

GR II W CZASACH ZARAZY
7. WYKŁAD ZDALNY

SYMETRIE WYCECHOWANE W JĘZYKU WIĄZEK GŁÓWNYCH I STOWARZYSZONYCH
– TOPOLOGIA I GEOMETRIA

Przedstawimy obecnie fundamentalne zastosowanie konstrukcji wiązek głównych i stowarzyszonych w mechanice i teorii pola, jakim jest uniwersalny schemat **cechowania** (tj. **uloalniania**) ich symetrii globalnych. Zaczniemy od pomocniczej

Definicja 1. Niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą o lokalnych trywializacjach $\tau_i : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$ nad pokryciem trywializującym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i^B\}_{i \in I}$, przy czym zakładamy¹, że elementy pokrycia są zarazem dziedzinami map $\kappa_i^B : \mathcal{O}_i^B \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{m}$, $m = \dim B$ pewnego atlasu $\widehat{\mathcal{A}}_B$ bazy B . Zdefiniujemy pomocnicze dyfeomorfizmy

$$T_v^i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\cong} T_v^i(\mathcal{U}_i) =: \mathcal{U}_i^0 : w \mapsto w - v, \quad v \in \mathcal{U}_i$$

odwzorowujące zbiory otwarte \mathcal{U}_i w odnośne otoczenia $\mathbf{0}_m \equiv T_v^i(v) \in \mathbb{R}^{m}$. Wybrawszy dowolny atlas $\widehat{\mathcal{A}}_F = \{\kappa_\alpha^F\}_{\alpha \in J}$ włókna typowego F , złożony z map $\kappa_\alpha^F : \mathcal{O}_\alpha^F \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^{n}$, $n = \dim F$, $\alpha \in J$, indukujemy na E atlas $\widehat{\mathcal{A}}_E = \{\kappa_{i,\alpha}^E\}_{(i,\alpha) \in I \times J}$, który tworzą mapy

$$\kappa_{i,\alpha}^E \equiv (\kappa_i^B \times \kappa_\alpha^F) \circ \tau_i \upharpoonright_{\tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F)} : \tau_i^{-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_\alpha \subset \mathbb{R}^{m+n},$$

zwane **mapami dostosowanymi**. Na zbiorze

$$\Gamma_x(E) := \{ \phi \in \Gamma_{\text{loc}}(E) \mid (\pi_E \circ \phi)^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset \}$$

cięć lokalnych wiązki E określonych w punkcie $x \in B$ zadajemy relację równoważności:

$$\phi_1 \sim_{j_x^1} \phi_2 \iff (\phi_1(x), \mathbb{T}_x \phi_1) = (\phi_2(x), \mathbb{T}_x \phi_2).$$

Klasę abstrakcji cięcia $\phi \in \Gamma_x(E)$ względem tej relacji oznaczamy symbolem

$$j_x^1 \phi \equiv [\phi]_{\sim_{j_x^1}}$$

i określamy mianem **pierwszego miotu różniczkowego cięcia** ϕ . Zbiór tych klas abstrakcji nad ustalonym punktem $x \in B$ będziemy oznaczać symbolem

$$J_x^1 E \equiv \{ j_x^1 \phi \mid \phi \in \Gamma_x(E) \}.$$

Wiązka pierwszych miotów różniczkowych cięć wiązki E to wiązka włóknista o składowych

- baza B o strukturze rozmiotłości zadawanej przez atlas $\widehat{\mathcal{A}}_B$;
- przestrzeń totalna

$$J^1 E := \bigsqcup_{x \in B} J_x^1 E$$

- o strukturze rozmiotłości opisanej poniżej;
- włókno typowe $J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{m+n} \times F)$ o strukturze rozmiotłości różniczkowalnej opisanej poniżej;
- rzut na bazę

$$\pi_{J^1 E} : J^1 E \longrightarrow B : (j_x^1 \phi, x) \mapsto x.$$

¹Założenie to nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań, oto bowiem pokrycie takie uzyskujemy dokonując rozdrobnienia dowolnego pokrycia trywializującego względem wybranego (dowolnie) atlasu na B .

Przy tym odwzorowania

$$\begin{aligned} J^1 \kappa_{i,\alpha}^E & : J^1 E_{i,\alpha} \equiv \{ j_x^1 \phi \mid \phi(x) \in \tau_i^{E-1}(\mathcal{O}_i^B \times \mathcal{O}_\alpha^F) \} \xrightarrow{\cong} J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{i,\alpha}) \\ & : j_x^1 \phi \longmapsto (\kappa_i^B(x), \kappa_\alpha^F \circ \phi(x), D(\kappa_\alpha^F \circ \phi \circ \kappa_i^{B-1})(\kappa_i^B(x))), \quad (i, \alpha) \in I \times J \end{aligned}$$

indukują na $J^1 E$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{i,\alpha}) \subset \mathbb{R}^{m+n+mn}$, tj. taką, w której podzbiór $\mathcal{V} \subset J^1 E$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek

$$\forall (i,\alpha) \in I \times J : J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(\mathcal{V} \cap J^1 E_{i,\alpha}) \in \mathcal{T}(J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{i,\alpha})).$$

W tej topologii odwzorowania $J^1 \kappa_{i,\alpha}^E$ są – wprost na mocy jej konstrukcji – homeomorfizmami i (dzięki temu) możemy ich użyć jako map, zwanych **mapami indukowanymi** (lub **naturalnymi**), o odnośnych transformacjach współrzędniowych na

$$J^1 E_{ij,\alpha\beta} \equiv \{ j_x^1 \phi \mid \phi(x) \in \tau_i^{E-1}(\mathcal{O}_{ij}^B \times \mathcal{O}_{\alpha\beta}^F) \}$$

w postaci

$$\begin{aligned} J^1 \kappa_{ij,\alpha\beta}^E & := J^1 \kappa_{i,\alpha}^E \circ (J^1 \kappa_{j,\beta}^E)^{-1} : J^1 \kappa_{j,\beta}^E(J^1 E_{ij,\alpha\beta}) \xrightarrow{\cong} J^1 \kappa_{i,\alpha}^E(J^1 E_{ij,\alpha\beta}) \\ & : (\kappa_j^B(x), \kappa_\beta^F \circ \phi(x), D(\kappa_\beta^F \circ \phi \circ \kappa_j^{B-1})(\kappa_j^B(x))) \\ & \longmapsto (\kappa_i^B(x), \kappa_\alpha^F \circ \phi(x), D(\kappa_\alpha^F \circ \phi \circ \kappa_i^{B-1})(\kappa_i^B(x))) \\ & = (t_{ij}^B(\kappa_j^B(x)), t_{\alpha\beta}^F(\kappa_\alpha^F \circ \phi(x))), \end{aligned}$$

$$Dt_{\alpha\beta}^F(\kappa_\beta^F \circ \phi(x)) \circ D(\kappa_\beta^F \circ \phi \circ \kappa_j^{B-1})(\kappa_j^B(x)) \circ Dt_{ij}^B(\kappa_j^B(x))^{-1}$$

Zależność punktu w obrazie od argumentu z dziedziny jest klasy C^∞ w składowej bazowej oraz w składowej z włókna wiązki E (z założenia),

$$t_{ij}^B \in \text{Diff}^\infty(\kappa_j^B(\mathcal{O}_{ij}^B), \kappa_i^B(\mathcal{O}_{ij}^B)), \quad t_{\alpha\beta}^F \in \text{Diff}^\infty(\kappa_\beta^F(\mathcal{O}_{\alpha\beta}^F), \kappa_\alpha^F(\mathcal{O}_{\alpha\beta}^F)),$$

i te same klasy C^∞ w składowej ostatniej w argumencie bazowym oraz tym z włókna wiązki E ,

$$Dt_{\alpha\beta}^F \in C^\infty(\kappa_\beta^F(\mathcal{O}_{\alpha\beta}^F), \mathbb{R}^{n^2}), \quad Dt_{ij}^B \in C^\infty(\kappa_j^B(\mathcal{O}_{ij}^B), \mathbb{R}^{m^2})$$

a nadto liniowa, więc klasy C^∞ w argumencie ostatnim $D(\kappa_\beta^F \circ \phi \circ \kappa_j^{B-1})(\kappa_j^B(x))$, zatem w sumie klasy C^∞ , tym samym więc zadaje na $J^1 E$ strukturę różniczkowalnej. Zauważmy przy tym, że rzut na bazę jest surjekcją klasy C^∞ jako superpozycja odwzorowań tego samego typu,

$$\pi_{J^1 E} \upharpoonright_{J^1 E_{i,\alpha}} = \kappa_i^{B-1} \circ \text{pr}_1 \circ J^1 \kappa_{i,\alpha}^E.$$

Strukturę różniczkowalnej na zbiorze $J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{xm} \times F)$ zadajemy w sposób analogiczny do opisanego powyżej, przy czym wykorzystujemy tu globalną mapę na bazie \mathbb{R}^{xm} wiązki trywialnej $\mathbb{R}^{xm} \times F$ oraz mapy lokalne κ_α^F , $\alpha \in J$ na jej włóknach. Mamy więc na podzbiorkach

$$J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{xm} \times \mathcal{O}_\alpha^F) \equiv \{ j_{\mathbf{0}_m}^1 \phi \mid \phi(0) \in \tau_i^{E-1}(\{\mathbf{0}_m\} \times \mathcal{O}_\alpha^F) \}$$

odwzorowania

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{0}_m}^1 \kappa_\alpha^F & : J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{xm} \times \mathcal{O}_\alpha^F) \xrightarrow{\cong} J_{\mathbf{0}_m}^1 \tau_\alpha^F(J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{xm} \times \mathcal{O}_\alpha^F)) \\ & : j_{\mathbf{0}_m}^1 \phi \longmapsto (\kappa_i^F \circ \phi(\mathbf{0}_m), D(\kappa_i^F \circ \phi)(\mathbf{0}_m)), \end{aligned}$$

które indukują na $J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{xm} \times F)$ mocną topologię cofnięciową z topologii produktowej (podprzestrzeni) na zbiorach $J_{\mathbf{0}_m}^1 \tau_\alpha^F(J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{xm} \times \mathcal{O}_\alpha^F)) \subset \mathbb{R}^{x^n(1+m)}$ i względem tej topologii pełnią rolę map lokalnych klasy C^∞ .

Trywializacje lokalne wiązki $J^1 E$ są zadane w postaci

$$J^1 \tau_i^E : \pi_{J^1 E}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times J_{\mathbf{0}_m}^1(\mathbb{R}^{xm} \times F)$$

$$: (j_x^1 \phi, x) \mapsto (x, j_{0_m}^1 ((T_{\kappa_i^B(x)} \circ \kappa_i^B \times \text{id}_F) \circ \tau_i^E \circ \phi \circ \kappa_i^{B-1} \circ T_{\kappa_i^B(x)}^{-1}))$$

W odwołaniu do powyższej definicji, która formalizuje intuicyjne pojęcie klas współstyczności (pierwszego rzędu) cięć lokalnych wiązki (w analogii do konstrukcji wiązki stycznej jako wiązki klas współstyczności ścieżek w rozmaitości) możemy wprowadzić podstawowy koncept fizyczny.

Definicja 2. Niechaj Σ będzie gładką rozmaitością różniczkowalną wyposażoną w strukturę metryczną $g \in \Gamma(T^*\Sigma \otimes_{\mathbb{R}, \Sigma} T^*\Sigma)$ o sygnaturze $(d, 1)$, $d \in \mathbb{N}$ i niech F będzie gładką rozmaitością o grupie automorfizmów (dyfeomorfizmów zachowujących ewentualną dodatkową strukturę, np. liniową lub torsora grupy) $\text{Aut}(F)$. **Lagranżowska teoria pola typu F nad (Σ, g)** to para

$$\mathcal{F} := ((\mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathcal{F}}), \mathcal{A}_{\text{DF}})$$

złożona z wiązki włóknistej $(\mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathcal{F}})$, noszącej miano **kowariantnej wiązki konfiguracyjnej typu F** (albo po prostu **wiązki pół typu F**), o włóknie typowym F i trywializacjach lokalnych

$$\tau_i : \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F, \quad i \in I$$

stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy Σ , zwanej **czasoprzetrzeniem**, oraz funkcjonału

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}} : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \text{U}(1),$$

zwanego **amplitudą Diraca–Feynmana**, którego punkty krytyczne są określane jako **klasyczne konfiguracje pola typu F** . Przy tym zakładamy istnienie funkcjonału²

$$S_{\mathcal{F}} : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

wyznaczającego amplitudę Diraca–Feynmana wedle wzoru

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}} = \exp \circ (i S_{\mathcal{F}}),$$

który nazywamy **funkcjonałem działania teorii pola \mathcal{F}** , a który jest zadany w postaci klasy *modulo* 2π całek po Σ z morfizmu wiązek włóknistych

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} : J^1\mathcal{F} \longrightarrow \bigwedge^{d+1} T^*\Sigma$$

zwanego **gęstością lagranżjanu teorii pola \mathcal{F}** , tj. dla dowolnego cięcia $\phi \in \Gamma(\mathcal{F})$ zachodzi

$$S_{\mathcal{F}}[\phi] = \int_{\Sigma} \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(j^1\phi) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Cięcia globalne wiązki \mathcal{F} zyskują w tym kontekście przydomek **pół typu F** , a ich przestrzeń $\Gamma(\mathcal{F})$ jest nazywana **przestrzenią konfiguracyjną teorii pola \mathcal{F}** .

Symetrią globalną teorii pola \mathcal{F} nazywamy dowolny automorfizm $(\Phi, \text{id}_{\Sigma}) \in \text{Aut}_{\text{Bun}(\Sigma)}(\mathcal{F} | \Sigma)$ (pokrywający identycznością na bazie) wiązki pół tejże teorii modelowany (lokalnie) na automorfizmie włókna typowego $\varphi \in \text{Aut}_{\text{Man}^{(2)}}(F)$ w sensie wyrażanym przez rodzinę diagramów przemienych indeksowaną przez $I \ni i$

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \tau_i \downarrow & & \downarrow \tau_i \\ \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{O}_i} \times \varphi} & \mathcal{O}_i \times F \end{array}$$

i indukujący automorfizm

$$\Gamma\Phi : \Gamma(\mathcal{F}) \circlearrowleft : \phi \mapsto \Phi \circ \phi$$

przestrzeni konfiguracyjnej o własności

$$\mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}} \circ \Phi = \mathcal{A}_{\text{DF}}^{\mathcal{F}}.$$

²Wybór przeciwdziałalności funkcjonału działania został wyjaśniony na etapie wcześniejszym, kiedy dyskutowaliśmy kwantowomechaniczną interpretację amplitud Diraca–Feynmana.

Grupie złożonej ze wszystkich automorfizmów wiązki pól opisanej wyżej postaci nadajemy miano **grupy symetrii globalnych teorii pola** \mathcal{F} . Będziemy ją oznaczać symbolem

$$\text{Symm}(\mathcal{F} \curvearrowright F).$$

W powyższej definicji symetrii globalne zyskują *implicite* interpretację **czynną**, w ramach której Φ przeprowadza w siebie *różne* konfiguracje pola, w szczególności zaś – konfiguracje krytyczne (czyli klasyczne) na *nietożsame* z nimi (w sensie fizykalnym) konfiguracje krytyczne. Jako takie, symetrie globalne określają na przestrzeni stanów teorii fizycznej odpowiedniość pomiędzy *różnymi* konfiguracjami klasycznymi.

Automorfizmy włókna typowego wiązki pól można także interpretować w ujęciu **biernym** jako transformacje współrzędniowe na F , czyli – innymi słowy – jako zmiany *opisu* jednej i tej samej konfiguracji pola. Ażeby to lepiej zrozumieć, oznacmy przez $D \equiv \dim F$ liczbę niezależnych stopni swobody teorii pola \mathcal{F} i rozważmy lokalne mapy: $\kappa_1 : \mathcal{O}_x^F \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^D$ na otoczeniu $x \in F$ i $\kappa_2 : \mathcal{O}_{\varphi(x)}^F \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{\varphi(x)} \subset \mathbb{R}^D$ na otoczeniu $\varphi(x) \in F$, zakładając przy tym dla prostoty dalszych rozważań, że $\varphi(\mathcal{O}_x^F) \subset \mathcal{O}_{\varphi(x)}^F$. W tych okolicznościach możemy traktować dyfeomorfizm φ , a ściślej – jego lokalną prezentację współrzędniową $\varphi_{21} \equiv \kappa_2 \circ \varphi \circ \kappa_1^{-1}$, jako (gładką) redefinicję współrzędnych punktów $y \in \mathcal{O}_x^F$ z wyjściowych $\kappa_1(y)$ na nowe $\kappa_2 \circ \varphi(y)$, oto bowiem

$$\kappa_2 \circ \varphi(y) \equiv \varphi_{21}(\kappa_1(y)).$$

Gdy spojrzeć na transformacje symetrii jako na takie właśnie arbitralne zmiany układu współrzędnych (lokalnych) w przestrzeni wewnętrznych stopni swobody teorii pola, wówczas staje się całkowicie jasnym, że nie ma żadnego powodu oczekiwać (w czasoprzestrzeni, w której informacja propaguje się ze skończoną szybkością), iżby obserwatorzy opisujący zjawiska teoriopolewe z *różnych* punktów czasoprzestrzeni Σ dokonywali *równoczesnych* redefinicji swych lokalnych opisów. W powszechnie przyjętym (choć nie jedynym) paradygmacie gładkiego opisu zjawisk fizykalnych postulujemy przeto **ulokalnienie** albo inaczej **wycechowanie** symetrii globalnej. Polega ono na zastąpieniu wyjściowej wiązki pól \mathcal{F} nową wiązką o *tym samym* włóknie typowym F (więc o tych samych stopniach swobody), na której, jednakowoż, symetrie modelowane przez $G \equiv \text{Symm}(\mathcal{F} \curvearrowright F)$ (w obrazie lokalnych trywializacji) są realizowane *lokalnie*, tj. mamy do czynienia z (lokalnie) gładkimi profilami transformacji symetrii w $\text{Symm}(\mathcal{F} \curvearrowright F)$, czyli z **lokalnymi transformacjami cechowania** $\gamma : \mathcal{O}^B \rightarrow G$, które nie zmieniają wartości amplitudy Diraca–Feynmana teorii z **wycechowaną** symetrią G . Ta ostatnia powinna być w jakimś sensie³ strukturalnie pokrewna wyjściowej teorii pola \mathcal{F} , tj. powinien istnieć (zasadniczo) algorytmiczny schemat przepisywania \mathcal{F} do nowej postaci z symetrią wycechowaną. Punktu wyjścia do uniwersalnej formalizacji *niedynamicznego* aspektu takiej transkrypcji, tj. tego, który dotyczy redefinicji samej wiązki pól \mathcal{F} , nie zaś – dodatkowych struktur na wiązce stycznej $T\mathcal{F}$ nad nią, pozwalających zdefiniować człony gęstości langranżjanu zależne od cięć gładkich poprzez ich *pochodne*, dostarcza konstrukcja wiązki stowarzyszonej z wiązką główną o grupie strukturalnej G , o czym przekonuje nas chwila refleksji nad treścią Stw. 6.2 w połączeniu ze Stw. 6.3 i 6.4. Jedynym uogólnieniem konstrukcji prowadzącej do Def. 6.1 podyktowanym przez potrzebę uwzględnienia generycznej struktury wiązki pól nad czasoprzestrzenią Σ jest zastąpienie rozmaitości M w tejże definicji (odpowiadającej wiązce trywialnej $\Sigma \times M \rightarrow \Sigma$) dowolną wiązką nad bazą Σ wiązki głównej P_G . Poniżej przedstawiamy analogony definicji, stwierdzeń i twierdzeń z Wykładu 6. uwzględniające to umotywowane fizykalnie uogólnienie. Uważny Czytelnik dotychczasowych wykładów bez trudu znajdzie w nich wszelkie narzędzia formalne niezbędne do sprawdzenia sensowności i poprawności definicji i udowodnienia (s)twierdzeń, co też pozostawiamu Mu w charakterze ćwiczenia.

Zaczynamy od

Definicja 3. Niechaj (P_G, B, G, π_{P_G}) będzie wiązką główną o trywializacjach lokalnych $\tau_i^{P_G} : \pi_{P_G}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$, $i \in I$ stowarzyszonych z pokryciem otwartym $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, a (E, B, F, π_E)

³Nie ma całkowicie uniwersalnego schematu transkrypcji wyjściowej teorii pola \mathcal{F} do postaci z symetrią wycechowaną. Istnieją natomiast pewne standardowe schematy cechowania o ograniczonym zakresie stosowalności, z których najbardziej rozpowszechniony jest tzw. schemat minimalny – ten omówimy już wkrótce.

– wiązką włóknistą o trywializacjach lokalnych $\tau_i^E : \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F$, $i \in I$ stowarzyszonych z tym samym pokryciem \mathcal{O} , na której jest określone gładkie działanie (lewostronne) $\Lambda : G \times E \rightarrow E$ grupy Liego G wyznaczające rodzinę automorfizmów $\{(\Lambda_g, \text{id}_B)\}_{g \in G}$ te same wiązki modelowane lokalnie na automorfizmach $\{\lambda_g\}_{g \in G}$ włókna typowego w sposób opisany przez diagram przemienny

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} G \times \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) & \xrightarrow{\Lambda} & \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \\ \text{id}_G \times \tau_i^E \downarrow & & \downarrow \tau_i^E \\ G \times \mathcal{O}_i \times F & \xrightarrow{(\text{pr}_2, \lambda \circ \text{pr}_{1,3})} & \mathcal{O}_i \times F \end{array} .$$

Wiązka produktowa stowarzyszona z P_G poprzez Λ . to wiązka włóknista

$$(P_G^\Lambda E, B, F, \pi_{P_G^\Lambda E})$$

o składowych:

- przestrzeń totalna $P_G^\Lambda E \equiv (P_G \times_B E)/G$ będąca rozmaitością ilorazową określoną przez działanie

$$\tilde{\Lambda} : G \times (P_G \times_B E) \rightarrow P_G \times_B E : (g, (p, \epsilon)) \mapsto (r_{g^{-1}}(p), \Lambda_g(\epsilon)),$$

indukowane na produkcie włóknistym wiązek P_G i E przez Λ i działanie definiujące r grupy G na P_G ;

- rzut na bazę

$$\pi_{P_G^\Lambda E} : P_G^\Lambda E \rightarrow B : [(p, \epsilon)] \mapsto \pi_{P_G}(p).$$

Przy tym trywializacje lokalne indukowane przez trywializacje składowych przyjmują postać

$$[\tau_i] : \pi_{P_G^\Lambda E}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F : [(p, \epsilon)] \mapsto (\pi_{P_G}(p), \lambda_{\text{pr}_2 \circ \tau_i^{P_G}(p)}(\text{pr}_2 \circ \tau_i^E(m))),$$

a odnośne odwzorowania przejścia są określone przez odwzorowanie

$$[\tau_i] \circ [\tau_j]^{-1} : \mathcal{O}_{ij} \times F \hookrightarrow \mathcal{O} : (x, f) \mapsto (x, \lambda_{g_{ij}^{P_G}(x)} \circ g_{ij}^E(x)(f)).$$

Fizykalne zastosowania powyższej konstrukcji wynikają wprost z

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def.3. Struktura grupy (Frécheta) na przestrzeni cięć globalnych $\Gamma(\text{Ad } P_G)$ wiązki dołączonej na swą realizację na przestrzeni cięć globalnych $\Gamma(P_G^\Lambda E)$ wiązki produktowej stowarzyszonej $P_G^\Lambda E$ indukowaną przez odwzorowanie gładkie

$$[\Lambda]^\times : \text{Ad } P_G \times_B P_G^\Lambda E \rightarrow P_G^\Lambda E$$

spełniające (włókno po włóknie) aksjomaty działania grupy G na rozmaitości M i modelowane lokalnie na Λ .

Mamy także istotne w konstrukcji lokalnego opisu symetrii cechowania i pól materii w teorii z symetrią wycechowaną

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy zapis Def.3 i oznaczmy symbolem $\text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(P_G, E|B)$ zbiór morfizmów wiązek włóknistych $P_G \rightarrow E$ pokrywających identyczność na (wspólnej) bazie B . Istnieje bijekcja

$$\Gamma(P_G^\Lambda E) \cong \text{Hom}_G(P_G, E) \cap \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(P_G, E|B) (= \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(P_G, E|B)^G),$$

określona przez wzajem odwrotne odwzorowania (zapisane w terminach $(\pi, \epsilon) \in \Gamma_{\text{loc}}(P_G) \times \Gamma_{\text{loc}}(E)$ składających się na globalne cięcie $P_G^\Lambda E$):

$$\Phi_\Lambda^\times : \Gamma(P_G^\Lambda E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(P_G, E|B)^G,$$

$$\Phi_\Lambda^\times[(\pi, \epsilon)] : P_G \rightarrow E : p \mapsto \Lambda_{\phi_{P_G}(p, \pi \circ \pi_{P_G}(p))}(\epsilon \circ \pi_{P_G}(p))$$

i

$$S_\Lambda^\times : \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G \longrightarrow \Gamma_{\text{loc}}(\mathbb{P}_G^\Lambda E),$$

$$S_\Lambda^\times[\Phi] : B \longrightarrow \mathbb{P}_G^\Lambda E : (\mathcal{O}_i \ni) x \longmapsto [(\tau_i^{\mathbb{P}_G^{-1}}(x, e), \Phi \circ \tau_i^{\mathbb{P}_G^{-1}}(x, e))].$$

oraz

Stwierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Stw.1 i 2. Bijekcja Φ_Λ^\times jest (lewostronnie) ekwiwariantna względem działań grupy $\Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G)$: działania

$$\Gamma[\Gamma[\tilde{r}^\times]]^\Lambda : \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \times \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E)$$

$$(2) : (\sigma, [(\pi, \epsilon)]) \longmapsto [[([r]_{\sigma \circ \pi_P \circ \pi(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \epsilon(\cdot))] \equiv [[([r]_{\sigma(\cdot)} \circ \pi(\cdot), \mu(\cdot))]]$$

na przestrzeni $\Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E)$ oraz naturalnego działania

$$[\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda] : \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \times \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G$$

$$: (\gamma, \Phi) \longmapsto \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma](\cdot)}(\Phi(\cdot))$$

na przestrzeni odwzorowań G-ekwiwariantnych $\text{Hom}_G(\mathbb{P}_G, M)$, czyli działanie

$$\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda \equiv [\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda] \cdot \circ (\Phi_{\text{Ad}}^{-1} \times \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G})$$

grupy $\text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, G|B)^G$ czyni przemiennym poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \times \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E) & \xrightarrow{\Gamma[\Gamma[\tilde{r}^\times]]^\Lambda} & \Gamma(\mathbb{P}_G^\Lambda E) \\ \downarrow \Phi_{\text{Ad}} \times \Phi_\Lambda^\times & & \downarrow \Phi_\Lambda^\times \\ \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, G|B)^G \times \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G & & \text{Hom}_{\mathbf{Bun}(B)}(\mathbb{P}_G, E|B)^G \\ & \xrightarrow{\Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda} & \end{array}$$

Mamy również oczywiste, lecz pomocne

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def.3 i niechaj $\mathcal{P}_G^\alpha \equiv (\mathbb{P}_G^\alpha, B, G, \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ będą wiązkami głównymi o grupie strukturalnej G nad wspólną bazą B , a (E, B, F, π_E) – wiązką włóknistą z działaniem $\Lambda : G \times E \longrightarrow E$ opisanym tamże. Dowolny (izo)morfizm wiązek głównych $(\Phi, \text{id}_B, \text{id}_G) : \mathcal{P}_G^1 \longrightarrow \mathcal{P}_G^2$ indukuje kanonicznie (izo)morfizm wiązek włóknistych

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{P}_G^1 E \longrightarrow \mathbb{P}_G^2 E : [(p, \varepsilon)] \longmapsto [(\Phi(p), \varepsilon)],$$

ten zaś określa bijekcję między odnośnymi przestrzeniami cięć globalnych

$$\Gamma \tilde{\Phi} : \Gamma(\mathbb{P}_G^1 E) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}_G^2 E) : \phi \longmapsto \tilde{\Phi} \circ \phi.$$

Uwaga 1. Mając na uwadze przyszłe zastosowania powyższego stwierdzenia, warto przyjrzeć się odwzorowaniu $\Gamma \tilde{\Phi}$ w obrazie trywializacji lokalnych $\tau_i^\alpha : \pi_{\mathbb{P}_G^\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times G$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad pokryciem $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ bazy B współtrywializującym obie wiązki główne – w tym obrazie (izo)morfizm $\tilde{\Phi}$ jest reprezentowany przez rodzinę $\{h_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow G\}_{i \in I}$ odwzorowań lokalnie gładkich, które spełniają warunki z Równ. (5.3), patrz: Tw. 5.1. Rozważmy cięcie globalne $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G^1 E)$ o ograniczeniach

$$\phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{P}_G^1 E : x \longmapsto [(\tau_i^{1-1}(x, e), \varphi_i(x))]$$

utworzonych przy użyciu cięć lokalnych $\varphi_i \in \Gamma(E \upharpoonright_{\mathcal{O}_i})$ i spełniających w dowolnym punkcie $y \in \mathcal{O}_{ij}$ warunek zszycia

$$[(\tau_i^{1-1}(y, e), \varphi_i(y))] = [(\tau_j^{1-1}(y, e), \varphi_j(y))] = [(\tau_i^{1-1}(y, e) \triangleleft g_{ij}^1(y), \varphi_j(y))]$$

$$= [(\tau_i^{1-1}(y, e), g_{ij}^1(y) \triangleright \varphi_j(y))],$$

czyli, innymi słowy,

$$\forall_{y \in \mathcal{O}_{ij}} : \varphi_i(y) = g_{ij}^1(y) \triangleright \varphi_j(y).$$

Tym samym informacja o istnieniu cięcia globalnego $\phi \in \Gamma(\mathbb{P}_G^{1\wedge} E)$ jest zawarta w rodzinie cięć lokalnych $\{\varphi_i\}_{i \in I}$. Cięcie $\Gamma\tilde{\Phi}[\phi]$ jest reprezentowane lokalnie przez rodzinę odwzorowań gładkich (wszak powstają ze złożenia odwzorowań jawnie gładkich z surjektywną submersją $\pi_{(\mathbb{P}_G^{2 \times B} E)/G}$)

$$\Gamma\tilde{\Phi}[\phi]_i : \mathcal{O}_i \longrightarrow \mathbb{P}_G^{2\wedge} E : x \longmapsto [(\tau_i^{2-1}(x, e), h_i(x) \triangleright \varphi_i(x))].$$

Bez trudu upewniamy się, że tak określone cięcia lokalne wiązki $\mathbb{P}_G^{2\wedge} E$ są w istocie ograniczeniami cięcia globalnego

$$\Gamma\tilde{\Phi}[\phi] \in \Gamma(\mathbb{P}_G^{2\wedge} E), \quad \Gamma\tilde{\Phi}[\phi] \upharpoonright_{\mathcal{O}_i} \equiv \Gamma\tilde{\Phi}[\phi]_i.$$

W rzeczy samej, w punktach $y \in \mathcal{O}_{ij}$ zachodzi równość

$$\begin{aligned} [(\tau_j^{2-1}(y, e), h_j(y) \triangleright \varphi_j(y))] &= [(\tau_i^{2-1} \circ \tau_{ij}^2(y, e), (h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)) \triangleright \varphi_i(y))] \\ &= [(\tau_i^{2-1}(y, e) \triangleleft g_{ij}^2(y), (h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)) \triangleright \varphi_i(y))] \\ &= [(\tau_i^{2-1}(y, e), (g_{ij}^2(y) \cdot h_j(y) \cdot g_{ji}^1(y)) \triangleright \varphi_i(y))] \\ &= [(\tau_i^{2-1}(y, e), h_i(y) \triangleright \varphi_i(y))]. \end{aligned}$$

Możemy już teraz wrócić do interesujących nas struktur fizykalnych. Bez trudu identyfikujemy naturalnych kandydatów do roli wiązki pól z symetrią wycechowaną i działającą na niej wiązki grup.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 2 oraz Stw. 1. Niechaj $G \subseteq \text{Symm}(\mathcal{F} \curvearrowright F)$ będzie podgrupą grupy symetrii globalnych teorii pola \mathcal{F} o strukturze skończenie wymiarowej grupy Liego i niech $(\mathbb{P}_G, \Sigma, G, \pi_{\mathbb{P}_G})$ będzie dowolną wiązką główną o grupie strukturalnej G nad czasoprzestrzenią Σ . **Wiązka pól typu F z cechowaniem typu \mathbb{P}_G** to wiązka

$$(\mathbb{P}_G^{\text{ev}} \mathcal{F}, \Sigma, F, \pi_{\mathbb{P}_G^{\text{ev}} \mathcal{F}})$$

stowarzyszona z \mathbb{P}_G poprzez odwzorowanie ewaluacji

$$\text{ev.} : G \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} : (\alpha, \varphi) \longmapsto \alpha(\varphi) \equiv \text{ev}_\alpha(\varphi),$$

a jej cięcia globalne to **pola typu F z cechowaniem typu \mathbb{P}_G** . Grupę (Fréchet) $\Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G) \cong \text{Aut}_{\text{GrpBun}_G(\Sigma)}(\mathbb{P}_G | \Sigma)$ określamy w tym kontekście mianem **grupy cechowania typu \mathbb{P}_G** . Odwzorowania

$$\Gamma[\Gamma[\tilde{\mathcal{F}}^\times]]_\chi^\wedge : \Gamma(\mathbb{P}_G^{\text{ev}} \mathcal{F}) \circlearrowleft, \quad \chi \in \Gamma(\text{Ad } \mathbb{P}_G)$$

zdefiniowane w Stw. 3 (patrz: Równ. (2)) są przy tym nazywane **transformacjami cechowania**, a sama wiązka \mathbb{P}_G zyskuje przydomek **wiązki cechowania**.

Transkrypcja wyjściowej teorii pola, skonstruowanej z niezmienników działania grupy symetrii globalnej $\text{Symm}(\mathcal{F} \curvearrowright F)$, w terminach cięć globalnych wiązek stowarzyszonych $\mathbb{P}_G^\wedge \mathcal{F}$ z (dowolną) wiązką cechowania \mathbb{P}_G podporządkowana postulatowi – w istocie swej dość nieprecyzyjnemu, wręcz heurystycznemu – *minimalności* zmian struktury funkcjonału działania w procedurze ułokalniania symetrii z grupy $G \subset \text{Symm}(\mathcal{F} \curvearrowright F)$, wydaje się zadaniem wysoce nieoczywistym, a same cięcia – nader niewygodnymi obiektami ewentualnych manipulacji formalnych. W sukurs przychodzi nam tutaj odpowiedniość pomiędzy rzeczonymi cięciami a G -ekwiwariantnymi morfizmami odwzorowującymi wiązkę cechowania \mathbb{P}_G w wyjściową wiązkę pól \mathcal{F} , opisana w Stw. 2, w połączeniu z elementarną własnością strukturalną wiązki cechowania, jaką jest jej trywialność lokalna, przy czym ta ostatnia jest – w świetle Stw. 5.5 – *równoważna* istnieniu cięć lokalnych. Te pozwalają na lokalną imitację struktury obecnej w wyjściowym modelu teoriopolowym na gruncie

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw.2 i niechaj $\sigma_* : \mathcal{O} \rightarrow P_G$ będzie dowolnym cięciem (lokalnym) wiązki głównej P_G nad zbiorem otwartym $\mathcal{O} \subset B$. **Prezentacja lokalna pola (typu F z cechowaniem typu P_G)** $\phi \in \Gamma(P_G^\Lambda \mathcal{F})$ w **cechowaniu** σ_* to cięcie lokalne

$$\phi_{\sigma_*} := \Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \sigma_* \in \Gamma_{\text{loc}}(\mathcal{F}).$$

Podobnie **prezentacja lokalna transformacji cechowania** $\gamma \in \Gamma(\text{Ad}P_G)$ w **cechowaniu** σ_* to odwzorowanie (lokalnie) gładkie

$$\gamma_{\sigma_*} := \Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_* : \mathcal{O} \rightarrow G.$$

Wybór cięcia σ_* zyskuje w tym kontekście miano (**wyboru**) **cechowania lokalnego**.

Uwaga 2. To, że odwzorowanie $\phi_{\sigma_*} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$ jest w istocie cięciem lokalnym wiązki pól \mathcal{F} nad \mathcal{O} , wynika wprost z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{\Phi_\Lambda^\times[\phi]} & \mathcal{F} \\ \pi_{P_G} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{F}} \\ \Sigma & \xlongequal{\text{id}_\Sigma} & \Sigma \end{array},$$

ten bowiem pozwala zapisać

$$\pi_{\mathcal{F}} \circ \phi_{\sigma_*} \equiv (\pi_{\mathcal{F}} \circ \Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \sigma_* = \pi_{P_G} \circ \sigma_* = \text{id}_{\mathcal{O}}.$$

Stwierdzenie 5. W zapisie Def. 5 oraz Stw. 3 i przy oznaczeniach

$$\gamma_\phi := \Gamma[\Gamma[\tilde{r}^\times]]_\gamma^\Lambda(\phi), \quad \text{Invo}\gamma_{\sigma_*} := r_{\text{Invo}\Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*(\cdot)}(\sigma_*(\cdot))$$

zachodzą tożsamości

$$(\gamma_\phi)_{\sigma_*}(\cdot) = \Lambda_{\gamma_{\sigma_*}(\cdot)}\phi_{\sigma_*}(\cdot) = \phi_{\text{Invo}\gamma_{\sigma_*}(\cdot)}(\cdot).$$

Dowód: W świetle Stw. 3 oraz G-ekwivariantności $\Phi_\Lambda^\times[\phi]$ otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} (\gamma_\phi)_{\sigma_*}(\cdot) &\equiv \Phi_\Lambda^\times[\gamma_\phi] \circ \sigma_*(\cdot) = \Phi_{\text{Ad}}^\times \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma]}(\Phi_\Lambda^\times[\phi]) \circ \sigma_*(\cdot) \\ &\equiv \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*(\cdot)}(\Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \sigma_*(\cdot)) \equiv \Lambda_{\gamma_{\sigma_*}(\cdot)}\phi_{\sigma_*}(\cdot) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*(\cdot)}(\Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \sigma_*(\cdot)) &= \Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ (r_{\text{Invo}\Phi_{\text{Ad}}[\gamma] \circ \sigma_*(\cdot)}(\sigma_*(\cdot))) \\ &\equiv \Phi_\Lambda^\times[\phi] \circ \text{Invo}\gamma_{\sigma_*}(\cdot) \equiv \phi_{\text{Invo}\gamma_{\sigma_*}(\cdot)}(\cdot). \end{aligned}$$

□

Uwaga 3. Powyższe stwierdzenie dowodnie pokazuje sens nazwy nadanej wyborowi cięcia referencyjnego σ_* – oto zmiana tego wyboru,

$$\sigma_* \mapsto \text{Invo}\gamma_{\sigma_*},$$

prowadzi do przecechowania (czyli transformacji cechowania) pola fizycznego,

$$\phi \mapsto \gamma_\phi.$$

Dotychczasowa dyskusja nie rozstrzyga naturalnych (a powiązanych ze sobą) kwestii: Które z (nieizomorficznych) wiązek cechowania *wybrać* do wycechowania danej symetrii globalnej w teorii pola? Co dokładnie kwantyfikuje ewentualna swoboda wyboru wiązki cechowania? Wrócimy do tych pytań już wkrótce.