T}(M)$ – otrzymujemy relacje $\mathcal{O}_\alpha \ni x_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ oraz $(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \cap \mathscr{R}_\lambda = \varnothing$, a zatem także $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_\alpha) \ni \pi_{M/\mathrm{G}}(x_\alpha)$, przy czym koniecznie $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_1) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_2) = \varnothing$, w przeciwnym bowiem razie istniałyby punkty $y_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ należące do wspólnej orbity działania G, a zatem także $(y_1,y_2) \in \mathscr{R}_\lambda \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$, co przeczyłoby rozłączności $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ i $\mathscr{R}_\lambda$. W konsekwencji Lematu 1 zbiory $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_\alpha)$ są otwartymi otoczeniami punktów $\pi_{M/\mathrm{G}}(x_\alpha)$ w przestrzeni orbit.

W następnej kolejności dokonamy rozkładu rozmaitości M na włożone weń gładko orbity działania grupy G, po czym stowarzyszymy z tym rozkładem stosowne lokalne mapy, w których współrzędne kartografujące kierunki transwersalne do (bliskich sobie) orbit zostaną ostatecznie wykorzystane w konstrukcji atlasu przestrzeni orbit. Punktem wyjścia do tak zakreślonej taktyki jest upewnienie się, że orbity działania grupy są w istocie podrozmaitościami gładko włożonymi w M. W tym celu rozważymy odwzorowanie gładkie, określone dla dowolnego (ustalonego) punktu $x \in M$,

$$\Omega_x \equiv \lambda(\cdot, x) \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow M \;:\; g \longmapsto \lambda(g,x)\,,$$

o oczywistej własności

$$\Omega_x(\mathrm{G}) = \mathrm{G} \triangleright x\,.$$

Odwzorowanie to jest jawnie G-ekwiwariantne,

$$\forall_{g \in \mathrm{G}} \;:\; \Omega_x \circ \ell_g = \lambda_g \circ \Omega_x\,,$$

tj. splata ze sobą działania G: lewe regularne na sobie oraz λ na M, a ponieważ pierwsze z tych działań jest przechodnie, przeto możemy odnieść do Ω_x tezę Tw. 1, wnioskując o stałości rzędu tego odwzorowania. Ponadto jest ono injekcją, oto bowiem równość

$$g_2 \triangleright x = \Omega_x(g_2) = \Omega_x(g_1) = g_1 \triangleright x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(g_2^{-1} \cdot g_1\big) \triangleright x = x$$

oznacza – wobec założenia dotyczącego charakteru działania λ – równość

$$g_2^{-1} \cdot g_1 = e \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_2 = g_1\,.$$

To jednak w połączeniu z wcześniejszą konkluzją, a w odwołaniu do twierdzenia o immersywności gładkiej injekcji o stałym rzędzie (wynikającego wprost z twierdzenia o stałym rzędzie), pozwala stwierdzić, że Ω_x jest immersją. Przy tym ilekroć $\mathcal{K} \subset M$ jest zwarty, więc też (wobec hausdorffowskości M) domknięty, jego przeciwobraz $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest domknięty w G wobec ciągłości Ω_x, a ponieważ dla dowolnego należącego doń elementu g zachodzi relacja $g \triangleright x \in \mathcal{K}$, czyli też

$$\big(g \triangleright \big(\mathcal{K} \cup \{x\}\big)\big) \cap \big(\mathcal{K} \cup \{x\}\big) = \big(g \triangleright \mathcal{K} \cup \{g \triangleright x\}\big) \cap \big(\mathcal{K} \cup \{x\}\big) \supset \{g \triangleright x\} \neq \varnothing\,,$$

co implikuje jego zawieranie się

$$\Omega_x^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathrm{G}\big(\mathcal{K} \cup \{x\}\big)$$

w zbiorze $\mathrm{G}(\mathcal{K} \cup \{x\})$, który jest zwarty na mocy Stw. 3, przeto $\Omega_x^{-1}(\mathcal{K})$ jest zwarty. To zaś oznacza, że Ω_x jest odwzorowaniem właściwym, a zatem ostatecznie – w konsekwencji poprzednich ustaleń – gładkim włożeniem (jest nim każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym – patrz: Niezbędnik Rozmaitości).

Wybierzmy (dowolnie) punkt $x \in M$, a wraz z nim jego przeciwobraz $e \in \mathrm{G}$ względem Ω_x, i lokalne mapy: $\kappa_e \;:\; \mathcal{O}_e \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$, $D = \dim \mathrm{G}$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_e$ elementu neutralnego e w G oraz $\kappa_x \;:\; \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$, $N = \dim M$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu x w M, w których lokalna prezentacja włożenia Ω_x przybiera postać kanoniczną (jako immersja), czyli

$$\mathrm{G} \triangleright \{x\} \cap \mathcal{O}_x = \kappa_x^{-1}\big(\mathcal{U}_x \times \{\mathbf{0}_n\}\big)\,,$$

gdzie $\mathcal{U}_x \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times D})$ jest homeomorficznym obrazem fragmentu orbity x zawartego w $\mathcal{O}_x$. Niechaj

$$\Delta_x := \kappa_x^{-1}\big(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathbb{R}^{\times N}\big)$$

będzie podrozmaitością $\mathcal{O}_x$ transwersalną do (fragmentu) rzeczonej orbity $\mathrm{G} \rhd \{x\}$, wyznaczającą rozkład przestrzeni stycznej

$$\mathsf{T}_x M = \mathsf{T}_x(\mathrm{G} \rhd \{x\}) \oplus \mathsf{T}_x \Delta_x \,,$$

w którym wobec immersywności Ω_x identyfikujemy

$$\mathsf{T}_e \Omega_x\big(\mathsf{T}_e \mathrm{G}\big) \equiv \mathsf{T}_x\big(\mathrm{G} \rhd \{x\}\big) \subset \mathsf{T}_x M \,. \tag{2}$$

Oznaczmy dalej

$$\delta_x := \lambda\restriction_{\mathrm{G}\times\Delta_x} \;:\; \mathrm{G} \times \Delta_x \longrightarrow M \,.$$

Wykażemy, że δ_x jest dyfeomorfizmem na pewnym otoczeniu punktu $(e,x) \in \mathrm{G} \times \Delta_x$. W tym celu wykorzystamy gładkie włożenie

$$\imath_x \;:\; \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \times \Delta_x \;:\; g \longmapsto (g,x)$$

do rozłożenia odwzorowania Ω_x wedle schematu

$$\Omega_x = \delta_x \circ \imath_x \,,$$

a zatem także – stycznego do niego:

$$\mathsf{T}_e \Omega_x = \mathsf{T}_{(e,x)} \delta_x \circ \mathsf{T}_e \imath_x \,.$$

Zważywszy Równ. (2), konstatujemy prawdziwość relacji

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G}\times\Delta_x)\big) &\equiv \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_e\mathrm{G} \oplus \mathsf{T}_x\Delta_x\big) \supset \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_e\mathrm{G} \oplus \{0_{\mathsf{T}_x\Delta_x}\}\big) \\ &\equiv \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x \circ \mathsf{T}_e\imath_x\big(\mathsf{T}_e\mathrm{G}\big) = \mathsf{T}_e\Omega_x\big(\mathsf{T}_e\mathrm{G}\big) = \mathsf{T}_x\big(\mathrm{G} \rhd \{x\}\big) \,. \end{aligned}$$

Wprowadźmy dalej gładkie włożenie

$$\imath_e \;:\; \Delta_x \longrightarrow \mathrm{G} \times \Delta_x \;:\; y \longmapsto (e,y)$$

podrozmaitości transwersalnej do (lokalnego fragmentu) orbity $\mathrm{G} \rhd \{x\}$, aby móc rozłożyć gładkie włożenie $\jmath_{\Delta_x} \;:\; \Delta_x \longrightarrow M$ w postaci

$$\jmath_{\Delta_x} = \delta_x \circ \imath_e$$

i – co za tym idzie – styczne do niego:

$$\mathsf{T}_y \jmath_{\Delta_x} = \mathsf{T}_{(e,y)} \delta_x \circ \mathsf{T}_y \imath_e \,.$$

Wobec oczywistej równości

$$\mathsf{T}_x \imath_e(\mathsf{T}_x\Delta_x) = \{0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}\} \oplus \mathsf{T}_x\Delta_x$$

otrzymujemy tym razem relację

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G}\times\Delta_x)\big) &\supset \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\{0_{\mathsf{T}_e\mathrm{G}}\} \oplus \mathsf{T}_x\Delta_x\big) \equiv \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x \circ \mathsf{T}_x\imath_e(\mathsf{T}_x\Delta_x) \\ &= \mathsf{T}_x\jmath_{\Delta_x}(\mathsf{T}_x\Delta_x) \equiv \mathsf{T}_x\Delta_x \subset \mathsf{T}_x M \,, \end{aligned}$$

ostatecznie zatem stwierdzamy, że

$$\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G}\times\Delta_x)\big) \supset \mathsf{T}_x(\mathrm{G} \rhd \{x\}) \oplus \mathsf{T}_x\Delta_x \equiv \mathsf{T}_x M \,,$$

skoro zaś zarazem

$$\mathsf{T}_x M \supset \mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G}\times\Delta_x)\big) \,,$$

to nieuchronnie

$$\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x\big(\mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G}\times\Delta_x)\big) = \mathsf{T}_x M \,,$$

co dowodzi surjektywności $\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x$, a ponieważ jest też – wobec ustalonej wcześniej immersywności Ω_x –

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{(e,x)}(\mathrm{G}\times\Delta_x) &\equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_e\mathrm{G} + \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x\Delta_x \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x(\mathrm{G} \rhd \{x\}) + \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x\Delta_x \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x M \,, \end{aligned}$$

przeto $\mathsf{T}_{(e,x)}\delta_x$ jawi się bijekcją. Na tym etapie możemy już odwołać się do twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań, aby orzec istnienie pewnego otoczenia otwartego $\mathcal{V}_x$ punktu $(e,x) \in \mathrm{G} \times \Delta_x$ odwzorowywanego dyfeomorficznie przez (ograniczenie) δ_x w pewne otoczenie otwarte $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ punktu $x \in M$. Biorąc pod uwagę naturę topologii (produktowej) na $\mathrm{G} \times \Delta_x$ (wedle schematu myślowego wyłożonego na początku niniejszego dowodu w uzasadnieniu hausdorffowskości topologii ilorazowej na przestrzeni orbit), upewniamy się, że pierwsze z tych otoczeń można wybrać w postaci produktowej $\mathcal{V}_x = \mathcal{W}_e \times \mathcal{W}_x$, przy czym z każdego z otoczeń: $\mathcal{W}_a$, $a \in \{e,x\}$ można wyjąć prezwarte przeciwobrazy pewnych kul otwartych $B^D(\widetilde{\kappa}_e(e) = \mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \equiv \widetilde{\kappa}_e(\widetilde{\mathcal{W}}_e)$, $\varepsilon_e > 0$ oraz – odpowiednio – $B^{N-D}(\widetilde{\kappa}_x(x) = \mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \equiv \widetilde{\kappa}_x(\widetilde{\mathcal{W}}_x)$, $\varepsilon_x > 0$ względem lokalnych map $\widetilde{\kappa}_e : \mathcal{W}_e \longrightarrow \mathbb{R}^{\times D}$ oraz – odpowiednio – $\widetilde{\kappa}_x : \mathcal{W}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N-D}$. W dalszej części naszej analizy skupimy uwagę na otoczeniu produktowym $\widetilde{\mathcal{V}}_x \equiv \widetilde{\mathcal{W}}_e \times \widetilde{\mathcal{W}}_x$.

W następnej kolejności pokażemy, że otoczenie $\widetilde{\mathcal{W}}_x \subset \Delta_x$ można wybrać na tyle małym, ażeby każda orbita działania G przecinała je w co najwyżej jednym punkcie. Załóżmy przeciwnie i rozważmy przeliczalną bazę otoczeń x w $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ złożoną z przeciwobrazów względem $\widetilde{\kappa}_x$ rodziny kul otwartych $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n)$, $r_n := \frac{1}{E(\varepsilon_x^{-1})+n}$, $n \in \mathbb{N}$. W każdym z przeciwobrazów $\mathcal{B}_n \equiv \widetilde{\kappa}_x^{-1}(B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; r_n))$ tkwi para punktów x_n oraz $y_n \neq x_n$ należących do tej samej orbity, tj. spełniających warunek $y_n = g_n \triangleright x_n$ dla pewnego elementu $g_n \in \mathrm{G}$. Przy tym wobec założonej postaci bazy otoczeń oba ciągi punktów w (prezwartym) $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ zbiegają do x,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} (g_n \triangleright x_n)\,,$$

a zatem – w świetle Stw. 4, a z racji właściwego charakteru λ – ciąg $g_\cdot$ zdefiniowany przez parę ciągów $(x_\cdot, y_\cdot)$ zawiera podciąg $g_{n_\cdot}$ zbieżny do pewnego elementu $g \in \mathrm{G}$. Ciągłość działania λ pozwala nam zatem zapisać ciąg równości

$$g \triangleright x \equiv \lambda\big(\lim_{k\to\infty} (g_{n_k}, x_{n_k})\big) = \lim_{k\to\infty} \lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) \equiv \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x\,,$$

a ponieważ mamy do czynienia z działaniem wolnym, przeto nieodzownie $g = e$. Jednakowoż dla dostatecznie dużych wartości $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $g_{n_k} \in \widetilde{\mathcal{W}}_e$, przy czym $g_{n_k} \neq e$ (wszak $y_{n_k} \neq x_{n_k}$) więc też

$$\lambda(g_{n_k}, x_{n_k}) = y_{n_k} = \lambda(e, y_{n_k})\,,$$

co z racji injektywności $\delta_x \restriction_{\widetilde{\mathcal{W}}_e \times \widetilde{\mathcal{W}}_x} \equiv \lambda \restriction_{\widetilde{\mathcal{W}}_e \times \widetilde{\mathcal{W}}_x}$ implikuje równość

$$(g_{n_k}, x_{n_k}) = (e, y_{n_k})\,,$$

prowadzącą do jawnej sprzeczności. Otoczenie $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ o postulowanej cesze zawsze zatem istnieje.

Rozważmy teraz złożenie dyfeomorfizmów

$$\phi_x := (\widetilde{\kappa}_e \times \widetilde{\kappa}_x) \circ \big(\delta_x \restriction_{\widetilde{\mathcal{V}}_x}\big)^{-1} \;:\; \widetilde{\mathcal{O}}_x \xrightarrow{\cong} \widetilde{\mathcal{V}}_x \equiv \widetilde{\mathcal{W}}_e \times \widetilde{\mathcal{W}}_x \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x)\,.$$

Pokażemy, że określa ono lokalną mapę zgodną z działaniem grupy G w tym naturalnym sensie, że orbity tegoż działania są w tej mapie hiperpłaszczyznami parametryzowanymi przez pierwszych D współrzędnych. Zacznijmy od tego, że wobec otwartości zarówno swojej dziedziny, jak i przeciwdziedziny dyfeomorfizm ϕ_x dopuszcza postulowaną interpretację, pozostaje więc jedynie upewnić się co do słuszności naszych oczekiwań dotyczących opisu fragmentów orbit zawartych w jego dziedzinie. Mamy

$$\begin{aligned} \phi_x^{-1} \;:\; & \quad B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_x) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{O}}_x \\ : & \quad (\xi, \zeta) \longmapsto \delta_x\big(\widetilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)\big) \equiv \lambda\big(\widetilde{\kappa}_e^{-1}(\xi), \widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta)\big)\,, \end{aligned}$$

bez trudu przeto stwierdzamy, że dowolna hiperpowierzchnia $\zeta = \zeta_* = \mathrm{const}$ jest zawarta w pojedynczej orbicie, oto bowiem jej dyfeomorficzny przeciwobraz w M względem ϕ_x spełnia relację

$$\phi_x^{-1}\big(B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_e) \times \{\zeta_*\}\big) \equiv \lambda\big(\widetilde{\mathcal{W}}_e \times \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}\big) \subset \lambda\big(\mathrm{G} \times \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}\big) \equiv \mathrm{G} \triangleright \{\widetilde{\kappa}_x^{-1}(\zeta_*)\}\,.$$

Rozumowanie to pokazuje, że dowolna orbita $\mathrm{G} \triangleright \{y\}$, $y \in M$ przecina $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ wzdłuż sumy mnogościowej (fragmentów) hiperpowierzchni o opisie współrzędniowym $\zeta = \zeta_i = \mathrm{const}$, $i \in I_y$ dla pewnego zbioru indeksów I_y. Otoczenie $\widetilde{\mathcal{W}}_x$ zostało jednak wybrane tak, iżby dowolna orbita przecinała je w *co najwyżej jednym* punkcie, wobec czego $|I_y| \leq 1$. Lokalna mapa ϕ_x jest zatem – w istocie – zgodna z działaniem G w określonym wyżej znaczeniu i może być wykorzystana w kartografowaniu przestrzeni orbit na otoczeniu punktu $\pi_{M/\mathrm{G}}(x) \equiv [x]$.

Skonstruujemy teraz lokalną mapę na otoczeniu $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$ punktu $[x]$, pamiętając, że otwartość zbioru $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x) \ni [x]$ w topologii ilorazowej jest zapewniona przez otwartość rzutu kanonicznego $\pi_{M/\mathrm{G}}$, stwierdzoną w Lemacie 1. Oznaczmy lokalne cięcie przez x w poprzek orbit zawartych w $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ symbolem

$$\widetilde{\Delta}_x := \phi_x^{-1}\big(\{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x)\big)$$

i zauważmy, że ograniczenie rzutu kanonicznego

$$\pi_{M/\mathrm{G}}\restriction_{\widetilde{\Delta}_x} \,:\, \widetilde{\Delta}_x \longrightarrow \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$$

jest bijekcją w świetle założeń poczynionych w odniesieniu do charakteru przecięć orbit działania G z $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ oraz z racji potwierdzonej zgodności mapy ϕ_x z tymże działaniem. Przy tym ilekroć $\mathcal{W} \subset \widetilde{\Delta}_x$ jest podzbiorem otwartym, jego obraz w przestrzeni orbit

$$\begin{aligned}\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{W}) \quad &\equiv \quad \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \phi_x^{-1}\big(\{\mathbf{0}_D\} \times \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})\big) \\ &= \quad \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \phi_x^{-1}\big(B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})\big)\end{aligned}$$

jest w oczywisty sposób otwarty jako obraz względem złożenia odwzorowań otwartych zbioru $B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej – wszak ϕ_x jest homeomorfizmem, więc też odwzorowaniem otwartym, a rzut na drugą składową zadanego przezeń zbioru $\phi_x(\mathcal{W})$ otwartego w topologii produktowej, czyli będącego sumą mnogościową iloczynów kartezjańskich zbiorów otwartych, jest takąż sumą rzutów tychże iloczynów na drugą składową, więc także zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{\times N-D}$. Koniec końców odwzorowanie ograniczone $\pi_{M/\mathrm{G}}\restriction_{\widetilde{\Delta}_x}$ jest zatem homeomorfizmem, którego ciągłą odwrotność będziemy oznaczać symbolem

$$\sigma_{[x]} := \big(\pi_{M/\mathrm{G}}\restriction_{\widetilde{\Delta}_x}\big)^{-1} \,:\, \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Delta}_x\,.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\psi_{[x]} := \mathrm{pr}_2 \circ \phi_x \circ \sigma_{[x]} \,:\, \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x) \xrightarrow{\cong} \widetilde{\Delta}_x \xrightarrow{\cong} \{\mathbf{0}_D\} \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x) \longrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x)\,,$$

które – jak łatwo widać – jest homeomorfizmem otoczenia otwartego $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$ na kulę otwartą $B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x) \subset \mathbb{R}^{\times N-D}$, czyli – innymi słowy – lokalną mapą klasy C^0. Należy przy tym podkreślić, że lokalna prezentacja rzutu kanonicznego określona przez lokalną mapę ϕ_x na $\widetilde{\mathcal{O}}_x$ oraz stowarzyszoną z nią lokalną mapę $\psi_{[x]}$ na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_x)$ przyjmuje prostą postać

$$\psi_{[x]} \circ \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \phi_x^{-1} \,:\, B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_e) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x) \twoheadrightarrow B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_x)\,,$$

o jawnie submersywnym charakterze. Odwzorowanie $\sigma_{[x]}$ ma zatem naturalną interpretację ciecia lokalnego submersji $\pi_{M/\mathrm{G}}$. Jeśli więc zaindukujemy strukturę rozmaitości na M/G z tej na rozmaitości M (j/w) przy użyciu podatlasu na M utworzonego przez wszystkie możliwe mapy lokalne na M zgodne z działaniem G i wszystkie cięcia lokalne rzutu kanonicznego nad obrazami – względem tegoż cięcia – ich dziedzin, to dla zakończenia dowodu twierdzenia pozostanie nam jedynie wykazać gładkość odwzorowań przejścia między mapami określonymi na przecinających się niepusto otoczeniach w przestrzeni orbit, a na koniec – jedyność tak otrzymanej struktury gładkiej.

Niechaj zatem $\psi_{[x_A]} \,:\, \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_A}) \xrightarrow{\cong} B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D};\varepsilon_{x_A}),\ A \in \{1,2\}$ będą dwiema lokalnymi mapami spełniającymi warunek $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \neq \varnothing$, a stowarzyszonymi z lokalnymi mapami $\phi_{x_A} \,:\, \widetilde{\mathcal{O}}_{x_A} \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D;\varepsilon_{e;A}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_n;\varepsilon_{x_A})$. Przecinanie się rzutów $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_A})$ otoczeń $\widetilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ odnośnych punktów x_A oznacza, że są w tych otoczeniach punkty $y_A \in \widetilde{\mathcal{O}}_{x_A}$ należące do tej samej orbity, tj. $y_2 = g_{21} \triangleright y_1$ dla pewnego elementu $g_{21} \in \mathrm{G}$, możemy zatem bez straty ogólności (dokonawszy – jeśli trzeba – trywialnego przesunięcia w przeciwdziedzinach obu map ϕ_{x_A}) przyjąć, że $y_A = x_A$ i jest spełniony warunek

$$x_2 = g_{21} \triangleright x_1\,.$$

Załóżmy najpierw, że $g_{21} = e$, a wtedy możemy wprost rozpatrzeć odwzorowanie przejścia między mapami $\phi_{x_1} = (\xi_1, \zeta_1)$ i $\phi_{x_2} = (\xi_2, \zeta_2)$ na zbiorze $\mathcal{O}_{12} := \widetilde{\mathcal{O}}_{x_1} \cap \widetilde{\mathcal{O}}_{x_2}$. Jako że przecięcia dowolnej orbity z każdym z otoczeń odpowiadają stałej i jedynej wartości ζ_1 *oraz* takiejż wartości ζ_2, przeto gładkie (wprost na mocy konstrukcji) odwzorowanie przejścia między obiema mapami jest postaci

$$\begin{aligned} \phi_{x_2} \circ \big(\phi_{x_1} \restriction_{\mathcal{O}_{12}}\big)^{-1} \quad &: \quad \phi_{x_1}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \phi_{x_2}(\mathcal{O}_{12}) \\ &: \quad \big(\xi_1(y), \zeta_1(y)\big) \longmapsto \big(F_1 \circ (\xi_1, \zeta_1), F_2 \circ \zeta_1\big)(y) \,, \end{aligned}$$

gdzie F_1 i F_2 są pewnymi odwzorowaniami gładkimi. W szczególności więc otrzymujemy relację

$$\zeta_2(y) = F_2 \circ \zeta_1(y) \,, \quad y \in \mathcal{O}_{12} \,,$$

z której odczytujemy jawnie gładką postać odwzorowania przejścia między mapami indukowanymi:

$$\begin{aligned} &\psi_{[x_2]} \circ \big(\psi_{[x_1]} \restriction_{\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{12})}\big)^{-1} \\ : \quad &\psi_{[x_1]} \circ \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{12}) \xrightarrow{\cong} \psi_{[x_2]} \circ \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{12}) \\ : \quad &\mathrm{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \big(\pi_{M/\mathrm{G}} \restriction_{\widetilde{\Delta}_{x_1}}\big)^{-1} \big(\pi_{M/\mathrm{G}}(y)\big) \equiv \zeta_1(y) \longmapsto \zeta_2(y) = F_2\big(\zeta_1(y)\big) \,. \end{aligned}$$

W przypadku $g_{21} \neq e$ nie możemy wprawdzie *a priori* rozważać odwzorowań przejścia między mapami ϕ_{x_1} i ϕ_{x_2} na $\mathcal{O}_{12}$ (zbiór ten może być w szczególności pusty), ale możemy zastąpić mapę lokalną ϕ_{x_2} oraz cięcie lokalne $\sigma_{[x_2]}$ użyte w definicji mapy lokalnej $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{x_2})$ innymi z tego samego podatlasu na M i – odpowiednio – zbioru cięć lokalnych rzutu kanonicznego, indukujących mapy lokalne na przestrzeni orbit, które wspólnie wyznaczają *tę samą* mapę lokalną $\psi_{[x_2]}$ na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{x_2})$, ale jednocześnie przeprowadzają punkt z jej dziedziny przez zbiór otwarty w nakryciu M przecinający się z $\mathcal{O}_{x_1}$ w pewnym otoczeniu otwartym x_1, co sprowadza nas do poprzednio zweryfikowanego przypadku. Otóż więc użyjmy automorfizmu $\lambda_{g_{21}}$, aby zdefiniować odwzorowanie

$$\phi^{21}_{x_1} := \phi_{x_2} \circ \lambda_{g_{21}} \; : \; \lambda_{g_{21}^{-1}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2}) \xrightarrow{\cong} B^D(\mathbf{0}_D; \varepsilon_{e;2}) \times B^{N-D}(\mathbf{0}_{N-D}; \varepsilon_{x_2})$$

na otwartym (wprost z konstrukcji) otoczeniu $\lambda_{g_{21}^{-1}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})$ punktu x_1. Jako że automorfizm $\lambda_{g_{21}}$ przeprowadza orbity na orbity, $\phi^{21}_{x_1}$ jest mapą lokalną zgodną z działaniem G. Definicję tę uzupełniamy stosowną definicją lokalnego cięcia rzutu kanonicznego nad $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})$,

$$\sigma^{21}_{[x_2]} := \lambda_{g_{21}^{-1}} \circ \sigma_{[x_2]} \,.$$

Ta ostatnia ma sens, gdyż

$$\pi_{M/\mathrm{G}} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} = \pi_{M/\mathrm{G}} \circ \sigma_{[x_2]} = \mathrm{id}_{\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})} \,,$$

a przy tym zgodnie z zapowiedzią odtwarza, w połączeniu z nową mapą lokalną, wyjściową mapę lokalną na $\pi_{M/\mathrm{G}}(\widetilde{\mathcal{O}}_{x_2})$, o czym przekonuje bezpośredni rachunek:

$$\psi^{21}_{[x_2]} := \mathrm{pr}_2 \circ \phi^{21}_{x_1} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \lambda_{g_{21}} \circ \lambda_{g_{21}^{-1}} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_{x_1} \circ \sigma^{21}_{[x_2]} \equiv \psi_{[x_2]} \,.$$

To kończy dowód istnienia struktury gładkiej, o której jest mowa w tezie twierdzenia. Należy jeszcze wykazać struktury tej jedyność.

W tym celu rozważmy dowolne dwie takie struktury na tej samej przestrzeni orbit M/G, oznaczając odnośne jej kopie indeksem: $(M/\mathrm{G})_A$, $A \in \{1, 2\}$ dla wygodnego odróżnienia. Wprost na mocy poczynionego założenia rzut kanoniczny $\pi_{M/\mathrm{G}} \; : \; M \twoheadrightarrow (M/\mathrm{G})_A$, $A \in \{1, 2\}$ jest w obu przypadkach gładką surjektywną submersją, można zatem odnieść do niego tezę twierdzenia o kwazi-uniwersalnej własności submersji, i to na dwa sposoby: możemy oto zapisać trywialny diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & (M/\mathrm{G})_2 \\ M \arrow[ur, "\pi_{M/\mathrm{G}}"] \arrow[r, "\pi_{M/\mathrm{G}}"'] & (M/\mathrm{G})_1 \arrow[u, "\mathrm{id}_{M/\mathrm{G}}"'] \end{tikzcd} ,$$

w którym traktujemy $\pi_{M/\mathrm{G}} : M \twoheadrightarrow (M/\mathrm{G})_1$ jako submersję, $\pi_{M/\mathrm{G}} : M \twoheadrightarrow (M/\mathrm{G})_2$ zaś (to samo odwzorowanie) – jako odwzorowanie referencyjne, którego gładkość przesądza o gładkości $\mathrm{id}_{M/\mathrm{G}}$; możemy też zamienić miejscami (i rolami) $(M/\mathrm{G})_1$ i $(M/\mathrm{G})_2$, co prowadzi do wniosku, że także wtedy, gdy traktujemy $\mathrm{id}_{M/\mathrm{G}}$ jako odwzorowanie z $(M/\mathrm{G})_2$ w $(M/\mathrm{G})_1$, jest ono gładkie, co jest równoznaczne z równoważnością obu struktur różniczkowych. □

Uwaga 2. Często przyjmuje się, że nośnik struktury rozmaitości topologicznej powinien spełniać drugi aksjomat przeliczalności. Bez trudu przekonujemy się, że przestrzeń orbit M/G ma tę cechę, oto bowiem obraz dowolnej skończonej lub przeliczalnie nieskończonej bazy $\mathscr{O} := \{\mathcal{O}_n\}_{n\in I\subseteq\mathbb{N}}$ topologii M względem rzutu kanonicznego na przestrzeń orbit, $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathscr{O}) = \{\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_n)\}_{n\in I\subset\mathbb{N}}$, jest – w świetle Lematu 1 – odpowiednią bazą topologii (ilorazowej) M/G. Istotnie, $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathscr{O})$ jest pokryciem otwartym M/G, a ponadto dla dowolnej pary $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}), \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2})$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ elementów tej rodziny o niepustym przecięciu $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni \mathrm{G} \triangleright x$, $x \in M$ istnieje element $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \subset \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2})$ o własności $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_{12}}) \ni \mathrm{G} \triangleright x$. W rzeczy samej, z relacji $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2}) \ni \mathrm{G} \triangleright x$ wynika istnienie punktów $x_A \in \mathcal{O}_{n_A}$, $A \in \{1, 2\}$ oraz elementu grupy $g_{21} \in \mathrm{G}$ spełniających relację $x_2 = g_{21} \triangleright x_1$, wobec czego zbiór $\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})$ ma niepuste przecięcie z $\mathcal{O}_{n_2}$, a ponieważ jest otwarty (jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego), przeto jest sumą mnogościową pewnej rodziny elementów bazy $\mathscr{O}$. Przynajmniej jeden element tej rodziny – oznaczmy go $\mathcal{O}_{n_{12}}$ – przecina się niepusto z $\mathcal{O}_{n_2}$, a zatem – wprost na mocy definicji bazy topologii – istnieje element $\mathcal{O}_{n_{122}} \in \mathscr{O}$ spełniający warunek

$$\mathcal{O}_{n_{122}} \subset \mathcal{O}_{n_{12}} \cap \mathcal{O}_{n_2} \subset \lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2} ,$$

z którego wynika już pożądany warunek

$$\begin{aligned} \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_{122}}) &\subset \pi_{M/\mathrm{G}}\big(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \mathcal{O}_{n_2}\big) \subset \pi_{M/\mathrm{G}}\big(\lambda_{g_{21}}(\mathcal{O}_{n_1})\big) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2}) \\ &= \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_1}) \cap \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_2}) . \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec zauważmy, że dla dowolnego zbioru otwartego $\mathcal{O} \subset M/\mathrm{G}$ zachodzi – wprost na mocy definicji topologii ilorazowej oraz wobec bazowego charakteru $\mathscr{O}$ – tożsamość

$$\pi_{M/\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{n_i} ,$$

w której $I \subset \mathbb{N}$ jest pewnym zbiorem indeksów. Wobec powyższego otrzymujemy równość

$$\pi_{M/\mathrm{G}}\big(\pi_{M/\mathrm{G}}^{-1}(\mathcal{O})\big) = \pi_{M/\mathrm{G}}\big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{n_i}\big) = \bigcup_{i\in I} \pi_{M/\mathrm{G}}(\mathcal{O}_{n_i}) ,$$

która przesądza o bazowym charakterze $\pi_{M/\mathrm{G}}(\mathscr{O})$.

Na zakończenie tej części wykładu wypowiemy stwierdzenie istotne z punktu widzenia zastosowań teorii grup Liego w opisie nieliniowych realizacji symetrii w teorii pola (w szczególności w modelowaniu efektywnej teorii pola „małych" wzbudzeń klasycznej jej próżni), a mianowicie

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Lematu 1 i niechaj G będzie grupą Liego, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ zaś – jej podgrupą domkniętą. Istnieje dokładnie jedna struktura rozmaitości gładkiej na przestrzeni ilorazowej G/H z topologią ilorazową zaindukowaną z G, względem której rzut kanoniczny $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{H}$ jest surjektywną submersją. Naturalne lewe działanie

$$[\ell]. : \mathrm{G} \times (\mathrm{G}/\mathrm{H}) \to \mathrm{G}/\mathrm{H} : (\widetilde{g}, g\mathrm{H}) \longmapsto (\widetilde{g} \cdot g)\mathrm{H} \tag{3}$$

jest gładkie względem tej struktury. Gładka rozmaitość G/H z działaniem grupy G określona tym sposobem nosi miano **gładkiej przestrzeni jednorodnej** G.

Dowód: Rozważmy działanie $\wp : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} : (g, h) \longmapsto g \cdot h$ podgrupy $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ na grupie G otrzymane w wyniku ograniczenia do tejże podgrupy prawego działania regularnego G na sobie. Jest ono jawnie swobodne, a przy tym możemy je zapisać jako superpozycję

$$\wp = m \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \jmath_{\mathrm{H}})$$

odwzorowań gładkich (przy czym gładkość kanonicznego włożenia $\jmath_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}$ wynika wprost z twierdzenia Cartana o podgrupie domkniętej grupy Liego), zatem jest też gładkie. W świetle Stw. 6 jest ono również właściwe, możemy więc odnieść do pary (G, H) tezę Tw. 2, konstatując prawdziwość pierwszej części tezy twierdzenia dowodzonego. Pozostaje zatem wykazać gładkość działania $[\lambda]$. Zauważmy, że działanie to domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{G}/\mathrm{H} \\ \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[ur, "\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \circ m"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \pi_{M/\mathrm{G}}"'] & \mathrm{G} \times (\mathrm{G}/\mathrm{H})_1 \arrow[u, "{[\lambda]}"'] \end{tikzcd} ,$$

w którym w świetle dowiedzionej części tezy oraz oczywistej submersywności mnożenia grupowego m superpozycja $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \circ m$ jest submersją, co pozwala zastosować twierdzenie o kwazi-uniwersalnej własności submersji, aby wywnioskować gładkość $[\lambda]$ z gładkości produktu $\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \pi_{M/\mathrm{G}}$, wynikającej ze stwierdzonej wcześniej gładkości $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}$. □

Powyższe twierdzenie zamyka błyskawiczny kurs podstaw teorii grup Liego i rozmaitości z działaniem tychże, niezodzowny dla rzetelnego wprowadzenia do teorii wiązek głównych i stowarzyszonych z nimi, do którego przejdziemy obecnie.