GR II W CZASACH ZARAZY
6. WYKŁAD ZDALNY

Wiązki stowarzyszone

Szczegółowa dyskusja struktury wiązek głównych na poprzednim wykładzie przygotowała nas do omówienia obiektów o szczególnym znaczeniu w modelowaniu procedury ulokalniania symetrii globalnych w mechanice i teorii pola, które wprowadzamy w

Definicja 1. Niechaj $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ będzie wiązką główną, M zaś – rozmaitością z gładkim działaniem (lewostronnym) $\lambda\ :\ \mathrm{G}\times M \longrightarrow M$ grupy Liego G. **Wiązka stowarzyszona z** P_{G} **poprzez** λ to wiązka włóknista

$$\left(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M, B, M, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}\right)$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M \equiv (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}$ będąca rozmaitością ilorazową określoną – według schematu opisanego w Cor. 5.2 (na gruncie Tw. 4.2) i w użytym tam zapisie – przez działanie z Równ. (5.2);
- rzut na bazę

$$\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M \longrightarrow B\ :\ [(p,m)] \longmapsto \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\,.$$

Przy tym trywializacje lokalne $\tau_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times\mathrm{G},\ i\in I$ wiązki głównej P_{G} stowarzyszone z pokryciem $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ bazy B indukują trywializacje lokalne

$$\widetilde{\tau}_i\ :\ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i\times M\ :\ [(p,m)] \longmapsto \left(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda_{\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p)}(m)\right),$$

o odwzorowaniach przejścia

$$\widetilde{\tau}_i\circ\widetilde{\tau}_j^{-1}\ :\ \mathcal{O}_{ij}\times M \circlearrowleft\ :\ (x,m) \longmapsto \left(x, \lambda_{g_{ij}(x)}(m)\right).$$

Ustaliwszy (dowolnie) punkt $x\in B$, wybierzmy (także dowolnie) $p_*\in(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$. Dyfeomorfizmy

$$[p_*]_\lambda\ :\ M \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_x\ :\ m \longmapsto [(p_*,m)]\,,$$

o odwrotnościach

$$[p_*]_\lambda^{-1}\ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_x \xrightarrow{\cong} M\ :\ [(p,m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)$$

i oczywistej własności

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ [p_*\triangleleft g]_\lambda = [p_*]_\lambda\circ\lambda_g\,, \tag{1}$$

noszą miano **izomorfizmów modelujących włókna**. Indukują one **izomorfizmy transportu włókna**

$$\begin{aligned}[p_2,p_1]_\lambda \equiv [p_2]_\lambda\circ[p_1]_\lambda^{-1}\quad &:\quad (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \xrightarrow{\cong} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \\ &:\quad [(p,m)] \longmapsto \left[\left(p_2, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p)}(m)\right)\right],\end{aligned}$$

określone dla dowolnej pary $(p_1,p_2)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$.

Dla dowolnej pary $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_\alpha} M_\alpha, B, M_\alpha, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_\alpha} M_\alpha}),\ \alpha\in\{1,2\}$ wiązek stowarzyszonych z tą samą wiązką główną $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ określamy także **niezmiennik wiązek stowarzyszonych** jako morfizm wiązek włóknistych

$$(\Phi, \mathrm{id}_B)\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2} M_2$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny, wypisany dla dowolnej pary punktów $p_1, p_2 \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_1}}"] \arrow[d, "\Phi\restriction_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)}}"'] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)} \arrow[d, "\Phi\restriction_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1} M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)}}"] \\
\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1)} \arrow[r, "{[p_2,p_1]_{\lambda_2}}"'] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2)}
\end{tikzcd} .$$

Uwaga 1. Istnienie struktury rozmaitości na przestrzeni orbit $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ działania $\widetilde{\lambda}$ jest bezpośrednią konsekwencją Tw. 4.2, na którego przywołanie w powyższym kontekście pozwala Cor. 5.2. Przy tym gładkość rzutu na bazę $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}$ wynika tu wprost ze Stw. Niezb-10, kiedy zauważyć, że rzut ten domyka diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
& B \\
\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \arrow[ur, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}"']
\end{tikzcd} ,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją (na mocy tegoż Tw. 4.2), a $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \mathrm{pr}_1$ jest jawnie gładkie. Jako że to ostatnie odwzorowanie także jest submersją, przeto własność tę ma $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}$, o czym przekonuje tożsamość uzyskana w obrazie powyższego diagramu względem funktora stycznego.

Przejdziemy do zbadania trywializacji lokalnych, zaczynając od sprawdzenia sensowności ich definicji. Musimy w tym celu pokazać, że wartość przyjmowana przez odwozrowanie $\widetilde{\tau}_i$ na klasie $[(p,m)]$ nie zależy od wyboru reprezentanta tej ostatniej. Obliczamy przeto

$$\Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p \triangleleft g), \lambda\big(g^{-1}, m\big)\big)\Big) = \Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g, \lambda\big(g^{-1}, m\big)\big)\Big)$$

$$= \Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p) \cdot g \cdot g^{-1}, m\big)\Big) = \Big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p), m\big)\Big) .$$

Ponadto ponieważ odwzorowania

$$\underline{\tau}_i \ : \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \longrightarrow \mathcal{O}_i \times M \ : \ (p,m) \longmapsto \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda_{\mathrm{pr}_2\circ\tau_i(p)}(m)\big) , \quad i \in \{1,2\}$$

są jawnie gładkie, a przy tym pozostają z $\widetilde{\tau}_i$ w relacji opisywanej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
& \mathcal{O}_i \times M \\
\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \times M \arrow[ur, "\underline{\tau}_i"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}"'] & \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \arrow[u, "\widetilde{\tau}_i"']
\end{tikzcd} ,$$

w którym rzut kanoniczny $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}}$ jest – wprost na mocy Tw. 4.2 i Cor. 5.2 – gładki, przeto w świetle Stw. Niezb-10 także odwzorowania $\widetilde{\tau}_i$ są gładkie. Gładkość (także lokalna) ich odwrotności

$$\widetilde{\tau}_i^{-1} \ : \ \mathcal{O}_i \times M \longrightarrow \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \ : \ (x,m) \longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), m\big)\big]$$

nie budzi wątpliwości. We wszystkich dotychczasowych rozważaniach zakładamy *implicite* sensowność definicji odwzorowań $\widetilde{\tau}_i$ i $\widetilde{\tau}_i^{-1}$, która wymaga odrębnej weryfikacji – ta usprawiedliwia *a posteriori* dokonaną przez nas identyfikację włókna typowego

$$\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}^{-1}\big(\big\{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M}([(p,m)])\big\}\big) \cong M , \quad [(p,m)] \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

rekonstruowanej tu wiązki włóknistej. Bez trudu dowodzimy pożądanych tożsamości: oto więc dla $(x,m) \in \mathcal{O}_i \times M$ zachodzi

$$\widetilde{\tau}_i \circ \widetilde{\tau}_i^{-1}(x,m) = \widetilde{\tau}_i\big(\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), m\big)\big]\big)$$

$$= \ \big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_i^{-1}(x,e), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_i^{-1}(x,e), m\big)\big) = \big(x, \lambda(e,m)\big) = (x,m)\,,$$

a dla $[(p,m)] \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M,\ p = \tau_i^{-1}(x,g)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau_i}^{-1} \circ \widetilde{\tau_i}\big([(p,m)]\big) &= \widetilde{\tau_i}^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p), m\big)\big) \\ &= \big[\big(\tau_i^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p), e\big), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i(p), m\big)\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e), \lambda(g,m)\big)\big] \\ &= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e) \triangleleft g, m\big)\big] = \big[\big(\tau_i^{-1}(x,g), m\big)\big] \equiv [(p,m)]\,. \end{aligned}$$

Wreszcie też na koniec obliczamy

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau_i} \circ \widetilde{\tau_j}^{-1}(x,m) &\equiv \widetilde{\tau_i} \circ \widetilde{\tau_j}^{-1}\big(\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \circ \tau_j^{-1}(x,e), \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_j(\tau_j^{-1}(x,e)), m\big)\big) \\ &= \widetilde{\tau_i}\big(\big[\tau_j^{-1}(x,e), m\big]\big) = \big(x, \lambda\big(\mathrm{pr}_2 \circ \tau_i \circ \tau_j^{-1}(x,e), m\big)\big) \\ &= \big(x, \lambda\big(\mathrm{pr}_2(x, g_{ij}(x)), m\big)\big) \equiv \big(x, \lambda\big(g_{ij}(x), m\big)\big)\,. \end{aligned}$$

Konstrukcja wiązki stowarzyszonej jest zatem dobrze określona.

Rozważmy następnie odwzorowanie

$$[p_*]_\lambda^{-1} \ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \longrightarrow M \ :\ [(p,m)] \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,, \quad p_* \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x\,.$$

Jest ono dobrze określone, gdyż dla dowolnego reprezentanta $(\widetilde{p}, \widetilde{m}) \in [(p,m)]$ obliczamy

$$\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,\widetilde{p})}(\widetilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)} \circ \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})}(\widetilde{m}) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\,.$$

Ponadto jest ono bijekcją, albowiem prawdziwą jest implikacja

$$[p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_2,m_2)]\big) = [p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_1,m_1)]\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad m_2 = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1)$$

$$\Longrightarrow \qquad [(p_2,m_2)] = \big[\big(p_2, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(m_1)\big)\big] = \big[\big(p_2 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1), m_1\big)\big]$$

$$= [(p_1,m_1)]\,,$$

dowodząca injektywności $[p_*]_\lambda^{-1}$, a do tego dowolny punkt $m \in M$ możemy zapisać w postaci

$$m = [p_*]_\lambda^{-1}\big([(p_*,m)]\big)\,,$$

co zaświadcza o surjektywności tego odwzorowania, wskazując w jawny sposób jego odwrotność

$$[p_*]_\lambda \ :\ M \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \ :\ m \longmapsto [(p_*,m)]\,.$$

Istotnie, odwzorowanie $[p_*]_\lambda$ spełnia tożsamości

$$\begin{aligned} [p_*]_\lambda^{-1} \circ [p_*]_\lambda(m) &= \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_*)}(m) = \lambda_e(m) = m\,, \\ [p_*]_\lambda \circ [p_*]_\lambda^{-1}\big([(p,m)]\big) &= \big[\big(p_*, \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(m)\big)\big] \equiv \big[\big(p_* \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p), m\big)\big] \\ &= [(p,m)]\,. \end{aligned}$$

Jest ono jawnie gładkie jako superpozycja włożenia $(p_*, \mathrm{id}_M)\ :\ M \longrightarrow \{p_*\} \times M \subset (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*)} \times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M \longrightarrow (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times M)/\mathrm{G}$. Gładkość $[p_*]_\lambda^{-1}$ wynika natomiast z tezy Stw. Niezb-10 odniesionej do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd} & M \\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x \times M \arrow[ur, "\lambda(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,\mathrm{pr}_1),\mathrm{pr}_2)"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})/\mathrm{G}} \restriction (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x \times M"'] & (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_x \arrow[u, "{[p_*]_\lambda^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

o submersywnej surjekcji na krawędzi poziomej. Konstrukcja dyfeomorfizmu $[p_*]_\lambda^{-1}$ stanowi zatem niezależny (od wcześniejszej konstrukcji trywializacji lokalnych) dowód słuszności przedłożonej przez nas identyfikacji włókna typowego wiązki stowarzyszonej.

Przykłady 1.

(1) Wiązka wektorowa $\mathbb{V}$ (rzędu n) jest wiązką stowarzyszoną z wiązką (główną) reperów $\mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V}$ poprzez działanie definiujące (ewaluację),

$$\mathbb{V} \cong \mathsf{F}_{\rm GL}\mathbb{V} \times_{\rm ev} \mathbb{K}^{\times n}\,.$$

(2) **Wiązka dołączona**

$$\big(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G} \equiv \mathsf{P}_{\rm G} \times_{\rm Ad} \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_{\rm Ad}\mathrm{G}}\big)\,.$$

(3) Wiązka główna $\mathsf{P}_{\rm G}$ może być zrealizowana jako wiązka stowarzyszona

$$\big(\mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\ell\mathrm{G}}\big)\,.$$

Stosowny izomorfizm wiązek włóknistych to

$$\widetilde{\imath}\ :\ \mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G}\ :\ [(p,g)] \longmapsto p \triangleleft g\,,$$

przy czym jego gładkość wynika z tego, że domyka on diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
& B \\
\mathsf{P}_{\rm G} \times \mathrm{G} \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "\pi_{(\mathsf{P}_{\rm G}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}"'] & \mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G} \arrow[u, "\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\ell\mathrm{G}}"']
\end{tikzcd}\,,$$

w którym $\pi_{(\mathsf{P}_{\rm G}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}$ jest surjektywną submersją, r zaś – odwzorowaniem gładkim. Odwrotność $\widetilde{\imath}$ jest dana w (jawnie gładkiej) postaci

$$\widetilde{\imath}^{-1}\ :\ \mathsf{P}_{\rm G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G}\ :\ p \longmapsto [(p,e)]\,.$$

Na wiązce stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G}$ jest określone działanie prawostronne grupy G w postaci

$$\widetilde{r}\ :\ (\mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G}) \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G}\ :\ \big([(p,g)], h\big) \longmapsto [(p, g\cdot h)]\,,$$

względem którego każde z włókien jest torsorem. Izomorfizm $\widetilde{\imath}$ jest G-ekwiwariantny,

$$\widetilde{\imath} \circ \widetilde{r}\big([(p,g)],h\big) = \widetilde{\imath}\big([(p,g\cdot h)]\big) = p \triangleleft (g\cdot h) = (p \triangleleft g) \triangleleft h = r \circ \widetilde{\imath}\big([(p,g)],h\big)\,,$$

mamy zatem do czynienia z izomorfizmem wiązek głównych.

W poszukiwaniu automorfizmów wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G}$ zauważamy, że ze względu na przemienność działania regularnego lewostronnego $\ell_\cdot$ z działaniem regularnym prawostronnym $\wp_\cdot\ :\ \mathrm{G}\times\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}\ :\ (g,h) \longmapsto g\cdot h$ to ostatnie indukuje – na mocy Stw. 1, a dla dowolnego $g \in \mathrm{G}$ – niezmiennik wiązek

$$\Phi[r_g]\ :\ \mathsf{P}_{\rm G} \times_\ell \mathrm{G} \circlearrowleft\ :\ [(p,h)] \longmapsto \Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)}\big([(p,h)]\big)\,,$$

przy czym

$$\begin{aligned}
\Phi[r_g]^{\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)}\big([(p,h)]\big) &= [p]_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\ell\mathrm{G}} \circ r_g \circ [p]^{-1}_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\ell\mathrm{G}}\big([(p,h)]\big) \\
&= [p]_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\ell\mathrm{G}} \circ r_g \circ \ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,p)}(h) = [p]_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\ell\mathrm{G}} \circ r_g(h) \\
&= [p]_{\mathsf{P}_{\rm G}\times_\ell\mathrm{G}}(h\cdot g) = [(p, h\cdot g)] \equiv \widetilde{r}_g\big([(p,h)]\big)\,,
\end{aligned}$$

czyli

$$\Phi[r_g] \equiv \widetilde{r}_g\,,$$

a ponieważ

$$[(p,h)] = [(p \triangleleft h, e)] \equiv \widetilde{\imath}^{-1}(p \triangleleft h)$$

oraz

$$[(p,h\cdot g)] = [(p\triangleleft h\cdot g,e)] = \big[\big((p\triangleleft h)\triangleleft g,e\big)\big] = \big[\big(r_g(p\triangleleft h),e\big)\big] \equiv \widetilde{\iota}^{-1}\circ r_g(p\triangleleft h)\,,$$

zatem

$$\widetilde{\iota}\circ\Phi[r_g]\circ\widetilde{\iota}^{-1} = r_g\,.$$

W tym więc sensie automorfizmy $\Phi[r_g]$ są indukowane przez $r.$, a o tym ostatnim możemy myśleć jako o modelowym niezmienniku wiązek.

Celem praktycznym (np. fizykalnym) konstrukcji wiązek stowarzyszonych jest uzyskanie gładkich dystrybucji rozmaitości określonego (izo)typu M nad zadaną bazą B (np. czasoprzestrzenią) będących nośnikiem wyróżnionego działania ustalonej grupy Liego G (np. symetrii teorii fizykalnej), które ma charakter lokalny nad bazą. Innymi słowy, jest nim stworzenie rozmaitości lokalnie modelowanej na $\mathcal{O}\times M$, $\mathcal{O}\subset B$ z działaniem G lokalnie modelowanym na λ. O tym, że tak zdefiniowany cel został skutecznie zrealizowany zaświadczają dwa poniższe stwierdzenia.

Stwierdzenie 1. Wiązki stowarzyszone z daną wiązką główną $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ wraz z odnośnymi niezmiennikami wiązek stowarzyszonych tworzą **kategorię wiązek stowarzyszonych z wiązką główną** P_{G}, którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Kategoria ta jest kanonicznie równoważna kategorii $\mathbf{Man}_{\mathrm{G}}$ rozmaitości z (lewostronnym) działaniem gładkim o morfizmach danych przez odwzorowania G-ekwiwariantne.

Dowód: Pierwsza część tezy stanowi ledwie wskazanie klasy morfizmów przez nas rozpatrywanych i jako taka nie wymaga odrębnego dowodu (niezmienniki wiązek można w oczywisty sposób składać, a ponadto morfizm identycznościowy jest – rzecz jasna – niezmiennikiem wiązek). Także wzajem jednoznaczna odpowiedniość między obiektami kategorii $\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i G-rozmaitościami jest oczywista. Jedynym zatem, co wymaga sprawdzenia, jest stosowna bijektywna odpowiedniość między niezmiennikami wiązek stowarzyszonych i odwzorowaniami G-ekwiwariantnymi.

Niechaj $(\Phi,\mathrm{id}_B)\,:\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2$ będzie niezmiennikiem wiązek, a wtedy możemy zdefiniować – dla pewnego (dowolnego) punktu $p\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ – odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\chi[\Phi] := [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p]_{\lambda_1}\;:\;M_1\xrightarrow{\cong}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\longrightarrow(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_2}M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\xrightarrow{\cong}M_2\,,$$

które wobec definiującej własności Φ,

$$\Phi\circ[p_2]_{\lambda_1}\circ[p_1]_{\lambda_1}^{-1} = [p_2]_{\lambda_2}\circ[p_1]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\,,$$

nie zależy od wyboru punktu p użytego w jego definicji. G-ekwiwariantność tak określonych odwzorowań,

$$\chi[\Phi]\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1,M_2)\,,$$

wynika wprost z bezpośredniego rachunku, odwołującego się do Równ. (1) i przeprowadzonego poniżej dla dowolnych $(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}
\chi[\Phi]\circ\lambda_{1\,g} &\equiv [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ\big([p]_{\lambda_1}\circ\lambda_{1\,g}\big) = [p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p\triangleleft g]_{\lambda_1}\\
&\equiv \big([p\triangleleft g]_{\lambda_2}\circ\lambda_{2\,g^{-1}}\big)^{-1}\circ\Phi\circ[p\triangleleft g]_{\lambda_1} = \lambda_{2\,g}\circ[p\triangleleft g]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p\triangleleft g]_{\lambda_1}\\
&= \lambda_{2\,g}\circ[p]_{\lambda_2}^{-1}\circ\Phi\circ[p]_{\lambda_1}\equiv\lambda_{2\,g}\circ\chi[\Phi]\,.
\end{aligned}$$

I odwrotnie, z każdym odwzorowaniem $\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1,M_2)$ możemy stowarzyszyć odwzorowanie (gładkie)

$$\begin{aligned}
\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} := [p]_{\lambda_2}\circ\chi\circ[p]_{\lambda_1}^{-1} \quad &:\quad (\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_1)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\longrightarrow(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\lambda_1}M_2)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\\
&:\quad [(p,m)]\longmapsto\big[\big(p,\chi(m)\big)\big]\,,
\end{aligned}$$

zależne jedynie od rzutu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ na bazę wiązki B,

$$\begin{aligned}\Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g)} &= [p \triangleleft g]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p \triangleleft g]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \big(\lambda_{2\,g} \circ \chi \circ \lambda_{1\,g^{-1}}\big) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ \big(\lambda_{1\,g} \circ \lambda_{1\,g^{-1}}\big) \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} \equiv \Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\,,\end{aligned}$$

i z tej racji określające niezmiennik wiązek dany wzorem

$$\Phi[\chi]\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1 \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\ :\ [(p,m)] \longmapsto \Phi[\chi]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big([(p,m)]\big)\,.$$

Istotnie, obliczamy

$$\begin{aligned}\Phi[\chi] \circ [p_2,p_1]_{\lambda_1} &\equiv \big([p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_2]_{\lambda_1}^{-1}\big) \circ \big([p_2]_{\lambda_1} \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}\big) = [p_2]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1} \\ &= \big([p_2]_{\lambda_2} \circ [p_1]_{\lambda_2}^{-1}\big) \circ \big([p_1]_{\lambda_2} \circ \chi \circ [p_1]_{\lambda_1}^{-1}\big) \equiv [p_2,p_1]_{\lambda_2} \circ \Phi[\chi]\,.\end{aligned}$$

Skonstruowane tu przyporządkowania

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1,M_2) \\ :\ \ &(\Phi, \mathrm{id}_B) \longmapsto \chi[\Phi]\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(M_1,M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{AssBun}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})}\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1, \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big) \\ :\ \ &\chi \longmapsto \big(\Phi[\chi], \mathrm{id}_B\big)\end{aligned}$$

są wzajem odwrotne, a każde z nich jest funktorialne. Istotnie, w przypadku rozmaitości M z działaniem $\lambda\ :\ \mathrm{G} \times M \longrightarrow M$ otrzymujemy, w dowolnym punkcie $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, równość

$$\Phi[\mathrm{id}_M]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} = [p]_{\lambda_2} \circ \mathrm{id}_B \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = [p]_{\lambda_2} \circ [p]_{\lambda_1}^{-1} = \mathrm{id}_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}\,,$$

czyli też tożsamość

$$\Phi[\mathrm{id}_M] = \mathrm{id}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M}\,,$$

a nadto dla dowolnej pary odwzorowań G-ekwiwariantnych $\chi_\alpha\ :\ M_\alpha \longrightarrow M_{\alpha+1}$, $\alpha \in \{1,2\}$ pomiędzy G-rozmaitościami M_β, $\beta \in \{1,2,3\}$ z odnośnymi działaniami $\lambda_\beta\ :\ \mathrm{G} \times M_\beta \longrightarrow M_\beta$ otrzymujemy diagram przemienny (dla dowolnego $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$)

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_1}}"] \arrow[dr, "\chi_1"] \arrow[dd, "\chi_2 \circ \chi_1"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_1} M_1\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dl, "{\Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"'] \arrow[dd, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \circ \Phi[\chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"] \\
& M_2 \arrow[r, "{[p]_{\lambda_2}}"] \arrow[dl, "\chi_2"] & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_2} M_2\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)} \arrow[dr, "{\Phi[\chi_2]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}}"'] & \\
M_3 \arrow[rrr, "{[p]_{\lambda_3}}"'] & & & \big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda_3} M_3\big)_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}
\end{tikzcd}\,,$$

w którym przemienność górnego (wzgl. dolnego) trapezu wyraża definicję niezmiennika $\Phi[\chi_1]$ (wzgl. $\Phi[\chi_2]$), a przemienność lewego i prawego trójkąta jest zapisem definicji odnośnych superpozycji odwzorowań, a ponieważ zarazem skrajna prawa krawędź jest – wprost z definicji – tożsama z odwzorowaniem $\Phi[\chi_2 \circ \chi_1]^{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$, przeto – zgodnie z oczekiwaniami –

$$\Phi[\chi_2 \circ \chi_1] = \Phi[\chi_2] \circ \Phi[\chi_1]\,.$$

Ten sam diagram przekonuje nas o funktorialności odwzorowania odwrotnego, jeśli tylko potraktować niezmienniki wiązek jako dane, a odwzorowania G-ekwiwariantne – jako przypisane tym ostatnim. $\square$

Uwaga 2. Termin „wiązka dołączona” bywa używany w literaturze w odniesieniu do wiązki stowarzyszonej

$$(\mathrm{ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \equiv \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}, B, \mathfrak{g}, \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}})\,,$$

o włóknie typowym tożsamym z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G.

Mamy też zasadnicze

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Przykł. 1 (2). Istnieje kanoniczna struktura wiązki grup na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, lokalnie modelowana na strukturze grupy na włóknie typowym G, tj. są określone: łączna operacja binarna

$$[M]\ :\ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

posiadająca element neutralny oraz operacja unarna

$$[\mathrm{Inv}]\ :\ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft\,,$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty grupy. Struktura ta indukuje kanonicznie strukturę grupy (Frécheta–Liego) na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ tej wiązki, mającą swą realizację na przestrzeni cięć $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$ indukowaną przez odwzorowanie

$$[\lambda].\ :\ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty (lDG1) i (lDG2) działania grupy Liego na rozmaitości i modelowane lokalnie na λ.

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy na wstępnie operację binarną

$$\begin{aligned} [M]\quad &:\quad \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \\ &:\quad \big([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)]\big) \longmapsto \big[\big(p_1, g_1\cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big]\,, \end{aligned}$$

wraz z przyporządkowaniem – włókno po włóknie –

$$[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\ :\ \{\bullet\} \longrightarrow \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ \bullet \longmapsto [(p,e)]\,,\quad p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$$

oraz operacją unarną

$$[\mathrm{Inv}]\ :\ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft\ :\ [(p,g)] \longmapsto \big[\big(p,g^{-1}\big)\big]\,.$$

Zaczniemy od sprawdzenia, że wszystkie trzy odwzorowania są dobrze określone. Niech zatem $(p_3,g_3) \in [(p_1,g_1)]$, tj. $(p_3,g_3) = (p_1 \lhd g_{13}, \mathrm{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1))$ oraz $(p_4,g_4) \in [(p_2,g_2)]$, tj. $(p_4,g_4) = (p_2 \lhd g_{24}, \mathrm{Ad}_{g_{24}^{-1}}(g_2))$, gdzie dla skrótu oznaczyliśmy $g_{ij} \equiv \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_i,p_j)$, $(i,j) \in \{(1,3),(2,4)\}$, a wówczas – na mocy Stw. 5.1 – otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\big[\big(p_3, g_3\cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(g_3\cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}}(g_4)\big)\big)\big] \\ =\ &\big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(\mathrm{Ad}_{g_{13}^{-1}}(g_1)\cdot \mathrm{Ad}_{g_{34}\cdot g_{24}^{-1}}(g_2)\big)\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1\cdot \mathrm{Ad}_{g_{13}\cdot g_{34}\cdot g_{42}}(g_2)\big)\big] \\ =\ &\big[\big(p_1, g_1\cdot \mathrm{Ad}_{g_{12}}(g_2)\big)\big] \end{aligned}$$

oraz

$$\big[\big(p_3, g_3^{-1}\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}\big(g_3^{-1}\big)\big)\big] = \big[\big(p_1, \mathrm{Ad}_{g_{13}}(g_3)^{-1}\big)\big] = \big[\big(p_1, g_1^{-1}\big)\big]\,,$$

a nadto stwierdzamy, że wartość odwzorowania $[\varepsilon]_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$ nie zależy od wyboru punktu we włóknie nad $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)$, oto bowiem dla dowolnego $\widetilde{p} = p \lhd \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})$ dostajemy

$$[(\widetilde{p},e)] = \big[\big(p \lhd \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p}), e\big)\big] = \big[\big(p, \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\widetilde{p})}(e)\big)\big] = [(p,e)]\,.$$

Dowód stwierdzenia, że powyższa struktura jest w istocie lokalnie modelowana na G, sprowadza się do wykazania, że izomorfizmy modelujące włókna wiązki dołączonej,

$$[p_*]_{\mathrm{Ad}} \ :\ \big(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\big)_x \longrightarrow \mathrm{G} \ :\ [(p,g)] \longmapsto \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p)}(g)\,, \quad x \in B\,,$$

są homomorfizmami grup, co czynimy poniżej (dla dowolnej pary punktów $(p_1,g_1),(p_2,g_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$ o własności $p_1,p_2 \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_x$), w odwołaniu do Stw. 5.1,

$$\begin{aligned}
[p_*]_{\mathrm{Ad}} \circ [M]\big([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)]\big) &= [p_*]_{\mathrm{Ad}}\big(\big[\big(p_1, g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big)\big]\big) \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}\big(g_1 \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)\big) \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g_1) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2) \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g_1) \cdot \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}(g_2) \\
&\equiv M\big([p_*]_{\mathrm{Ad}}\big([p_1,g_1]\big),[p_*]_{\mathrm{Ad}}\big([p_2,g_2]\big)\big)\,.
\end{aligned}$$

Pierwszym krokiem na drodze do zrekonstruowania działania włókno po włóknie grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_\lambda M)$ jest identyfikacja następującego lewego działania wiązki dołączonej na P_{G}:

$$[r]_\cdot \ :\ \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \ :\ \big([(p,g)],\widetilde{p}\big) \longmapsto r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\,.$$

Jest ono w pełni jednoznacznie określone, oto bowiem dla dowolnego reprezentanta $(p_2,g_2) \in [(p_1,g_1)]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) &= r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\
&= r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)}(\widetilde{p})\,.
\end{aligned}$$

O jego gładkości przesądza Stw. Niezb-10 – istotnie, $[r]_\cdot$ jest (jedynym) gładkim odwzorowaniem indukowanym przez stałe na poziomicach rzutu kanonicznego $\pi_{(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G})/\mathrm{G}}$ odwzorowanie (jawnie gładkie)

$$\widetilde{r}_\cdot \ :\ (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}) \times_B \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \ :\ \big((p,g),\widetilde{p}\big) \longmapsto r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że $[r]_\cdot$ ma własności analogiczne do własności definiujących (lewego) działania grupy: oto element neutralny działa trywialnie,

$$[r]_{[(p,e)]}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(e)}(\widetilde{p}) = r_e(\widetilde{p}) = \widetilde{p}\,,$$

a odwzorowanie $[r]_\cdot$ jest multyplikatywne w pierwszym argumencie, tj. dla dowolnej pary $[(p_1,g_1)]$, $[(p_2,g_2)] \in (\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p})}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}
& [r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\
= \ & r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1,p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) = r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2)}(\widetilde{p}) \\
= \ & r_{\mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2^{-1})}(\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_1)}(g_1))} \circ r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)}(g_2))}(\widetilde{p}) \\
\equiv \ & \mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p_2)\cdot g_2^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g_1) \circ [r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\,,
\end{aligned}$$

którą wobec równości

$$\begin{aligned}
& \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p}),p_1\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_{g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde{p})}(p_2),p_1\big) \\
\equiv \ & \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_{g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde{p})}(p_2), r_{g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde{p})\cdot(g_2\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde{p}))^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(p_2)\big) \\
= \ & \big(g_2 \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,\widetilde{p})\big)^{-1} \cdot \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)
\end{aligned}$$

możemy przepisać w pożądanej postaci

$$\begin{aligned}[r]_{[M]([(p_1,g_1)],[(p_2,g_2)])}(\widetilde{p}) &= r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p}),p_1)}(g_1)}\big([r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\big)\\ &\equiv [r]_{[(p_1,g_1)]}\circ[r]_{[(p_2,g_2)]}(\widetilde{p})\,.\end{aligned}$$

Należy przy tym podkreślić, że zdefiniowane tu działanie wiązki dołączonej jest przemienne z działaniem prawostronnym definiującym $r.$ – w rzeczy samej, dla dowolnych $[(p,g)]\in\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\ h\in\mathrm{G}$ i $\widetilde{p}\in(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}$ stwierdzamy, że

$$\begin{aligned}[r]_{[(p,g)]}\circ r_h(\widetilde{p}) &= r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(r_h(\widetilde{p}),p)}(g)}\big(r_h(\widetilde{p})\big) = r_{g\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_h(\widetilde{p}))}(p)\\ &= r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,r_h(\widetilde{p}))}\big(r_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},p)}(g)}(\widetilde{p})\big)\\ &\equiv r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(\widetilde{p},r_h(\widetilde{p}))}\big([r]_{[(p,g)]}(\widetilde{p})\big) = r_h\circ[r]_{[(p,g)]}(\widetilde{p})\,.\end{aligned}$$

Działanie to możemy następnie podnieść, z zachowaniem wszystkich sprawdzonych powyżej jego pożądanych własności, z przestrzeni totalnej wiązki dołączonej do przestrzeni cięć (globalnych) tejże wiązki, wedle schematu

$$\Gamma[r].\ :\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\ :\ (\sigma,p)\longmapsto[r]_{\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p)\,.$$

Przestrzeń $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ (wyposażona w naturalną strukturę rozmaitości Frécheta) objawia się w roli nośnika struktury grupy (Frécheta–Liego) o operacjach grupowych

$$\begin{aligned}\Gamma[M]\ &:\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\ :\ (\sigma_1\sigma_2)\longmapsto[M]\circ(\sigma_1,\sigma_2)\,,\\ \Gamma[\mathrm{Inv}]\ &:\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\circlearrowleft\ :\ \sigma\longmapsto[\mathrm{Inv}]\circ\sigma\,,\\ \Gamma[\varepsilon]\ &:\ \{\bullet\}\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\ :\ \bullet\longmapsto\big[\big(\sigma(\cdot),e\big)\big]\,,\end{aligned}$$

indukowanych w oczywisty sposób (punktowo) z odnośnych operacji na $\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}$, i zarazem – w roli podgrupy grupy automorfizmów wiązki głównej P_{G} (nad identycznością na bazie), przy czym odwzorowanie $\Gamma[r]_\sigma$ utożsamiamy z automorfizmem $(\Gamma[r]_\sigma,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)$ w zapisie Def. 5.1. Używając tak rozumianego działania grupy cięć wiązki dołączonej na P_{G}, możemy następnie w oczywisty sposób rozszerzyć działanie tejże grupy cięć do wiązki $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$ nad wyjściową bazą B kładąc

$$\begin{aligned}\Gamma[\widetilde{r}].:=\Gamma[r].\times\mathrm{id}_M\ &:\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M\\ &:\ \big(\sigma,(p,m)\big)\longmapsto\big([r]_{\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),m\big)\,.\end{aligned}$$

Własnością tego działania o kluczowym znaczeniu dla naszych dalszych rozważań jest jego przemienność z działaniem $\widetilde{\lambda}.$ zdefiniowanym w Równ. (5.2), stanowiącym podstawę konstrukcji wiązki stowarzyszonej $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$. Istotnie, dla dowolnych $\sigma\equiv[(\pi,\gamma)]\in\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$, $g\in\mathrm{G}$ oraz $(p,m)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M$, otrzymujemy – przywoławszy sprawdzoną uprzednio przemienność działań: $[r].$ i $r.$ – x

$$\begin{aligned}\Gamma[\widetilde{r}]_\sigma\circ\widetilde{\lambda}_g(p,m) &= \big([r]_{\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(r_g(p))}\big(r_g(p)\big),\lambda_{g^{-1}}(m)\big)\\ &\equiv \big([r]_{\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\circ r_g(p),\lambda_{g^{-1}}(m)\big) = \big(r_g\circ[r]_{\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),\ell_{g^{-1}}(m)\big)\\ &= \widetilde{\lambda}_g\circ\Gamma[\widetilde{r}]_\sigma(p,m)\,.\end{aligned}$$

W konsekwencji tego faktu działanie indukowane $\Gamma[\widetilde{r}].$ zstępuje na rozmaitość orbit $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times M)/\mathrm{G}\equiv\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$, tj. kanonicznie indukuje działanie lewostronne grupy $\Gamma(P_{\mathrm{Ad.}}\mathrm{G})$ na rozmaitości $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M$ dane wzorem

$$\begin{aligned}[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_{.}\ &:\ \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\times\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\lambda M\\ &:\ \big(\sigma,[(p,m)]\big)\longmapsto\big[\big([r]_{\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}(p),m\big)\big]\,.\end{aligned}$$

Dotychczasowa nasza analiza przekonuje, że odwzorowanie to jest dobrze określone i ma wszystkie własności działania (lewostronnego) grupy. W ostatnim kroku indukujemy przy jego użyciu postulowane w treści dowodzonego stwierdzenia działanie grupy $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ na przestrzeni cięć (globalnych) wiązki stowarzyszonej,

$$\begin{aligned} \Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^{\lambda}_{\cdot} \quad &: \quad \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \times \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda} M) \longrightarrow \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda} M) \\ &: \quad \big(\sigma, [(\pi,\mu)]\big) \longmapsto \big[\big([r]_{\sigma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\circ\pi(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \mu(\cdot)\big)\big] \equiv \big[\big([r]_{\sigma(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \mu(\cdot)\big)\big]. \end{aligned} \tag{2}$$

To ostatnie w oczywisty sposób stanowi podniesienie do przestrzeni cięć odwzorowania

$$\begin{aligned} [\lambda]_{\cdot} \quad &: \quad \mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{B} (\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda} M) \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda} M \\ &: \quad \big([(p_1,g_1)], [(p_2,m_2)]\big) \longmapsto \big[\big(p_2, \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g_1)}(m_2)\big)\big], \end{aligned}$$

którego określoność i multyplikatywność w pierwszym argumencie jest bezpośrednią konsekwencją zweryfikowanych przez nas odnośnych własności działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]_{\cdot}$. To, że – zgodnie z tezą stwierdzenia – działanie $[\lambda]_{\cdot}$ jest lokalnie modelowane na $\lambda_{\cdot}$, stwierdzamy, używając wskazanych wcześniej izomorfizmów $[p_*]_{\mathrm{Ad}}$ oraz $[p_*]_{\lambda}$. Wykonujemy zatem prosty rachunek:

$$\begin{aligned} &\lambda_{[p_*]_{\mathrm{Ad}}([(p_1,g_1)])}\big([p_*]_{\lambda}\big([(p_2,m_2)]\big)\big) = \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_1)}(g_1)} \circ \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}(m_2) \\ = \; &\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)\cdot\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g_1)}(m_2) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_*,p_2)}\big(\lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g_1)}(m_2)\big) \\ \equiv \; &[p_*]_{\lambda}\big(\big[\big(p_2, \lambda_{\mathrm{Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_2,p_1)}(g_1)}(m_2)\big)\big]\big) \equiv [p_*]_{\lambda} \circ [\lambda]_{[(p_1,g_1)]}\big([(p_2,m_2)]\big). \end{aligned}$$

□

Powyższe stwierdzenie wraz z jego konstruktywnym dowodem pokazują dowodnie, że cel, o którym była mowa wcześniej, został osiągnięty. Eksponują przy tym rolę zbioru gładkich cięć wiązki stowarzyszonej, co każe nam przyjrzeć się uważniej temu ostatniemu. Czynimy to w

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 1 i Przykł. 1 (2). Istnieje bijekcja

$$\Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda} M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M),$$

w której zapisie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, M)$ jest zbiorem odwzorowań G-ekwiwariantnych z Def. 4.1.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $\sigma = [(\pi,\mu)] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\lambda} M)$ będzie cięciem *globalnym* określonym przez cięcia (lokalne) $\pi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ i $\mu \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(B \times M)$. Korzystając z odwzorowania ilorazowego i rzutu kanonicznego na bazę wiązki P_{G}, możemy zdefiniować odwzorowanie

$$\Phi_{\lambda}[\sigma] \; : \; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow M \; : \; p \longmapsto \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big).$$

Bez trudu upewniamy się, że powyższa definicja ma sens, oto bowiem dla dowolnej pary $(\pi',\mu') = (\pi \triangleleft \mathrm{Inv} \circ \gamma, \gamma \triangleright \mu)$ wyznaczonej w oczywisty sposób przez $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(B \times \mathrm{G})$ otrzymujemy – w odwołaniu do aksjomatyki działania grupy na zbiorze – pożądaną równość

$$\begin{aligned} \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\pi'\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu' \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \quad &= \quad \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\triangleleft\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1})}\big(\lambda_{\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big)\big) \\ &= \quad \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))\cdot\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)^{-1}\cdot\gamma\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) \\ &= \quad \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big). \end{aligned}$$

Jego G-ekwiwariantność wynika wprost z rachunku:

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda}[\sigma] \circ r_g(p) \quad &= \quad \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g,\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p\triangleleft g))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p \triangleleft g)\big) \\ &= \quad \lambda_{g^{-1}\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p)\big) = \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\lambda_{\cdot}}[\sigma](p), \end{aligned}$$

przeprowadzonego dla dowolnych $(p,g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$, a używającego Stw. 5.1 oraz wspomnianej wcześniej aksjomatyki.

Ażeby skonstruować odwrotność powyższego przyporządkowania, ustalmy (dowolnie) pokrycie trywializujące $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ wiązki $\mathsf{P}_{\rm G}$, a następnie dowolnemu odwzorowaniu G-ekwiwariantnemu $f\ :\ \mathsf{P}_{\rm G}\longrightarrow M$ przyporządkujmy rodzinę cięć lokalnych

$$S_\lambda[f]_i\quad:\quad \mathcal{O}_i\longrightarrow \mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M\ :\ x\longmapsto \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),f\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big)\big]\,,\qquad i\in I\,.$$

Każde z nich jest (lokalnie) gładkie jako superpozycja odnośnych odwzorowań gładkich $\big(\tau_i^{-1}(\cdot,e),f\circ\tau_i^{-1}(\cdot,e)\big)\ :\ \mathcal{O}_i\longrightarrow\mathsf{P}_{\rm G}\times M$ i surjektywnej submersji $\pi_{(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)/{\rm G}}$. Z łatwością przekonujemy się, że cięcia te są ograniczeniami (do odnośnych zbiorów $\mathcal{O}_i$) cięcia globalnego, stwierdzając, że z racji G-ekwiwariantności odwzorowań τ_i i f w dowolnym punkcie $x\in\mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}
S_\lambda[f]_j(x) &= \big[\big(\tau_j^{-1}(x,e),f\circ\tau_j^{-1}(x,e)\big)\big]=\big[\big(\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\big),f\circ\tau_i^{-1}\big(x,g_{ij}(x)\big)\big)\big]\\
&= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g_{ij}(x),f\big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g_{ij}(x)\big)\big]\\
&= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e)\triangleleft g_{ij}(x),g_{ij}(x)^{-1}\triangleright f\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big]\\
&= \big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),f\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big)\big]\equiv S_\lambda[f]_i(x)\,.
\end{aligned}$$

Bezpośredni rachunek obu superpozycji:

$$\Phi_\lambda\big[S_\lambda[f]\big]\ :\ \mathsf{P}_{\rm G}\longrightarrow M\ :\ p\longmapsto\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,p)}\big(f(p)\big)=\lambda_e\big(f(p)\big)=f(p)$$

oraz

$$\begin{aligned}
S_\lambda\big[\Phi_\lambda\big[[(\pi,\mu)]\big]\big]\quad &:\quad B\longrightarrow\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M\\
&:\ x\longmapsto\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\tau_i^{-1}(x,e),\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\circ\tau_i^{-1}(x,e))}\big(\mu\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}\circ\tau_i^{-1}(x,e)\big)\big)\big]\\
&\equiv\big[\big(\tau_i^{-1}(x,e),\lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\tau_i^{-1}(x,e),\pi(x))}\big(\mu(x)\big)\big)\big]=[(\pi,\mu)](x)
\end{aligned}$$

pokazuje dowodnie, że prawdziwe są tożsamości

$$\Phi_\lambda\circ S_\lambda={\rm id}_{{\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G},M)}\,,\qquad\qquad S_\lambda\circ\Phi_\lambda={\rm id}_{\Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)}\,.$$

□

Specjalizacja powyższego wyniku do przypadku wiązki dołączonej okazuje się mieć charakter strukturalny, co orzeka

Stwierdzenie 4. Bijekcja

$$\Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})\cong{\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G},{\rm G})\,,$$

o której mówi Stw. 3, jest izomorfizmem między grupą cięć wiązki dołączonej, o strukturze opisanej w dowodzie Stw. 2, i grupą odwzorowań $\mathsf{P}_{\rm G}$ w G ekwiwariantnych względem odnośnych działań (lewostronnych) $r_{{\rm Inv}(\cdot)}$ i Ad., o naturalnej strukturze punktowej (obecnej na zbiorze odwzorowań, których przeciwdziedziną jest grupa).

Dowód: W notacji dowodów obu stwierdzeń z tezy stwierdzenia dowodzonego sprawdzamy – dla dowolnej pary cięć $\sigma_\alpha=[(\pi_\alpha,\gamma_\alpha)]\in\Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})$, $\alpha\in\{1,2\}$ oraz punktu $p\in\mathsf{P}_{\rm G}$ –

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\rm Ad}\big[\Gamma[M](\sigma_1,\sigma_2)\big](p)\\
=\ &{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\pi_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\gamma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\cdot{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\pi_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),\pi_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\gamma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)\big)\\
=\ &{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\pi_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\gamma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)\\
&\cdot{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\pi_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\pi_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p),\pi_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\gamma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)\\
=\ &{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\pi_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\gamma_1\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)\cdot{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p,\pi_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\gamma_2\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big)
\end{aligned}$$

$$= \quad M \circ \big(\Phi_{\rm Ad}(\sigma_1), \Phi_{\rm Ad}(\sigma_2)\big)(p)\,.$$

□

Strukturalny charakter bijekcji, o której mowa w Stw. 2 i 3, najpełniej ilustruje

Stwierdzenie 5. Przyjmijmy zapis Stw. 2 i 3 oraz ich dowodów. Bijekcja Φ_λ jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy $\Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})$: działania $\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_{\cdot}$ na przestrzeni $\Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)$, zdefiniowanego w Równ. (2), oraz naturalnego działania

$$\begin{aligned} [\Phi_{\rm Ad}\lambda]_{\cdot} \quad &: \quad \Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G}) \times {\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, M) \longrightarrow {\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, M) \\ &: \quad (\gamma, \mu) \longmapsto \lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\gamma](\cdot)}\big(\mu(\cdot)\big) \end{aligned}$$

na przestrzeni odwzorowań G-ekwiwariantnych ${\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, M)$, czyli działanie

$$\Phi_{\rm Ad}\lambda_{\cdot} \equiv [\Phi_{\rm Ad}\lambda]_{\cdot} \circ \big(\Phi_{\rm Ad}^{-1} \times {\rm id}_{{\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, M)}\big)$$

grupy ${\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, {\rm G})$ czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{tikzcd} \Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G}) \times \Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M) \arrow[r, "\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_{\cdot}"] \arrow[d, "\Phi_{\rm Ad}\times\Phi_\lambda"'] & \Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M) \arrow[d, "\Phi_\lambda"] \\ {\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, {\rm G}) \times {\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, M) \arrow[r, "\Phi_{\rm Ad}\lambda_{\cdot}"'] & {\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, M) \end{tikzcd}\,.$$

Dowód: Przede wszystkim upewnimy się, że odwzorowanie $\Phi_{\rm Ad}\lambda_{\cdot}$ jest dobrze określone. W tym celu wybieramy dowolną parę $(\gamma, \mu) \in {\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, {\rm G}) \times {\rm Hom}_{\rm G}(\mathsf{P}_{\rm G}, M)$ i rozważamy wynik ewaluacji $\Phi_{\rm Ad}\lambda_\gamma(\mu)$ – musimy udowodnić, że ten jest G-ekwiwariantny, co czynimy w rachunku bezpośrednim, wykonanym dla dowolnych $(p, g) \in \mathsf{P}_{\rm G} \times {\rm G}$,

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm Ad}\lambda_\gamma \circ r_g^*(\mu)(p) \quad &= \quad \lambda_{\gamma\circ r_g(p)}\big(\mu \circ r_g(p)\big) = \lambda_{{\rm Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))} \circ \lambda_{g^{-1}}\big(\mu(p)\big) \\ &= \quad \lambda_{g^{-1}}\big(\lambda_{\gamma(p)}\big(\mu(p)\big)\big) \equiv \lambda_{g^{-1}} \circ \Phi_{\rm Ad}\lambda_\gamma(\mu)(p)\,. \end{aligned}$$

To, że odwzorowanie $\Phi_{\rm Ad}\lambda_{\cdot}$ spełnia aksjomatykę działania, jest oczywiste. Pozostaje zatem zweryfikować jego ekwiwariantność. Dla dowolnych $\widetilde{\sigma} = [(\widetilde{\pi}, \widetilde{\gamma})] \in \Gamma({\rm Ad}\,\mathsf{P}_{\rm G})$ i $\sigma = [(\pi, \mu)] \in \Gamma(\mathsf{P}_{\rm G}\times_\lambda M)$ oraz $p \in \mathsf{P}_{\rm G}$ obliczamy więc

$$\begin{aligned} &\Phi_\lambda\big[\Gamma[\Gamma[\widetilde{r}]]^\lambda_{\widetilde{\sigma}}(\sigma)\big](p) = \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p, \lambda_{\widetilde{\sigma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)}(\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big) \\ = \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p, r_{{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p), \widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}(\widetilde{\gamma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}(\pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big) \\ = \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p, r_{\widetilde{\gamma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p), \pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}(\widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big) \\ = \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p, \widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))\cdot\widetilde{\gamma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p), \pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big) \\ = \quad & \lambda_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p, \widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))\cdot\widetilde{\gamma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p), p)} \circ \ell_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p, \pi\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\mu \circ \pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p)\big) \\ = \quad & \lambda_{{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p, \widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}(\widetilde{\gamma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(p))}\big(\Phi_\lambda[\sigma](p)\big) \\ = \quad & \Phi_{\rm Ad}\lambda_{{\rm Ad}_{\phi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\cdot, \widetilde{\pi}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\cdot))}(\widetilde{\gamma}\circ\pi_{\mathsf{P}_{\rm G}}(\cdot))}\big(\Phi_\lambda[\sigma]\big)(p) \\ \equiv \quad & \Phi_{\rm Ad}\lambda_{\Phi_{\rm Ad}[\widetilde{\sigma}]}\big(\Phi_\lambda[\sigma]\big)(p)\,, \end{aligned}$$

co jest rezultatem pożądanym. □

Dotychczasowe nasze rozważania ukazały $\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})$ w roli wiązki grup działającej naturalnie na wiązce rozmaitości M z modelowym działaniem λ. Poniższe stwierdzenie istotnie pogłębia tę obserwację, otwierając przy tym drogę do naturalnej fizykalnej interpretacji tejże grupy jako grupy cechowań teorii pola.

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Stw. 2 i jego dowodu. Istnieje kanoniczny izomorfizm grup

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) &\cong \left\{ (\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, f) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \;\middle|\; f = \mathrm{id}_B \right\}\\ &=: \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B)\,.\end{aligned}$$

<u>*Dowód*</u>*:* Zaczniemy od wskazania bijekcji między zbiorami $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ i $\mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B)$. Wybierzmy (dowolnie) $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$ i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\Psi[\gamma] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \circlearrowleft \;:\; p \longmapsto r_{\gamma(p)}(p)\,.$$

Jest ono jawnie G-ekwiwariantne,

$$\begin{aligned}\forall_{(p,g)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}} \;:\; \Psi[\gamma]\circ r_g(p) &\equiv r_{\gamma\circ r_g(p)}\big(r_g(p)\big) = r_g \circ r_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\gamma(p))}(p) = r_{\gamma(p)\cdot g}(p)\\ &= r_g \circ \Psi[\gamma](p)\,,\end{aligned}$$

i zachowuje włókna, a zatem definiuje automorfizm

$$\big(\Psi[\gamma], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B)\,.$$

Jest przy tym homomorfizmem grup, o czym przekonuje bezpośredni rachunek

$$\begin{aligned}\Psi\big[\widetilde{M}(\gamma_1, \gamma_2)\big](p) &= r_{\gamma_1(p)\cdot\gamma_2(p)}(p) \equiv r_{\gamma_2(p)\cdot\mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))}(p)\\ &= r_{\mathrm{Ad}_{\gamma_2(p)^{-1}}(\gamma_1(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p) = r_{\gamma_1(p\triangleleft\gamma_2(p))} \circ r_{\gamma_2(p)}(p)\\ &\equiv \Psi[\gamma_1]\circ\Psi[\gamma_2](p)\,,\end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnych $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$. Na tym etapie wystarczy przywołać Stw. 3, aby uzyskać homomorfizm grup

$$\big(\Psi[\cdot], \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B\big) \circ \Phi_{\mathrm{Ad.}} \;:\; \Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B)\,.$$

Idąc w kierunku odwrotnym, przyporządkujmy dowolnemu automorfizmowi $(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B)$ odwzorowanie

$$\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)] \;:\; \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G} \;:\; p \longmapsto \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi(p)\big)\,,$$

którego G-ekwiwariantności dowodzimy w odwołaniu do Stw. 5.1, a dla dowolnych $(p, g) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)]\circ r_g(p) &\equiv \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p), \Phi\circ r_g(p)\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(r_g(p), r_g\circ\Phi(p)\big)\\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\big(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi(p)\big)\big) \equiv \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\chi[(\Phi, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)](p)\,.\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane tym sposobem odwzorowanie

$$\chi \;:\; \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}, \mathrm{G})$$

jest homomorfizmem grup – w rzeczy samej, dla dowolnej pary automorfizmów $(\Phi_\alpha, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B) \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \,|\, B)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ obliczamy

$$\begin{aligned}\chi\big[(\Phi_1, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\circ(\Phi_2, \mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \mathrm{id}_B)\big](p) &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_1\circ\Phi_2(p)\big)\\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p, \Phi_1(p)\big)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1\circ\Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

ale też

$$\begin{aligned}&\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1\circ\Phi_2(p)\big) = \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1\big(p\triangleleft\Phi_P\big(p, \Phi_2(p)\big)\big)\big)\\ &= \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(\Phi_1(p), \Phi_1(p)\triangleleft\Phi_P\big(p, \Phi_2(p)\big)\big) = \Phi_P\big(p, \Phi_2(p)\big)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\chi\big[(\Phi_1,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\circ(\Phi_2,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\big](p)=\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_1(p)\big)\cdot\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,\Phi_2(p)\big)$$

$$\equiv\ \widetilde{M}\big(\chi\big[(\Phi_1,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\big],\chi\big[(\Phi_2,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)\big]\big)(p)\,,$$

zgodnie z oczekiwaniami. Ostatecznie otrzymujemy homomorfizm grup

$$S_{\mathrm{Ad.}}\circ\chi\ :\ \mathrm{Aut}_{\mathbf{GrpBun}_{\mathrm{G}}(B)}(\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\,|\,B)\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Ad}\,\mathsf{P}_{\mathrm{G}})\,.$$

Ażeby stwierdzić, że jest to odwrotność wskazanego wcześniej homomorfizmu $\Psi\circ\Phi_{\mathrm{Ad}}$, wystarczy sprawdzić, że χ jest odwrotnością automorfizmu $\big(\Psi[\cdot],\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B\big)$, co czynimy wprost licząc – dla dowolnych $(p,g,x)\in\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times\mathrm{G}\times B$ –

$$\begin{aligned}\big(\Psi[\cdot],\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B\big)\circ\chi[(\Phi,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)](p,g,x)\ &=\ \big(r_{\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,\Phi(p))}(p),g,x\big)=\big(\Phi(p),g,x\big)\\ &\equiv\ (\Phi,\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B)(p,g,x)\end{aligned}$$

oraz

$$\chi\circ\big(\Psi[\cdot],\mathrm{id}_{\mathrm{G}},\mathrm{id}_B\big)[\gamma](p)=\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}\big(p,r_{\gamma(p)}(p)\big)=\gamma(p)\,.$$

□

Konstrukcje dodatkowe

W niniejszym rozdziale zbieramy wyniki szczegółowe stanowiące podstawę zastosowań teorii wiązek stowarzyszonych w modelowaniu zjawisk fizykalnych. Pierwsze dwa odgrywają istotną rolę w opisie tzw. efektu Higgsa.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Tw. 4.3 oraz Stw. 1 i niechaj G będzie grupą Liego, $\mathrm{H}\subseteq\mathrm{G}$ – dowolną jej podgrupą domkniętą, $(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},B,\mathrm{G},\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}})$ zaś – wiązką główną. Rzut kanoniczny $\pi_{\mathrm{G/H}}$: $\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G/H}$ indukuje niezmiennik wiązek stowarzyszonych

$$\Phi[\pi_{\mathrm{G/H}}]\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_\ell\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{[\ell]}\mathrm{G/H}\,,$$

który w połączeniu z kanonicznym izomorfizmem $\widetilde{\iota}$ z Przykł. 1 (3) określa morfizm wiązek

$$\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}:=\Phi[\pi_{\mathrm{G/H}}]\circ\widetilde{\iota}^{-1}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{[\ell]}\mathrm{G/H}$$

zadający strukturę wiązki głównej

$$\big(\mathsf{P}_{\mathrm{G}},\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{[\ell]}\mathrm{G/H},\mathrm{H},\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}\big)$$

i indukujący izomorfizm wiązek

$$[\widetilde{\iota}]^{-1}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}\xrightarrow{\cong}\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{[\ell]}\mathrm{G/H}\,.$$

Dowód: Rzut kanoniczny $\pi_{\mathrm{G/H}}$ jest odwzorowaniem G-ekwiwariantnym,

$$\forall_{g,\widetilde{g}\in\mathrm{G}}\ :\ \pi_{\mathrm{G/H}}\circ\ell_{\widetilde{g}}(g)=\pi_{\mathrm{G/H}}(\widetilde{g}\cdot g)=(\widetilde{g}\cdot g)\mathrm{H}\equiv[\ell]_{\widetilde{g}}(gH)\equiv[\ell]_{\widetilde{g}}\circ\pi_{\mathrm{G/H}}(g)\,,$$

zatem w świetle Stw. 1 indukuje niezmiennik wiązek stowarzyszonych jak w tezie dowodzonego stwierdzenia, a ten z kolei pozwala określić morfizm wiązek

$$\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}\ :\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}\longrightarrow\mathsf{P}_{\mathrm{G}}\times_{[\ell]}\mathrm{G/H}\ :\ p\longmapsto\Phi[\pi_{\mathrm{G/H}}]\big([(p,e)]\big)\,,$$

który możemy przepisać w postaci

$$\begin{aligned}\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}(p)\ &\equiv\ [p]_{[\ell]}\circ\pi_{\mathrm{G/H}}\circ[p]_{[\ell]}^{-1}\big([(p,e)]\big)\\ &=\ [p]_{[\ell]}\circ\pi_{\mathrm{G/H}}\big(\phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p,p)\cdot e\big)=[p]_{[\ell]}\circ\pi_{\mathrm{G/H}}(e)=[p]_{[\ell]}(\mathrm{H})=[(p,\mathrm{H})]\,,\end{aligned}$$

a następnie poddać szczegółowej analizie. Jest on złożeniem surjektywnych submersji,

$$\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}=[\cdot]_{[\ell]}\circ\pi_{\mathrm{G/H}}\circ[\cdot]_{[\ell]}^{-1}\circ\widetilde{\iota}^{-1}\,,$$

i jako taki sam jest surjektywną submersją, a przy tym jego poziomice są orbitami działania podgrupy H, oto bowiem dla dowolnych $p_1, p_2 \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ zachodzą równoważności

$$\begin{aligned} & \phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}(p_2) = \phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}(p_1) && \Longleftrightarrow \quad [(p_2, \mathrm{H})] = [(p_1, \mathrm{H})] \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists_{g \in \mathrm{G}} \ : \ (p_2, \mathrm{H}) = \big(p_1 \triangleleft g^{-1}, g\mathrm{H}\big) && \Longleftrightarrow \quad \exists_{g \in \mathrm{H}} \ : \ p_2 = p_1 \triangleleft g^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad & p_2 \in p_1 \triangleleft \mathrm{H} \,. \end{aligned}$$

Mamy też dla każdej pary $(p_1, p_2) \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}} \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ relację $p_2 = p_1 \triangleleft \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2)$, zatem określone jednoznacznie przez warunek przynależności do wspólnej poziomicy $\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}$ odwzorowanie

$$\widetilde{\phi}_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}} \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}} \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{H} \ : \ (p_1, p_2) \longmapsto \phi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p_1, p_2)$$

jest jawnie gładkie. Możemy zatem przywołać Stw. 5.2, ażeby skonstatować, że

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}"] \\ & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H} \end{tikzcd}$$

jest w istocie wiązką główną o grupie strukturalnej H. Na gruncie Stw. Niezb-10 zauważamy następnie, że wobec surjektywnej submersywności rzutu $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}$ oraz gładkości $\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}$ istnieje jedyne odwzorowanie

$$[\widetilde{\iota}]^{-1} \ : \ \mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H} \longrightarrow \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}$$

domykające diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H} \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[ur, "\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}"] \arrow[r, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H} \arrow[u, dashed, "{[\widetilde{\iota}]^{-1}}"'] \end{tikzcd} .$$

Odwracając rolami odwzorowania $\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}$ i $\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}$ (tj. w szczególności wykorzystując surjektywną submersywność tego ostatniego), uzyskujemy diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H} \\ \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \arrow[ur, "\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}"] \arrow[r, "\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}"'] & \mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H} \arrow[u, dashed, "{[\widetilde{\iota}]}"'] \end{tikzcd} ,$$

którego istnienie przesądza o dyfeomorficznym charakterze $[\widetilde{\iota}]$. Dyfeomorfizm ten zachowuje poziomice odnośnych surjektywnych submersji ($\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}$ i $\phi_{\pi_{\mathrm{G/H}}}$), oto bowiem dla dowolnego punktu $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$ spełnione są równości

$$\begin{aligned} \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}} \circ [\widetilde{\iota}]^{-1}(\mathsf{p} \triangleleft \mathrm{H}) \ & \equiv \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}} \circ [\widetilde{\iota}]^{-1} \circ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}(\mathsf{p}) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}} \circ \phi_{\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}}(\mathsf{p}) \\ & = \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}} \circ \Phi[\pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}}] \circ \widetilde{\iota}^{-1}(\mathsf{p}) = \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}} \times_{[\ell]} \mathrm{G/H}}\big([(p, \mathrm{H})]\big) \\ & \equiv \ \pi_{\mathsf{P}_{\mathrm{G}}}(p) \,, \end{aligned}$$

możemy go przeto użyć do wyindukowania na $\mathsf{P}_{\mathrm{G}}/\mathrm{H}$ struktury wiązki włóknistej, względem której $[\widetilde{\iota}]$ jest (tautologicznie) izomorfizmem wiązek włóknistych. □

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Tw. 4.3 i niechaj $\mathrm{H}_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ będą podgrupami domkniętymi grupy Liego G wzajem sprzężonymi, tj. takimi, dla których istnieje element $g_{21} \in \mathrm{G}$ o własności

$$\mathrm{H}_2 = \mathrm{Ad}_{g_{21}}(\mathrm{H}_1)\,,$$

i niech $(\mathsf{P}_\mathrm{G}, B, \mathrm{G}, \pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}})$ będzie wiązką główną. Dyfeomorfizm G-rozmaitości

$$[\wp_{21}]\ :\ \mathrm{G}/\mathrm{H}_1 \xrightarrow{\cong} \mathrm{G}/\mathrm{H}_2\ :\ g\mathrm{H}_1 \longmapsto \big(g\cdot g_{21}^{-1}\big)\mathrm{H}_2$$

indukuje izomorfizm wiązek stowarzyszonych

$$\Phi[\wp_{21}]\ :\ \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_1 \xrightarrow{\cong} \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_2\,,$$

który rozszerza się do izomorfizmu wiązek głównych

$$\big(r_{g_{21}^{-1}}, \Phi[\wp_{21}], \mathrm{Ad}_{g_{21}}\big)\ :\ \big(\mathsf{P}_\mathrm{G}, \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_1, \phi_{\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}/\mathrm{H}_1}}\big)$$

$$\xrightarrow{\cong} \big(\mathsf{P}_\mathrm{G}, \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_2, \phi_{\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}/\mathrm{H}_2}}\big)\,,$$

tym samym domykając diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{G} \arrow[rr, "\widetilde{\iota}\circ[\cdot]_\ell"] \arrow[dd, "\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_2}"'] & & \mathsf{P}_\mathrm{G} \arrow[dd, "\phi_{\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_2}}"'] & & \mathrm{H}_2 \arrow[ll] \\
\mathrm{G} \arrow[ur, "\wp_{g_{21}^{-1}}"] \arrow[dd, "\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_1}"'] & & \mathsf{P}_\mathrm{G} \arrow[ll, "{[\cdot]_\ell^{-1}\circ\widetilde{\iota}^{-1}}"'] \arrow[ur, "r_{g_{21}^{-1}}"] \arrow[dd, "\phi_{\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_1}}"'] & & \mathrm{H}_1 \arrow[ll] \arrow[ur, "\mathrm{Ad}_{g_{21}^{-1}}"'] & \\
 & \mathrm{G}/\mathrm{H}_2 \arrow[rr, "{[\cdot]_{[\ell]}}"] & & \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_2 \arrow[dd, "\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_2}"] & & \\
\mathrm{G}/\mathrm{H}_1 \arrow[ur, "{[\wp_{21}]}"'] & & \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_1 \arrow[ll, "{[\cdot]_{[\ell]}^{-1}}"'] \arrow[ur, "{\Phi[\wp_{21}]}"'] \arrow[dd, "\pi_{\mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_1}"] & & & \\
 & & & B & & \\
 & & B \arrow[ur, equal] & & &
\end{tikzcd}\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Dyfeomorfizm $[\wp_{21}]$ jest dobrze określony, oto bowiem dla dowolnego $h \in \mathrm{H}_1$ zachodzi

$$\big(g\cdot h\cdot g_{21}^{-1}\big)\mathrm{H}_2 = \big(g\cdot g_{21}\cdot \mathrm{Ad}_{g_{21}}(h)\big)\mathrm{H}_2 = \big(g\cdot g_{21}^{-1}\big)\mathrm{H}_2\,,$$

a nadto – jawnie G-niezmienniczy, wyznacza zatem odwracalny niezmiennik, czyli izomorfizm wiązek stowarzyszonych

$$\Phi[\wp_{21}]\ :\ \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_1 \xrightarrow{\cong} \mathsf{P}_\mathrm{G}\times_{[\ell]}\mathrm{G}/\mathrm{H}_2\ :\ [(p, g\mathrm{H}_1)] \longmapsto \big[\big(p, \big(g\cdot g_{21}^{-1}\big)\mathrm{H}_2\big)\big]\,,$$

który – jak łatwo widać – jest pokrywany przez odwzorowanie $r_{g_{21}^{-1}}$, oto bowiem dla dowolnego $p \in \mathsf{P}_\mathrm{G}$ mamy równość

$$\begin{aligned}
\phi_{\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_2}}\circ r_{g_{21}^{-1}}(p) \quad &\equiv \quad \phi_{\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_2}}\big(p\triangleleft g_{21}^{-1}\big) = \big[\big(p\triangleleft g_{21}^{-1}, \mathrm{H}_2\big)\big] = \big[\big(p, g_{21}^{-1}\mathrm{H}_2\big)\big] \\
&\equiv \quad \Phi[\wp_{21}]\big([(p,\mathrm{H}_1)]\big) = \Phi[\wp_{21}]\circ\phi_{\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_1}}(p)\,.
\end{aligned}$$

Ekwiwariantność $r_{g_{21}^{-1}}$ względem działania grup $\mathrm{H}_1 \ni h_1$ i H_2,

$$r_{g_{21}^{-1}}(p\triangleleft h_1) = p\triangleleft\big(h_1\cdot g_{21}^{-1}\big) \equiv p\triangleleft\big(g_{21}^{-1}\cdot\mathrm{Ad}_{g_{21}}(h_1)\big) \equiv r_{g_{21}^{-1}}(p)\triangleleft\mathrm{Ad}_{g_{21}}(h_1)\,,$$

pozwala ostatecznie zidentyfikować $\left(r_{g_{21}^{-1}}, \Phi[\wp_{21}], \mathrm{Ad}_{g_{21}}\right)$ jako izomorfizm wiązek głównych. Wreszcie na koniec sprawdzamy przemienność poddiagramów zawierających oba wierzchołki G. Jest więc, nad dowolnym punktem $p \in \mathsf{P}_{\mathrm{G}}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\iota} \circ [p]_\ell \circ \wp_{g_{21}^{-1}} \circ [p]_\ell^{-1} \circ \widetilde{\iota}^{-1}(p) &= \widetilde{\iota} \circ [p]_\ell \circ \wp_{g_{21}^{-1}} \circ [p]_\ell^{-1}\big([(p,e)]\big) = \widetilde{\iota} \circ [p]_\ell \circ \wp_{g_{21}^{-1}}(e) \\ &= \widetilde{\iota} \circ [p]_\ell\big(g_{21}^{-1}\big) = \widetilde{\iota}\big(\big[\big(p, g_{21}^{-1}\big)\big]\big) = p \triangleleft g_{21}^{-1} \equiv r_{g_{21}^{-1}}(p)\,,\end{aligned}$$

a ponadto, dla dowolnego elementu $g \in \mathrm{G}$,

$$\pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_2} \circ \wp_{g_{21}^{-1}}(g) = \pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_2}\big(g \cdot g_{21}^{-1}\big) = \big(g \cdot g_{21}^{-1}\big)\mathrm{H}_2 \equiv [\wp_{g_{21}^{-1}}](g\mathrm{H}_1) \equiv [\wp_{g_{21}^{-1}}] \circ \pi_{\mathrm{G}/\mathrm{H}_1}(g)\,.$$

□

Wykład poświęcony wiązkom stowarzyszonym domykamy klamrą kompozycyjną dotyczącą struktur, których studium doprowadziło nas – poprzez abstrakcję ich elementarnych własności – do użytecznego pojęcia wiązki stowarzyszonej.

Stwierdzenie 9. Istnieje wzajem jednoznaczna odpowiedniość między gładkimi cięciami lokalnymi (a zatem także trywializacjami lokalnymi) wiązki reperów wiązki wektorowej i trywializacjami lokalnymi tejże wiązki wektorowej.

<u>*Dowód:*</u> Dowolne cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}$, $\mathcal{O} \in \mathscr{T}(B)$ indukuje odwzorowanie

$$\tau_\sigma : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n} : v \longmapsto \big(\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)\,,$$

jawnie $\mathbb{K}$-liniowe i gładkie, o oczywistej odwrotności

$$\tau_\sigma^{-1} : \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n} \longrightarrow \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) : (x, V) \longmapsto \sigma(x)(V)\,,$$

także gładkiej (i $\mathbb{K}$-liniowej). Własności te pozwalają zidentyfikować τ_σ jako trywializację lokalną wiązki $\mathbb{V}$ stowarzyszoną z cięciem lokalnym σ wiązki reperów.

Odwracając powyższe rozumowanie, dowolnej trywilizacji lokalnej $\tau : \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n}$ przyporządkowujemy cięcie (lokalne)

$$\sigma_\tau : \mathcal{O} \longrightarrow \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}) : x \longmapsto \tau^{-1}(x, \cdot)\,.$$

Bez trudu przekonujemy się, że skonstruowane tu przyporządkowania są wzajem odwrotne. Istotnie, stwierdzamy równość

$$\forall_{(x,V) \in \mathcal{O} \times \mathbb{K}^{\times n}} : \sigma_{\tau_\sigma}(x)(V) = \tau_\sigma^{-1}(x, V) = \sigma(x)(V)\,,$$

a z niej wyprowadzamy tożsamość

$$\sigma_{\tau_\sigma} = \sigma\,.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\forall_{v \in \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O})} : \tau_{\sigma_\tau}(v) &= \big(\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma_\tau \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big) = \Big(\pi_{\mathbb{V}}(v), \tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot\big)^{-1}(v)\Big) \\ &\equiv \tau \circ \tau^{-1}\Big(\pi_{\mathbb{V}}(v), \tau^{-1}\big(\pi_{\mathbb{V}}(v), \cdot\big)^{-1}(v)\Big) = \tau(v)\,,\end{aligned}$$

przeto

$$\tau_{\sigma_\tau} = \tau\,.$$

□

Stwierdzenie 10. Dowolna rodzina trywializacji lokalnych wiązki reperów wiązki wektorowej indukuje rodzinę trywializacji lokalnych wiązki wektorowej (stowarzyszonych z tą samą rodziną podzbiorów otwartych ich wspólnej bazy) o tych samych odwzorowaniach przejścia. W szczególności każda redukcja wiązki reperów pociąga za sobą takąż redukcję wiązki wektorowej.

<u>*Dowód:*</u> Niechaj $(\mathbb{V}, B, \mathbb{K}^{\times n}, \pi_{\mathbb{V}})$ będzie wiązką wektorową (nad ciałem $\mathbb{K}$), $(\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}, B, \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n), \pi_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}})$ zaś – wiązką jej reperów i niech $\tau_i \,:\, \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n)$, $\mathcal{O}_i \in \mathscr{T}(B)$, $i \in \{1, 2\}$ będą dwiema trywializacjami lokalnymi drugiej z nich, o niepustym przecięciu dziedzin, $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, nad którym są określone odwzorowania przejścia $g_{12} \,:\, \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n)$. Z każdą z trywializacji stowarzyszamy cięcie lokalne wedle formuły podanej w dowodzie Stw. 5.5,

$$\sigma_i \,:\, \mathcal{O}_i \longrightarrow \pi^{-1}_{\mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V}}(\mathcal{O}_i) \subset \mathsf{F}_{\mathrm{GL}}\mathbb{V} \,:\, y \longmapsto \tau_i^{-1}(y, \mathbf{1}_n)\,,$$

a następnie używamy ich do skonstruowania odnośnych gładkich trywializacji lokalnych wiązki $\mathbb{V}$ zgodnie z przepisem sformułowanym w dowodzie Stw. 9,

$$\tau_{\sigma_i} \,:\, \pi_{\mathbb{V}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{K}^{\times n} \,:\, v \longmapsto \big(\pi_{\mathbb{V}}(v), (\sigma_i \circ \pi_{\mathbb{V}})(v)^{-1}(v)\big)\,, \quad i \in \{1, 2\}\,.$$

O tym, że są to trywializacje o postulowanych odwzorowaniach przejścia, przekonujemy się w bezpośrednim rachunku, przeprowadzonym dla dowolnych $(y, V) \in \mathcal{O}_{12} \times \mathbb{K}^{\times n}$,

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) &= \tau_{\sigma_1}\big(\sigma_2(y)(V)\big) \\ &= \Big(\pi_{\mathbb{V}}\big(\sigma_2(y)(V)\big), (\sigma_1 \circ \pi_{\mathbb{V}})\big(\sigma_2(y)(V)\big)^{-1}\big(\sigma_2(y)(V)\big)\Big) \\ &= \big(y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_2(y)(V)\big)\,, \end{aligned}$$

który po uwzględnieniu ciągu równości

$$\begin{aligned} \sigma_2(y) &\equiv \tau_2^{-1}(y, \mathbf{1}_n) = \tau_1^{-1}\big(y, g_{12}(y)\big) = \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \triangleleft g_{12}(y) \equiv \tau_1^{-1}(y, \mathbf{1}_n) \circ g_{12}(y) \\ &\equiv \sigma_1(y) \circ g_{12}(y) \end{aligned}$$

odtwarza pożądany wynik

$$\tau_{\sigma_1} \circ \tau_{\sigma_2}^{-1}(y, V) = \big(y, \sigma_1(y)^{-1} \circ \sigma_1(y) \circ g_{12}(y)(V)\big) \equiv \big(y, g_{12}(y)(V)\big)\,.$$

□