# GR II W CZASACH ZARAZY
## 5. WYKŁAD ZDALNY

### Wiązki główne z grupą strukturalną

Nasz tour d'horizon po krainie grup i algebr Liego dał nam do ręki intuicje i narzędzia formalne nieodzowne do sprawnego i konstruktywnego poruszania się w środowisku struktur geometrycznych kluczowych dla modelowania symetrii lokalnych (a ściślej: ulokalnionych symetrii globalnych) w mechanice klasycznej i teorii pola. Wracamy teraz do ich szczegółowej dyskusji.

**Definicja 1.** Niechaj $\mathrm{G}$ będzie grupą Liego. **Wiązka główna** o **grupie strukturalnej** $\mathrm{G}$ to wiązka włóknista

$$(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ z wolnym działaniem prawostronnym $r.$ grupy strukturalnej $\mathrm{G}$, które jest przechodnie we włóknie nad (dowolnym) punktem bazy, co opisuje diagram przemienny
$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & B \end{tikzcd} \;;$$
- lokalne trywializacje
$$\tau_i \;:\; \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}\,, \quad i \in I$$
stowarzyszone z pokryciem otwartym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy $B$ i G-ekwiwariantne względem działań prawostronnych: $r$ na dziedzinie oraz regularnego $\wp$ na drugim czynniku kartezjańskim przeciwdziedziny,
$$\widetilde{\wp}^i \equiv \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \times \wp \;:\; (\mathcal{O}_i \times \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \;:\; \big((x,g),h\big) \longmapsto (x, g\cdot h)\,,$$
tj. spełniające warunki
$$\tau_i \circ r_g = \widetilde{\wp}^i_g \circ \tau_i\,, \qquad i \in I\,.$$

**Podwiązka główna o grupie strukturalnej** $\mathrm{H}$ wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ to podwiązka $(\mathsf{P}_{\mathrm{H}}, B, \mathrm{H}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \restriction_{\mathsf{P}_{\mathrm{H}}})$ tejże wiązki (włóknistej) o grupie strukturalnej będącej podgrupą Liego $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$.

**Morfizm wiązek głównych** $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}, B_\alpha, \mathrm{G}_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_\alpha}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ o działaniach odnośnych grup strukturalnych $r^\alpha$ to trójka $(\Phi, f, \varphi)$ złożona z morfizmu wiązek włóknistych

$$(\Phi, f) \;:\; (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}, B_1, \mathrm{G}_1, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}) \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}, B_2, \mathrm{G}_2, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}})$$

oraz homomorfizmu grup topologicznych (wzgl. Liego) pozostających w relacji wyrażanej przez diagram przemienny

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \times \mathrm{G}_1 \arrow[r, "r^1"] \arrow[d, "\Phi\times\varphi"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_1} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_1}}"] \arrow[d, "\Phi"] & B_1 \arrow[d, "f"] \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \times \mathrm{G}_2 \arrow[r, "r^2"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}_2} \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}_2}}"'] & B_2 \end{tikzcd} \,.$$

**Przykłady 1.**

(1) Trywialna wiązka główna nad $B$ o grupie strukturalnej $\mathrm{G}$, czyli
$$(B \times \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \mathrm{pr}_1)\,.$$

(2) Wiązka reperów wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ modelowanej na $\mathbb{K}^{\times n}$, czyli
$$\big(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}}\big)\,,$$
w szczególności zaś – **wiązka reperów nad rozmaitością** (albo **wiązka baz nad rozmaitością**) $M$ wymiaru $n$, czyli
$$\big(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathsf{T}M, M, \mathrm{GL}(\mathsf{T}M) \cong \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}), \pi_{\mathsf{F}_{\rm GL}\mathsf{T}M}\big)\,.$$

(3) **Rozwłóknienie Hopfa**
$$\big(\mathrm{SU}(2) \equiv \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathrm{U}(1), \pi_{\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)}\big)\,.$$

**Definicja 2.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj
$$\mathsf{P}_{\rm G} \times_B \mathsf{P}_{\rm G} := \{\ (p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\rm G} \times \mathsf{P}_{\rm G} \quad | \quad \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1) = \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_2)\ \}$$
będzie produktem włóknistym. **Odwzorowanie ilorazowe** na wiązce głównej $(\mathsf{P}_{\rm G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}})$ to odwzorowanie
$$\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\ :\ \mathsf{P}_{\rm G} \times_B \mathsf{P}_{\rm G} \longrightarrow \mathrm{G}$$
określone przez warunek
$$\forall_{(p_1,p_2)\in \mathsf{P}_{\rm G}\times_B \mathsf{P}_{\rm G}}\ :\ p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1, p_2)\,.$$

**Uwaga 1.** O postulowanej gładkości odwzorowania ilorazowego najłatwiej jest przekonać się przy użyciu trywializacji lokalnych. Istotnie, niechaj $p_1, p_2 \in (\mathsf{P}_{\rm G})_x$, $x \in \mathcal{O}_i$, $i \in I$, przy czym $p_\alpha = \tau_i^{-1}(x, g_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ dla pewnych elementów $g_\alpha \in \mathrm{G}$, a wtedy wobec równości
$$p_2 = \tau_i^{-1}(x, g_2) \equiv \tau_i^{-1}\big(x, g_1 \cdot (g^{-1} \cdot g_2)\big) = \tau_i^{-1}(x, g_1) \triangleleft \big(g^{-1} \cdot g_2\big) \equiv p_1 \triangleleft \big(g^{-1} \cdot g_2\big)$$
otrzymujemy reprezentację lokalną odwzorowania ilorazowego:
$$\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1, p_2) \equiv g^{-1} \cdot g_2 = \mathrm{m}\big(\mathrm{Inv} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_1), \mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p_2)\big)\,,$$
daną w postaci superpozycji odwzorowań gładkich ($\mathrm{m}$ jest operacją binarną w $\mathrm{G}$), więc gładką.

Podstawowe własności strukturalne odwzorowania ilorazowego, z których przyjdzie nam korzystać niebawem, opisuje

**Stwierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def. 2. Odwzorowanie ilorazowe spełnia warunki wyrażone przez następujące diagramy przemienne:

(DM1) skośna symetria
$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}_{\rm G} \times_B \mathsf{P}_{\rm G} \arrow[r, "\tau_{\mathsf{P}_{\rm G},\mathsf{P}_{\rm G}}"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}"'] & \mathsf{P}_{\rm G} \times_B \mathsf{P}_{\rm G} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Inv}"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd}\ ,$$
gdzie $\tau_{\mathsf{P}_{\rm G},\mathsf{P}_{\rm G}}\ :\ \mathsf{P}_{\rm G} \times_B \mathsf{P}_{\rm G}\ \circlearrowleft\ :\ (p_1, p_2) \longmapsto (p_2, p_1)$ jest (obciętą do produktu włóknistego) transpozycją kanoniczną, czyli
$$\forall_{(p_1,p_2)\in \mathsf{P}_{\rm G}\times_B \mathsf{P}_{\rm G}}\ :\ \phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_2, p_1) = \phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p_1, p_2)^{-1}\,;$$

(DM2) warunek 1-kocyklu

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[rr, "{(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{1,2}, \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{2,3})}"] \arrow[rrd, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_{1,3}"'] & & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[d, "M"] \\
& & \mathrm{G}
\end{tikzcd},$$

gdzie $\mathrm{pr}_{i,j} \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \ : \ (p_1, p_2, p_3) \longmapsto (p_i, p_j), \ (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ jest (obciętym do produktu włóknistego) rzutem kanonicznym, czyli

$$\forall_{(p_1,p_2,p_3) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_3) \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_3)^{-1} \circ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2) = e\,;$$

(DM3) G-ekwiwariantność

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \mathrm{G} \arrow[l, "{(r \circ \mathrm{pr}_{1,3}, \mathrm{pr}_2)}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \times r"] \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}"] \\
\mathrm{G} & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "\ell \circ (\mathrm{Inv} \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}) \circ \tau_{\mathrm{G},\mathrm{G}}"] \arrow[r, "\wp"'] & \mathrm{G}
\end{tikzcd},$$

czyli

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \ g_1, g_2 \in \mathrm{G}} \ : \ \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1 \triangleleft g_1, p_2 \triangleleft g_2) = g_1^{-1} \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2) \cdot g_2\,.$$

*Dowód:* Oczywisty. □

Nie zawsze mamy do czynienia z pełnym „pakietem" obiektów wymienionych w definicji wiązki głównej. Warto zatem zastanowić się, które z jej elementów mają naturę *konstytutywną*, tj. determinują istnienie struktury wiązki głównej na rozmaitości. Odpowiedzi na tak postawione pytanie przynosi

**Stwierdzenie 2.** Niechaj $\mathsf{P}, B$ będą rozmaitościami i niech $\mathrm{G}$ będzie grupą Liego. Zakładamy też, że jest określona surjektywna submersja $\pi \ : \ \mathsf{P} \longrightarrow B$ oraz gładkie działanie prawostronne $r_{\cdot} \ : \ \mathsf{P} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}$ grupy $\mathrm{G}$ na $\mathsf{P}$. Jeśli działanie $r_{\cdot}$ jest swobodne, jego orbity pokrywają się z poziomicami $\pi$, a odwzorowanie $\phi_{\mathsf{P}} \ : \ \mathsf{P} \times_B \mathsf{P} \longrightarrow \mathrm{G}$ określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall_{(p_1,p_2) \in \mathsf{P} \times_B \mathsf{P}} \ : \ p_2 = r_{\phi_{\mathsf{P}}(p_1,p_2)}(p_1)$$

jest gładkie, to wówczas czwórka

$$(\mathsf{P}, B, \mathrm{G}, \pi)$$

jest wiązką główną.

*Dowód:* Na podstawie Tw. 2 z wykładu I (str. 14) o istnieniu cięć lokalnych surjektywnej submersji stwierdzamy istnienie pokrycia otwartego $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ rozmaitości $B$, na którego elementach określone są gładkie cięcia lokalne $\sigma_i \ : \ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{P}$ submersji $\pi$, możemy zatem zdefiniować jawnie gładkie odwzorowania

$$\tau_i^{-1} \ : \ \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \ : \ (x,g) \longmapsto r_g\big(\sigma_i(x)\big)\,.$$

Wykorzystując odwzorowanie $\phi_{\mathsf{P}}$, bez trudu znajdujemy ich (gładkie) odwrotności:

$$\tau_i \ : \ \pi^{-1}(\mathcal{O}_i) \longrightarrow \mathcal{O}_i \times \mathrm{G} \ : \ p \longmapsto \big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big)\,.$$

Są one dobrze określone, gdyż

$$\pi\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) = (\pi \circ \sigma_i) \circ \pi(p) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_i} \circ \pi(p) = \pi(p)\,,$$

i – istotnie – spełniają postulowane tożsamości:

$$\tau_i^{-1} \circ \tau_i(p) = \tau_i^{-1}\big(\pi(p), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi(p), p\big)\big) = r_{\phi_{\mathsf{P}}(\sigma_i \circ \pi(p), p)}\big(\sigma_i \circ \pi(p)\big) \equiv p\,,$$

$$\begin{aligned}\tau_i \circ \tau_i^{-1}(x, g) &= \tau_i\big(r_g\big(\sigma_i(x)\big)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) \\ &= \big(\pi \circ \sigma_i(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ \sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) \\ &= \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_i(x)\big)\big) = (x, g)\,,\end{aligned}$$

z których druga wynika stąd, że działanie $\mathrm{G}$ odwzorowuje poziomicę $\pi$ w siebie, a do tego nieuchronnie

$$\forall_{(p_1, p_2, g) \in \mathsf{P}^{\times 2} \times \mathrm{G}}\ :\ \phi_{\mathsf{P}}\big(p_1, r_g(p_2)\big) = \phi_{\mathsf{P}}(p_1, p_2) \cdot g\,.$$

Skonstruowane powyżej trywializacje lokalne spełniają w punktach $x \in \mathcal{O}_{ij},\ i, j \in I$ warunki

$$\begin{aligned}\tau_i \circ \tau_j^{-1}(x, g) &= \tau_i\big(r_g \circ \sigma_j(x)\big) = \big(\pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i \circ \pi \circ r_g \circ \sigma_j(x), r_g \circ \sigma_j(x)\big)\big) \\ &= \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), r_g \circ \sigma_j(x)\big)\big) = \big(x, \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big) \cdot g\big)\,,\end{aligned}$$

z których odczytujemy postać odwzorowań przejścia:

$$g_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ x \longmapsto \phi_{\mathsf{P}}\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big)\,,$$

zamykając tym samym procedurę identyfikacji postulowanej struktury wiązki głównej o grupie strukturalnej $\mathrm{G}$. □

Przykładu wiązki głównej, szczególnie istotnego w modelowaniu efektywnej teorii pola w otoczeniu próżni teorii z symetrią ciągłą (globalną lub lokalną) i np. w opisie efektu Higgsa, dostarcza

**Corollarium 1.** Niechaj $\mathrm{G}$ będzie grupą Liego, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ zaś – dowolną jej podgrupą domkniętą. Czwórka

$$(\mathrm{G}, \mathrm{G}/\mathrm{H}, \mathrm{H}, \pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}})$$

jest topologiczną (wzgl. gładką) wiązką główną nad przestrzenią jednorodną $\mathrm{G}/\mathrm{H}$.

*Dowód:* Wystarczy zauważyć, że rzut $\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}$ jest – zgodnie z tezą Tw. 3 z wykładu IV (str. 12-13) – surjektywną submersją o poziomicach tożsamych z orbitami naturalnego prawego (regularnego) działania $\mathrm{H}$, a do tego jest określone odwzorowanie jawnie gładkie

$$\phi_{\mathrm{G}}\ :\ \mathrm{G} \times_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}\ :\ (g_1, g_2) \longmapsto g_1^{-1} \cdot g_2\,.$$

□

Na poprzednim wykładzie wyróżniliśmy działania właściwe jako te, które pozwalają sprowadzić strukturę rozmaitości na przestrzeń orbit działania. Pierwszy przykład takiego działania przynosi

**Stwierdzenie 3.** Działanie definiujące grupy strukturalnej na przestrzeni totalnej wiązki głównej jest właściwe.

*Dowód:* Rozważmy ciągi $p.\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ i $g.\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{G}$ o własnościach

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p\,, \qquad \lim_{n \to \infty} (p_n \triangleleft g_n) = \widetilde{p}\,.$$

Wobec ciągłości rzutu kanonicznego na bazę oraz charakteru działania grupy strukturalnej (we włóknie) otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p}) &\equiv \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\lim_{n \to \infty} (p_n \triangleleft g_n)\big) = \lim_{n \to \infty} \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_n \triangleleft g_n) = \lim_{n \to \infty} \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_n) \\ &= \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\lim_{n \to \infty} p_n\big) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\,,\end{aligned}$$

która w świetle Def. 2 pozwala zapisać

$$\widetilde{p} = p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p}) .$$

Niechaj $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \in \mathcal{O}_i$, gdzie $\mathcal{O}_i$ jest elementem pokrycia trywializującego $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$. Istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ o własności

$$\forall_{n \geq N} \ : \ p_n, p_n \triangleleft g_n \in \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) ,$$

możemy zatem rozpatrywać podciągi $p_{N+\cdot}$ i $p_{N+\cdot} \triangleleft g_{N+\cdot}$ w obrazie trywializacji $\tau_i \ : \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$, w którym

$$\tau_i(p_n) =: (x_n, \gamma_n) , \qquad\qquad \tau_i(p) =: (x, \gamma) ,$$

czyli

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, \gamma_n) = (x, \gamma) ,$$

więc też

$$\tau_i(p_n \triangleleft g_n) = \tau_i(p_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n) \triangleleft g_n = (x_n, \gamma_n \cdot g_n)$$

oraz

$$\tau_i(\widetilde{p}) = \tau_i\big(p \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p})\big) = \tau_i(p) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p}) = (x, \gamma) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p}) = \big(x, \gamma \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p})\big) ,$$

czyli

$$\lim_{n \to \infty} (\gamma_n \triangleleft g_n) = \gamma \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p}) .$$

Wobec ciągłości operacji grupowych wyprowadzamy stąd wniosek

$$\lim_{n \to \infty} g_n \equiv \lim_{n \to \infty} \big(\gamma_n^{-1} \cdot (\gamma_n \cdot g_n)\big) = \gamma^{-1} \cdot \big(\gamma \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p})\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p, \widetilde{p}) ,$$

który na mocy Stw. 4 z wykładu IV (str. 5) przesądza o słuszności dowodzonej tezy. □

Idąc tym tropem dalej w kierunku fizykalnych zastosowań

**Corollarium 2.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną, $M$ zaś – rozmaitością z działaniem (lewostronnym) $\lambda \ : \ \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ grupy G. Rozważmy rozmaitość produktową $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M$. Działanie grupy G dane wzorem

$$\widetilde{\lambda}_{\cdot} \ : \ \mathrm{G} \times (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \ : \ \big(g, (p, x)\big) \longmapsto \big(r(p, g^{-1}), \lambda(g, m)\big) \tag{2}$$

jest wolne i właściwe.

<u>*Dowód:*</u> Oczywisty. □

Mamy też

**Stwierdzenie 4.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj G będzie grupą Liego, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ zaś – dowolną jej podgrupą domkniętą. Działanie podgrupy H na przestrzeni totalnej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ wiązki głównej $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będące ograniczeniem (do H) działania definiującego $r_{\cdot}$ jest swobodne oraz właściwe i określa na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ strukturę wiązki głównej

$$(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}, \mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}, \mathrm{H}) .$$

<u>*Dowód:*</u> Swobodny charakter działania H na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ jest konsekwencją takiego samego charakteru działania grupy strukturalnej G na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, pozostaje zatem wykazać jego naturę właściwą. Niechaj ciągi $p_{\cdot} \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}^{\mathbb{N}}$ i $h_{\cdot} \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$ spełniają warunki

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p , \qquad\qquad \lim_{n \to \infty} (p_n \triangleleft h_n) = \widetilde{p} ,$$

a wtedy – wobec właściwego charakteru działania $\mathrm{G} \supset \mathrm{H} \ni h_n$ – istnieje podciąg $h_{n.} \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$ o własności

$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k} = h \in \mathrm{G}\,.$$

Ponieważ jednak H jest domknięta, przeto koniecznie $h \in \mathrm{H}$, co w świetle Stw. 4 z wykładu IV (str. 5) oznacza właśnie, że działanie H jest właściwe. W takim jednak razie zbiór orbit $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}$ niesie – na mocy Tw. 2 z wykładu IV (str. 6) o rozmaitości ilorazowej – strukturę rozmaitości gładkiej, względem której rzut kanoniczny $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}$ jest surjektywną submersją, a że poziomice tegoż rzutu są orbitami działania H i mamy jednoznacznie określone odwzorowanie

$$\widetilde{\phi}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{H}\ :\ (p_1,p_2) \longmapsto \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)\,,$$

które jest jawnie gładkie, przeto na gruncie Stw. 2 konstatujemy słuszność drugiej części tezy. □

Przedstawimy obecnie wygodne kryterium trywialności wiązki głównej, które warto zestawić z analogicznym kryterium dla wiązek liniowych poznanym wcześniej.

**Stwierdzenie 5.** Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między cięciami lokalnymi klasy $C^\infty$ wiązki głównej i jej trywializacjami lokalnymi. W szczególności wiązka główna jest (globalnie) trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma globalne cięcie.

*Dowód:* Cięciu lokalnemu $\sigma\ :\ \mathcal{O} \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}) \subset \mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ \mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ przyporządkowujemy trywializację (lokalną)

$$\tau_\sigma\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}\times\mathrm{G}\ :\ p \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big)$$

o pożądanych własnościach, a więc odwracalną,

$$\tau_\sigma^{-1}\ :\ \mathcal{O}\times\mathrm{G} \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O})\ :\ (x,g) \longmapsto \sigma(x) \triangleleft g\,,$$

i G-ekwiwariantną,

$$\begin{aligned}
\tau_\sigma(p\triangleleft g) &\equiv \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g), p\triangleleft g\big)\big)\\
&= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\triangleleft g\big)\big)\\
&= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\cdot g\big)\\
&= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big)\triangleleft g \equiv \tau_\sigma(p)\triangleleft g\,.
\end{aligned}$$

I odwrotnie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}\times\mathrm{G}$ przypisujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau\ :\ \mathcal{O} \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O})\ :\ x \longmapsto \tau^{-1}(x,e)\,.$$

Powyższe przyporządkowania są przy tym wzajem odwrotne, oto bowiem – z jednej strony –

$$\forall_{x\in\mathcal{O}}\ :\ \sigma_{\tau_\sigma}(x) = \tau_\sigma^{-1}(x,e) = \sigma(x)\triangleleft e = \sigma(x)\,,$$

oraz – z drugiej strony –

$$\begin{aligned}
\forall_{p\in\pi^{-1}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O})}\ :\ \tau_{\sigma_\tau}(p) &= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\sigma_\tau\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), p\big)\big)\\
&= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\big)\,,
\end{aligned}$$

a ponieważ

$$p \equiv \tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\,,$$

czyli

$$\begin{aligned}
\tau(p) &= \tau\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\big)\\
&= \tau\circ\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big)\triangleleft\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)
\end{aligned}$$

$$= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big) \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)$$

$$= \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\tau^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), p\big)\big),$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau}(p) = \tau(p)\,.$$

□

**Uwaga 2.** Należy podkreślić, że ostatnia część tezy powyższego stwierdzenia nie stosuje się do wiązek włóknistych w ogólności. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że każda wiązka wektorowa ma globalne cięcie zerowe $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$.

W następnej kolejności zajmiemy się wyznaczeniem wygodnego opisu lokalnego morfizmów wiązek głównych pokrywających dyfeomorfizm identycznościowy na bazie (pośród których z czasem rozpoznamy tzw. „transformacje symetrii cechowania”).

**Twierdzenie 1.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Dowolny morfizm $(\Phi,\ \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_{\mathrm{G}})$ wiązek głównych $(\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}})$, $\alpha \in \{1,2\}$ o odnośnych trywializacjach lokalnych $\tau_i^\alpha\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{P}^\alpha_{\mathrm{G}}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{G}$ (stowarzyszonych ze wspólnym pokryciem trywializującym $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$) i odwzorowaniach przejścia $g^\alpha_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{G}$, opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}}"'] & \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\pi_{\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}}"] \\ B \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd},$$

zadaje rodzinę $\{h_i\}_{i\in I}$ odwzorowań (lokalnie) klasy $C^\infty$

$$h_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}\,,\quad i \in I$$

o własności

$$\forall_{x\in\mathcal{O}_{ij}}\ :\ g^2_{ij}(x) = h_i(x)\cdot g^1_{ij}(x)\cdot h_j(x)^{-1}\,. \tag{3}$$

I odwrotnie, każda taka rodzina wyznacza jedyny morfizm opisanego typu.

*Dowód:* Pozostawiamy jako ćwiczenie Czytelnikowi. □

**Stwierdzenie 6.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Podkategoria

$$\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B\,|\,\mathrm{id}_B)$$

kategorii $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ wiązek głównych nad bazą $B$ o grupie strukturalnej $\mathrm{G}$ o tej samej klasie obiektów co $\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)$ i o morfizmach o identycznościowej składowej na bazie, $f = \mathrm{id}_B$ (i na grupie strukturalnej, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$) jest grupoidem.

*Dowód:* W świetle Tw. 1 wystarczy poprowadzić rozważania w opisie lokalnym, w którym dowolny morfizm $\Phi\ :\ \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^2_{\mathrm{G}}$ pokrywający identyczność na bazie $B$ jest reprezentowany przez rodzinę odwzorowań $h_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathrm{G}$, $i \in I$. Na mocy tego samego stwierdzenia rodzina odwzorowań $\{\widetilde{h}_i := \mathrm{Inv}\circ h_i\}_{i\in I}$ określa morfizm $\mathsf{P}^2_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}^1_{\mathrm{G}}$, który w oczywisty sposób jest odwrotnością $\Phi$. □

Wiązki główne odgrywają fundamentalną rolę w opisie (lokalnych) symetrii teorii fizycznych, o czym więcej powiemy już wkrótce. Stanowią też punkt wyjścia do nowych istotnych fizykalnie konstrukcji matematycznych, którymi zajmiemy się obecnie.

**Uwaga 3.** Okazuje się, że wiązkę wektorową $\mathbb{V}$ można odtworzyć (z dokładnością do izomorfizmu) z odnośnej wiązki reperów $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$ przez pewną sprytną konstrukcję, którą przedstawiamy poniżej. Jak wynika wprost z definicji $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$, jest dobrze określone odwzorowanie (punktowej) ewaluacji

$$\widehat{\mathrm{ev}} \;:\; \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\longrightarrow\mathbb{V} \;:\; \big((\beta_x,x),v\big)\longmapsto\big(\beta_x(v),x\big)\,.$$

Odwzorowanie to jest stałe na orbitach działania

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ev}} \quad &: \quad \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\times\big(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\big)\longrightarrow\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n}\\ &: \quad \big(\chi,\big((\beta_x,x),v\big)\big)\longmapsto\big(\big(\beta_x\circ\chi^{-1},x\big),\chi(v)\big)\,,\end{aligned}$$

zapisanego w terminach naturalnego (definiującego) działania grupy $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ na $\mathbb{K}^{\times n}$,

$$\mathrm{ev} \;:\; \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\times\mathbb{K}^{\times n}\longrightarrow\mathbb{K}^{\times n} \;:\; (\chi,v)\longmapsto\chi(v)\,.$$

To oznacza, że $\widehat{\mathrm{ev}}$ zstępuje na rozmaitość ilorazową $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ zdefiniowaną w odniesieniu do działania $\widetilde{\mathrm{ev}}$, której istnienie zapewnia Cor. 2. Innymi słowy, $\widehat{\mathrm{ev}}$ zadaje odwzorowanie

$$\begin{aligned}[\widehat{\mathrm{ev}}] \quad &: \quad (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\longrightarrow\mathbb{V}\\ &: \quad \big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\longmapsto\widehat{\mathrm{ev}}\big((\beta_x,x),v\big)\equiv\big(\beta_x(v),x\big)\end{aligned} \tag{5}$$

które domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{V} \\ \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n} \arrow[urr, "\widehat{\mathrm{ev}}"] \arrow[rr, "\pi_{(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}"'] & & (\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \arrow[u, "{[\widehat{\mathrm{ev}}]}"'] \end{tikzcd}\,.$$

Zapisany na nim rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}$ na przestrzeń orbit jest – w świetle Twierdzenia o rozmaitości ilorazowej – gładką submersją, przeto wprost na mocy Twierdzenia o kwaziuniwersalnej własności submersji (z Niezbędnika – Stw. 10) gładkość odwzorowania indukowanego $[\widehat{\mathrm{ev}}]$ jest implikowana przez gładkość odwzorowania $\widehat{\mathrm{ev}}$. Przy tym bez trudu przekonujemy się, że w ograniczeniu do dowolnego włókna $(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, $x\in B$ odwzorowanie to jest bijekcją. Istotnie, wybierzmy dowolną bazę $\beta_x^*\in\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)$ i rozważmy zbiór $S:=\{\ ((\beta_x^*,x),v)\ \ |\ \ v\in\mathbb{K}^{\times n}\ \}$. Orbity dwóch dowolnych jego elementów, $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_1)$ i $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright((\beta_x^*,x),v_2)$, albo pokrywają się ze sobą, albo też są rozłączne (jako klasy abstrakcji relacji równoważności). Pierwsza z tych ewentualności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned}&\big((\beta_x^*,x),v_2\big)\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\triangleright\big((\beta_x^*,x),v_1\big)\\ \Longleftrightarrow\quad &\exists_{\chi\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})}\;:\;\big((\beta_x^*,x),v_2\big)=\big(\big(\beta_x^*\circ\chi^{-1},x\big),\chi(v_1)\big)\\ \Longleftrightarrow\quad &(\ \chi=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}\quad\wedge\quad v_2=v_1\ )\,,\end{aligned}$$

zatem nietożsame elementy zbioru $S$ należą do rozłącznych orbit. Moc włókna $(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ jest więc nie mniejsza niż moc włókna $\mathbb{V}_x$. Pozostaje sprawdzić injektywność $[\widehat{\mathrm{ev}}]$. W tym celu rozważmy konsekwencje równości

$$\beta_x^1(v_1)\equiv[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big]\big)=[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\big)\equiv\beta_x^2(v_2)\,.$$

Ta jest równoważna równości

$$v_2=\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\,,$$

która implikuje relację
$$v_2 \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \triangleright v_1\,,$$
a dalej także
$$\big((\beta_x^2,x),v_2\big) = \big((\beta_x^1\circ\big(\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1\big)^{-1},x),\beta_x^{2\,-1}\circ\beta_x^1(v_1)\big) \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) \triangleright \big((\beta_x^1,x),v_1\big)\,.$$
Na tej podstawie wyciągamy wniosek o równości argumentów,
$$\big[\big((\beta_x^1,x),v_1\big)\big] = \big[\big((\beta_x^2,x),v_2\big)\big]\,,$$
która przesądza o injektywności $[\widehat{\mathrm{ev}}]$. Mamy zatem do czynienia z gładką bijekcją. Skonstruujemy jej gładką odwrotność. W tym celu użyjemy lokalnych trywializacji $\tau_i\ :\ \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times \mathrm{GL}(n;\mathbb{K}),\ i\in I$ wiązki reperów stowarzyszonych z pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, które w odwołaniu do tezy Stw. 5 pozwalają nam skonstruować lokalnie gładkie cięcia
$$\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}\ :\ x\longmapsto \tau_i^{-1}(x,e)\equiv\big(\beta_i(x),x\big)\in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\{x\}\,,$$
przy czym pole baz $\beta_i$ zależy (lokalnie) gładko od punktu w $\mathcal{O}_i\subset B$. Łatwo przekonujemy się, że odwzorowanie zadane lokalnie (nad $\mathcal{O}_i\ni x$) w postaci
$$\Sigma_i\restriction_{\mathbb{V}_x}\ :\ \mathbb{V}_x\longrightarrow \big(\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\times n},\mathbb{V}_x)\times\mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\ :\ \nu\longmapsto\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]$$
jest (lokalną) odwrotnością $[\widehat{\mathrm{ev}}]$, oto bowiem
$$\begin{aligned}\Sigma_i\circ[\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\big) &= \Sigma_i\circ\beta_x(v) = \big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big]\\ &\equiv \big[\big((\beta_x\circ\big(\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x\big)^{-1},x\big),\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\big] = \big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\end{aligned}$$
a nadto – dla $\nu\in\mathbb{V}_x$ –
$$[\widehat{\mathrm{ev}}]\circ\Sigma_i(\nu) = [\widehat{\mathrm{ev}}]\big(\big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]\big) = \beta_i(x)\big(\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big) = \nu\,.$$
I wreszcie na koniec upewniamy się, że odwzorowania lokalne $\Sigma_i$ stanowią ograniczenia (do odnośnych elementów $\pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ pokrycia przestrzeni totalnej $\mathbb{V}$) odwzorowania globalnie gładkiego. W tym celu musimy najpierw ustalić regułę transformacyjną dla lokalnych wyborów bazy $\beta_i$. Niechaj $g_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\longrightarrow \mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ będą odwzorowaniami przejścia dla wybranych wcześniej trywializacji lokalnych $\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$, tj. – dla dowolnych $x\in\mathcal{O}_{ij}$ oraz $\chi\in\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$ –
$$\tau_i\circ\tau_j^{-1}(x,\chi) = \big(x,g_{ij}(x)\circ\chi\big)\,.$$
Obliczamy wówczas
$$\begin{aligned}\big(\beta_j(x),x\big) &\equiv \tau_j^{-1}(x,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}}) = \tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\big) = \tau_i^{-1}(x,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\times n}})\triangleleft g_{ij}(x)\\ &= \big(\beta_i(x),x\big)\triangleleft g_{ij}(x)\equiv\big(\beta_i(x)\circ g_{ij}(x),x\big)\,,\end{aligned}$$
czyli
$$\beta_j(x) = \beta_i(x)\circ g_{ij}(x)\,,$$
a stąd już łatwo wyprowadzamy – dla dowolnego punktu $\nu\in\mathbb{V}_x,\ x\in\mathcal{O}_{ij}$ – pożądaną tożsamość
$$\begin{aligned}\Sigma_j(\nu) &= \big[\big((\beta_j(x),x),\beta_j(x)^{-1}(\nu)\big)\big] = \big[\big((\beta_i(x)\circ g_{ij}(x),x),g_{ij}(x)^{-1}\circ\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]\\ &= \big[\big((\beta_i(x),x),\beta_i(x)^{-1}(\nu)\big)\big]\equiv\Sigma_i(\nu)\,.\end{aligned}$$
Dotychczasowe nasze rozważania pozwalają nam wypisać wprost trywializacje lokalne
$$\begin{aligned}[\tau_i]\ &:\ \big(\pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i)\times\mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_i\times\mathbb{K}^{\times n}\\ &:\ \big[\big((\beta_x,x),v\big)\big]\longmapsto\big(x,\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_x(v)\big)\end{aligned}$$
o odwrotnościach
$$\begin{aligned}[\tau_i]^{-1}\ &:\ \mathcal{O}_i\times\mathbb{K}^{\times n}\xrightarrow{\cong}\big(\pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i)\times\mathbb{K}^{\times n}\big)/\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})\\ &:\ (x,v)\longmapsto\big[\big((\beta_i(x),x),v\big)\big]\end{aligned}$$

i tym samym zidentyfikować strukturę wiązki włóknistej na rozmaitości ilorazowej $(\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})$, przy czym jest jasne, że jest to wiązka wektorowa nad $B$ o ciele bazowym $\mathbb{K}$. Odnotujmy na marginesie, że odwzorowania przejścia dla wypisanych tu trywializacji przyjmują – w dowolnym punkcie $(x,v)\in\mathcal{O}_{ij}\times\mathbb{K}^{\times n}$ – postać

$$\begin{aligned}[\tau_i]\circ[\tau_j]^{-1}(x,v) &= [\tau_i]\big(\big[\big(\big(\beta_j(x),x\big),v\big)\big]\big)=\big(x,\beta_i(x)^{-1}\circ\beta_j(x)(v)\big)\\ &= \big(x,g_{ij}(x)(v)\big)\,,\end{aligned}$$

identyczną jak w przypadku $\mathbb{V}$. Wobec swojej oczywistej $\mathbb{K}$-liniowości odwzorowanie $[\widehat{\rm ev}]$ jawi się nam jako izomorfizm wiązek wektorowych

$$[\widehat{\rm ev}]\ :\ (\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}\times\mathbb{K}^{\times n})/{\rm GL}(n;\mathbb{K})\xrightarrow{\cong}\mathbb{V}\,.$$

Dotychczasowa dyskusja dostarczyła nam należytych podstaw pojęciowych do omówienia zastosowań teorii wiązek głównych w opisie symetrii fizykalnych.