GR II W CZASACH ZARAZY
8. WYKŁAD ZDALNY

Wprowadzenie do teorii powiązania na wiązce włóknistej

W studiach nad strukturą stycznościową oraz w zastosowaniach teorii wiązek włóknistych – począwszy od badań ich topologii (topologia różniczkowa, zagadnienia wariacyjne *etc.*), a skończywszy na modelowaniu fizykalnym z ich wykorzystaniem („dynamika" cięć opisywana przez zasadę wariacyjną dla wyróżnionego funkcjonału działania określonego na zbiorze cięć, procedura cechowania symetrii globalnych modelu fizykalnego, opis tła grawitacyjnego wzgl. elektromagnetycznego dynamiki punktu materialnego oraz tła tego fluktuacji *etc.*) – nierzadko pojawia się potrzeba nadania sensu formalnego operacji różniczkowania cięć wiązki[1], tj. wskazania takiej definicji pochodnej, która – na podobieństwo zwykłego różniczkowania (np. pochodnej kierunkowej) algebry funkcji na rozmaitości – przyporządkowywałaby cięciu klasy C^k nowe cięcie klasy C^{k-1}, o analogicznych własnościach współzmienniczości względem wyboru trywializacji lokalnej oraz uzgodnione z ewentualną dodatkową strukturą na włóknie (np. strukturą modułu nad pierścieniem funkcji gładkich na bazie lub strukturą torsora grupy strukturalnej). Tymczasem najbardziej oczywista definicja pochodnej cięcia $\sigma \in \Gamma_{\rm loc}(E)$ wiązki E nad bazą B wzdłuż pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(B)$, czyli pochodna kierunkowa

$$(\mathcal{V}, \sigma) \longmapsto \mathsf{T}\sigma(\mathcal{V}),$$

nie daje nam w ogólności obiektów tensorowo (stycznościowo) współzmienniczych względem transformacji przejścia nad przecięciami elementów pokrycia trywializującego, ani nie uwzględnia dodatkowej struktury, jaką są lokalne trywializacje $E\restriction_{\mathcal{O}} \cong \mathcal{O} \times F$, których obecność pociąga za sobą rozkład stycznościowy $\mathsf{T}(E\restriction_{\mathcal{O}}) \cong \mathsf{T}\mathcal{O} \times \mathsf{T}F$. Oczywiście różniczkowanie jest operacją lokalną, przeto można zawsze wybrać określoną lokalną mapę przestrzeni totalnej wiązki zaadaptowaną do jej lokalnej trywializacji i w niej poszukiwać pożądanych obiektów (wykorzystując rozkład $\mathsf{T}(E\restriction_{\mathcal{O}})$ i ewentualnie dodatkową strukturę na wiązce stycznej do włókna typowego, jak np. pole tensora metrycznego), bez odpowiedzi pozostaje wtedy jednak pytanie o ich globalny geometryczno-różniczkowy status. Ograniczając rozważania do kategorii wiązek wektorowych, możemy próbować obejść napotkane trudności, zauważając, że wiązka $\mathsf{T}\mathbb{V}_x$ styczna do włókna $\mathbb{V}_x$ nad ustalonym punktem bazy $x \in B$, zanurzona w przeciwdziedzinie $\mathsf{T}\mathbb{V}$ odwzorowania $\mathsf{T}\sigma$, jest wyposażona – nad każdym punktem włókna – w strukturę liniową *izomorficzną z* $\mathbb{V}_x$, co pozwala na utożsamienie pól wektorów pionowych na $\mathbb{V}$ z cięciami samej wiązki $\mathbb{V}$. W świetle tej uwagi wystarczy zrzutować $\mathsf{T}\sigma(\mathcal{V})$ na styczną do włókna, co jednak wymaga istnienia rozkładu wiązki stycznej nad przestrzenią totalną $\mathbb{V}$ na sumę prostą (włóknistą) podwiązki pionowej i jej dopełnienia, wedle schematu opisanego w poniższej

Definicja 1. Suma Whitneya wiązek wektorowych $(\mathbb{V}_\alpha, B, \mathbb{K}^{\times n_\alpha}, \pi_{\mathbb{V}_\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2\}$ nad $\mathbb{K}$, o wspólnej bazie B to wiązka wektorowa

$$\big(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2 \equiv \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2, B, \mathbb{K}^{\times n_1} \oplus \mathbb{K}^{\times n_2} \equiv \mathbb{K}^{\times n_1+n_2}, \pi_{\mathbb{V}_1} \circ {\rm pr}_1\restriction_{\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2}\big),$$

[1] Ta potrzeba staje się oczywistą, kiedy pomyślimy o owych cięciach jako o obiektach modelujących pola fizyczne nad czasoprzestrzenią.

w której $\mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2$ jest produktem włóknistym rozmaitości $\mathbb{V}_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ opisanym przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{V}_1 \times_B \mathbb{V}_2 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1\upharpoonright_{\mathbb{V}_1\times_B\mathbb{V}_2}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2\upharpoonright_{\mathbb{V}_1\times_B\mathbb{V}_2}"] & \\ \mathbb{V}_1 \arrow[dr, "\pi_{\mathbb{V}_1}"'] & & \mathbb{V}_2 \arrow[dl, "\pi_{\mathbb{V}_2}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

i wyposażonym w strukturę podrozmaitości gładko włożonej w rozmaitość produktową $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$, zgodnie z tezą Tw. Niezb-4. i Przykł. (1.4).

Uwaga 1. Włókno sumy Whitneya nad dowolnym punktem bazy $x \in B$ przyjmuje postać

$$\left(\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2\right)_x \equiv \mathbb{V}_{1\,x} \oplus \mathbb{V}_{2\,x}\,,$$

stanowi więc suma Whitneya naturalną adaptację konstrukcji sumy prostej przestrzeni wektorowych do geometrycznej kategorii wiązek wektorowych.

Wiązkę tę można również opisać – w duchu Tw. 1.44. i Przykł. (1.4) – w terminach danych lokalnych jej składników, tj. wspólnego pokrycia trywializującego $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ wiązek $\mathbb{V}_\alpha,\ \alpha \in \{1,2\}$ (otrzymanego np. poprzez względne rozdrobnienie odnośnych pokryć trywializujących) wraz z określonymi dlań odwzorowaniami przejścia $g^\alpha_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_\alpha),\ (i,j) \in I^{\times 2}$. Odwzorowania przejścia sumy Whitneya obu wiązek, stowarzyszone z tym samym pokryciem trywializującym i stanowiące podstawę rekonstrukcji (klasy równoważności) wiązki $\mathbb{V}_1 \oplus_{\mathbb{K},B} \mathbb{V}_2$, to

$$g^{1\oplus 2}_{ij} \coloneqq g^1_{ij} \oplus g^2_{ij}\ :\ \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1) \oplus \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_2) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(n_1+n_2)\,.$$

I znów w obrazie trywializacji lokalnej wiązki wektorowej $\mathbb{V}$ operacja rzutowania wzmiankowana powyżej jest naturalnie zdefiniowana i daje oczekiwany wynik – wyjściowa trudność tłumaczy się tutaj na trudność ustalenia relacji (odwzorowania przejścia) między obiektami lokalnymi. O ile zatem dotychczasowa dyskusja wskazuje jasno, jakie cechy powinno mieć poszukiwane rozwiązanie postawionego przez nas problemu, o tyle bezpośrednia próba jego ogólnego rozwiązania natrafia na rozmaite trudności (patrz także: dalej, kiedy przejdziemy do uzgadniania różniczkowania z dodatkową strukturą na włóknie). Poniżej zmierzymy się z każdą z nich z osobna, co doprowadzi nas do kilku różnych definicji pochodnej cięcia wzdłuż pola wektorowego na bazie. Ich równoważność, której dowiedziemy pod koniec naszych rozważań, stanowić będzie mocny argument potwierdzający *a posteriori* słuszność i naturalność wybranej przez nas drogi formalizacji wykorzystywanych przez nas intuicji geometrycznych.

Uwaga 2. Wszelkie rozważania prowadzone w części naszego wykładu poświęconej teorii powiązania (uzgodnionego) są osadzone w kategorii rozmaitości gładkich (czyli klasy C^∞). W szczególności ciała bazowe $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ wiązek wektorowych niosą w domyśle naturalną strukturę różniczkowalną, a grupy strukturalne wiązek głównych są grupami Liego.

Nasze rozważania zaczynamy od

Definicja 2. Niechaj (E, B, F, π_E) będzie wiązką włóknistą. Rozważmy gładką ścieżkę

$$\gamma\ :\ [0,1] \longrightarrow B\,.$$

Przeniesienie równoległe (klasy C^∞**) w** E **wzdłuż** γ to rodzina gładkich dyfeomorfizmów

$$\mathsf{P}^\gamma_{t_1,t_2}\ :\ E_{\gamma(t_1)} \xrightarrow{\cong} E_{\gamma(t_2)}\,,\quad t_1, t_2 \in [0,1]$$

o własnościach

(PT1) odwzorowanie

$$\mathsf{P}^{\gamma}_{\cdot,\cdot}\ :\ [0,1]^{\times 2}\ {}_{\gamma\circ\mathrm{pr}_1}\!\times_{\pi_E} E \longrightarrow E\ :\ \big((t_1,t_2),x\big)\longmapsto \mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}(x)$$

jest klasy C^∞;

(PT2) $\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_1} = \mathrm{id}_{E_{\gamma(t_1)}}$;

(PT3) $\forall_{t_1,t_2,t_3\in]-\varepsilon,\varepsilon[}\ :\ \mathsf{P}^{\gamma}_{t_2,t_3}\circ\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2} = \mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_3}$;

(PT4) dla dowolnego cięcia $\sigma\ :\ \mathcal{O}_x \longrightarrow E$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu $x\in B$ jego **pochodna kowariantna** w x wzdłuż dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V}\in\mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$, zdefiniowana wzorem

$$\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x) \coloneqq \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\mathsf{P}^{\gamma}_{0,t}\big)^{-1}\circ\sigma\circ\gamma(t)\,,$$

nie zależy od wyboru reprezentanta klasy współstyczności ścieżek przez x określonej przez warunki

$$\gamma(0) = x \qquad \wedge \qquad \dot\gamma(0) = \mathcal{V}(x)\,;$$

(PT5) odwzorowanie

$$\nabla_{\cdot}\sigma\ :\ \mathsf{T}\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathsf{V}E\subset\mathsf{T}E$$

jest $C^\infty(\mathcal{O}_x,\mathbb{R})$-liniowe.

Ilekroć dany jest wybór przeniesienia równoległego dla dowolnej ścieżki γ na pewnym otoczeniu dowolnego punktu $x\in B$, mówimy, że zostało określone **powiązanie włókien** (**klasy** C^∞) **w wiązce** E.

Elementarną konsekwencję istnienia przeniesienia równoległego wskazuje

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def. 2. Jeśli dla dowolnej ścieżki w B istnieje przeniesienie równoległe, to wówczas dla dowolnego punktu $p\in E$ we włóknie E_x nad dowolnym punktem $x\in B$ istnieje jednoznacznie określona monomorfizm klasy C^∞

(1) $$\mathrm{Hor}_p\ :\ \mathsf{T}_xB \rightarrowtail \mathsf{T}_pE$$

o własności

(2) $$\mathrm{Hor}_p\big(\dot\gamma(0)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathsf{P}^{\gamma}_{0,t}(p)$$

dla dowolnej ścieżki γ spełniającej warunek $\gamma(0)=x$, która implikuje tożsamość

(3) $$\mathsf{T}_p\pi\circ\mathrm{Hor}_p = \mathrm{id}_{\mathsf{T}_{\pi_E(p)}B}\,.$$

Ponadto przestrzeń styczna T_pE ma rozkład

$$\mathsf{T}_pE = \mathsf{V}_pE\oplus\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p\,.$$

Odwzorowanie Hor_p określamy mianem **podniesienia poziomego** (lub **horyzontalnego**) **wektorów** z bazy do włókna.

Dowód: Zacznijmy od podkreślenia, że formuła (2) określa Hor_p jednoznacznie, a to z uwagi na dowolność wektora stycznego do ścieżki w danym punkcie bazy. Wystarczy zatem sprawdzić pożądane własności wyrażenia z prawej strony tej równości. To rzekłszy, zauważmy dalej, że rodzina dyfeomorfizmów $\mathsf{P}^{\gamma}_{t_1,t_2}$, $t_1,t_2\in[0,1]$ dla ścieżki o nigdzie nie znikającym wektorze stycznym $\dot\gamma$ (dla dostatecznie małej wartości ε) określa (lokalnie) gładkie pole wektorowe $\mathcal{Y}$ nad $\gamma([0,1])$ o potoku (albo, równoważnie, lokalnej grupie lokalnych dyfeomorfizmów)

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{Y}}\quad &:\quad [0,1]\times\pi_E^{-1}\big(\gamma([0,1])\big)\longrightarrow\pi_E^{-1}\big(\gamma([0,1])\big)\\ &:\quad (t,p)\longmapsto\mathsf{P}^{\gamma}_{\gamma^{-1}\circ\pi_E(p),t}(p)\equiv\Phi_{\mathcal{Y}}(t,p)\,,\end{aligned}$$

przy czym zachodzi, rzecz jasna, tożsamość

$$\Phi_{\mathcal{Y}}\big(\gamma^{-1}\circ\pi_E(p),p\big) = p\,,$$

a samo pole $\mathcal{Y}$ spełnia równanie

$$\mathcal{Y}(p) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=\gamma^{-1}\circ\pi_E(p)} \Phi_{\mathcal{Y}}(t,p)\,.$$

Rozważmy następnie dowolne cięcie lokalne

$$\sigma\ :\ \mathcal{O}_x \longrightarrow E\,,\qquad\qquad \pi_E\circ\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_x}$$

o własności

$$\sigma\circ\gamma(0) \equiv \sigma(x) = p\,,$$

która pociąga za sobą

$$\Phi_{\mathcal{Y}}\big(0,p\big) \equiv \Phi_{\mathcal{Y}}\big(\gamma^{-1}\circ\pi_E(p),p\big) = p \equiv \mathrm{id}_E(p)\,.$$

Jego pochodną kowariantną w x wzdłuż pola stycznego do γ,

$$\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \mathsf{P}^{\gamma^{-1}}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big)\,,$$

obliczamy przy pomocy następującego zabiegu:

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) \quad &\equiv\quad \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \mathsf{P}^{\gamma}_{0,t}\big(\mathsf{P}^{\gamma^{-1}}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}\big(t,\mathsf{P}^{\gamma^{-1}}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big)\big)\\
&=\quad \mathsf{D}_1\Phi_{\mathcal{Y}}\big(0,\mathsf{P}^{\gamma^{-1}}_{0,0}\big(\sigma\circ\gamma(0)\big)\big) + \mathsf{D}_2\Phi_{\mathcal{Y}}\big(0,\mathsf{P}^{\gamma^{-1}}_{0,0}\big(\sigma\circ\gamma(0)\big)\big)\big(\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\big)\\
&=\quad \mathcal{Y}\big(\mathsf{P}^{\gamma^{-1}}_{0,0}\big(\sigma\circ\gamma(0)\big)\big) + \mathsf{T}_{\mathsf{P}^{\gamma^{-1}}_{0,0}(\sigma\circ\gamma(0))}\mathrm{id}_E\big(\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\big)\\
&\equiv\quad \mathcal{Y}\big(\sigma(x)\big) + \mathrm{id}_{\mathsf{T}_{\sigma(x)}E}\big(\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\big) = \mathcal{Y}(p) + \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\,,
\end{aligned}$$

który pozwala nam ostatecznie zapisać

$$\mathcal{Y}(p) = \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\,,$$

a zatem także

$$\mathrm{Hor}_p\big(\dot\gamma(0)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \mathsf{P}^{\gamma}_{0,t}(p) \equiv \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \Phi_{\mathcal{Y}}(t,p) = \mathcal{Y}\big(p\big) = \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x)\,,$$

czyli

$$\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x) = \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \mathrm{Hor}_p\big(\dot\gamma(0)\big)\,. \tag{4}$$

Widzimy więc, że wprost na mocy definicji pochodnej kowariantnej (oraz odwzorowania stycznego) odwzorowanie Hor_p jest $\mathbb{R}$-liniowe, przy czym zależy od wyboru ścieżki wyłącznie poprzez $\dot\gamma(0)$ (oraz $\gamma(0) = x$). Jest ono także injektywne, gdyż z jednej strony

$$\nabla_{\dot\gamma}\sigma(x) \in \mathsf{V}_pE\,,$$

a z drugiej

$$\mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) \in \mathsf{V}_pE \qquad\Longleftrightarrow\qquad \dot\gamma(0) \equiv \mathsf{T}_{\sigma(x)}\pi\circ\mathsf{T}_x\sigma\big(\dot\gamma(0)\big) = 0_{\mathsf{T}_{\sigma(x)}E}\,,$$

przeto koniec końców

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) - \nabla_{\dot\gamma}\sigma(x) \in \mathsf{V}_pE \qquad&\Longleftrightarrow\qquad \mathsf{T}_x\sigma(\dot\gamma(0)) \in \mathsf{V}_pE\\
&\Longleftrightarrow\qquad \dot\gamma(0) = 0_{\mathsf{T}_xB}\,,
\end{aligned}$$

czyli

$$\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \cap \mathsf{V}_pE = \{0_{\mathsf{T}_pE}\}\,.$$

Powyższe implikuje ciąg relacji między przestrzeniami $\mathbb{R}$-liniowymi (mamy tu do czynienia z wewnętrzną sumą prostą)

$$\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \oplus \mathsf{V}_pE = \mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p +_{\mathsf{T}_pE} \mathsf{V}_pE \subset \mathsf{T}_pE\,,$$

a ponieważ – z racji injektywności Hor_p, która czyni z niego izomorfizm na obraz – prawdziwą jest równość

$$\dim_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \oplus \mathsf{V}_pE\big) \quad=\quad \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p + \dim_{\mathbb{R}}\mathsf{V}_pE = \dim_{\mathbb{R}}\mathsf{T}_xB + \dim F$$

$$= \quad \dim B + \dim F = \dim E \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_p E\,,$$

przeto w istocie

$$\mathrm{Image}\,\mathrm{Hor}_p \oplus \mathsf{V}_p E = \mathsf{T}_p E\,.$$

Tożsamość (3) wynika bezpośrednio z wyprowadzonego powyżej wyrażenia na $\mathrm{Hor}_p\big(\dot\gamma(0)\big)$. $\square$

Alternatywny sposób rozumienia powiązania wprowadzamy w

Definicja 3. Powiązanie Ehresmanna na wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) to wybór takiej podwiązki wektorowej $\mathsf{H}E \subset \mathsf{T}E$ wiązki stycznej do przestrzeni totalnej E, która dopełnia wiązkę pionową $\mathsf{V}E$ do wiązki stycznej $\mathsf{T}E$ wedle formuły

$$\mathsf{T}E = \mathsf{V}E \oplus_{\mathbb{R},B} \mathsf{H}E\,.$$

Podwiązka $\mathsf{H}E$ nosi miano (**pod**)**wiązki poziomej** (lub **horyzontalnej**) nad E. Jej włókno $\mathsf{H}_p E \equiv (\mathsf{H}E)_p$ nad $p \in E$, zwane (**pod**)**przestrzenią poziomą** (lub **horyzontalną**), rozpinają **wektory poziome** (lub **horyzontalne**).

Relację pomiędzy oboma dotychczasowymi podejściami do definicji powiązania określa

Twierdzenie 1. Powiązanie Ehresmanna na wiązce włóknistej określa na niej powiązanie włókien.

Dowód: Istnienie powiązania Ehresmanna na wiązce E wymiaru $D \equiv \dim E$ nad bazą B wymiaru $d \equiv \dim B$ pozwala nam wybrać na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_p$ dowolnego punktu $p \in E$ współrzędne lokalne $\{y^\mu\}^{\mu\in\overline{1,D}}$ stowarzyszone z lokalną bazą $\{\frac{\partial}{\partial y^\mu}\}_{\mu\in\overline{1,D}}$ (przestrzeni cięć) wiązki stycznej $\mathsf{T}E$ uzgodnioną z rozkładem $\mathsf{T}E = \mathsf{V}E \oplus_{\mathbb{R},B} \mathsf{H}E$ poprzez warunek

$$\forall_{q\in\mathcal{U}_p} \;:\; \mathrm{Ker}\,\mathsf{T}_q\pi_E = \bigoplus_{\nu\in\overline{d+1,D}} \Big\langle \tfrac{\partial}{\partial y^\nu}(q)\Big\rangle_{\mathbb{R}}\,.$$

Niechaj $\{x^a\}^{a\in\overline{1,d}}$ będą lokalnymi współrzędnymi na pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_x \supset \pi_E(\mathcal{U}_p)$ punktu $x \equiv \pi_E(p)$ stowarzyszonymi z lokalną bazą $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}_{a\in\overline{1,d}}$ (przestrzeni cięć) wiązki stycznej $\mathsf{T}B$. Powyższa adaptacja bazy $\mathsf{T}E\restriction_{\mathcal{U}_p}$ (i wynikająca z niej interpretacja współrzędnych $\{y^\nu\}^{\nu\in\overline{d+1,D}}$ jako współrzędnych we włóknach π_E) pozwala zapisać (lokalną prezentację współrzędniową odwzorowania stycznego do rzutu na bazę)

$$\mathsf{T}_q\pi_E\big(\tfrac{\partial}{\partial y^\mu}(q)\big) = \Pi(\pi_E(q))^a{}_\mu\, \tfrac{\partial}{\partial x^a}\big(\pi_E(q)\big)\,,$$

przy czym submersywność π_E implikuje stały (maksymalny) rząd $\mathrm{rk}\,\Pi(\pi_E(q)) = d$ macierzy funkcji (lokalnie) gładkich $\Pi(\pi_E(q)) \equiv (\Pi(\pi_E(q))^a{}_\mu)^{a\in\overline{1,d}}_{\mu\in\overline{1,D}}$, która przybiera postać

$$\Pi\big(\pi_E(q)\big) = \Big(\; \underline{\Pi}\big(\pi_E(q)\big) \;\;\big|\;\; \mathbf{0}_{d\times D-d} \;\Big)\,, \qquad \underline{\Pi}\big(\pi_E(q)\big) \equiv \big(\Pi\big(\pi_E(q)\big)^a{}_\lambda\big)^{a\in\overline{1,d}}_{\lambda\in\overline{1,d}}\,.$$

W analogiczny sposób możemy przedstawić rzut kanoniczny

$$\mathsf{P}^{\mathsf{H}_q E}_{\mathsf{V}_q E} \;:\; \mathsf{T}_q E \longrightarrow \mathsf{V}_q E$$

na podprzestrzeń wertykalną wzdłuż przestrzeni horyzontalnej,

$$\mathsf{P}^{\mathsf{H}_q E}_{\mathsf{V}_q E}\big(\tfrac{\partial}{\partial y^\mu}(q)\big) = \Upsilon\big(\pi_E(q)\big)^\nu{}_\mu\, \tfrac{\partial}{\partial y^\nu}(q)\,,$$

w terminach macierzy funkcji (lokalnie) gładkich $\Upsilon(\pi_E(q)) \equiv (\Upsilon(\pi_E(q))^\nu{}_\mu)^{\nu\in\overline{d+1,D}}_{\mu\in\overline{1,D}}$, która przybiera postać

$$\Upsilon\big(\pi_E(q)\big) = \Big(\; \underline{\Upsilon}\big(\pi_E(q)\big) \;\;\big|\;\; \mathbf{1}_{D-d\times D-d} \;\Big)\,, \qquad \underline{\Upsilon}\big(\pi_E(q)\big) \equiv \big(\Upsilon(\pi_E(q))^\nu{}_\lambda\big)^{\nu\in\overline{d+1,D}}_{\lambda\in\overline{1,d}}\,.$$

Niech teraz $\gamma \;:\;]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \pi_E(\mathcal{U}_p)$ będzie lokalną ścieżką przez $\gamma(0) \equiv x$, o reprezentacji współrzędniowej $x^a \circ \gamma \equiv \gamma^a$, $a \in \overline{1,d}$. Pokażemy, że istnieje (lokalnie) jednoznaczne **podniesienie poziome** (lub **horyzontalne**) tejże **ścieżki** przechodzące przez punkt p, tj. lokalna ścieżka $\widetilde{\gamma}_p$:

$]-\varepsilon_p,\varepsilon_p[\longrightarrow\mathcal{U}_p,\ 0<\varepsilon_p\leq\varepsilon$ przez $\widetilde{\gamma}_p(0)\equiv p$ (o reprezentacji współrzędniowej $y^\mu\circ\widetilde{\gamma}_p\equiv\widetilde{\gamma}_p^\mu,\ \mu\in\overline{1,D}$) spełniająca warunki

$$\forall_{t\in]-\varepsilon_p,\varepsilon_p[}\ :\ \big(\ \pi_E\circ\widetilde{\gamma}_p(t)=\gamma(t)\qquad\wedge\qquad \mathsf{D}\widetilde{\gamma}_p(t)\in\mathsf{H}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}E\ \big)\,.$$

W tym celu przepiszemy drugi z powyższych warunków (który implikuje pierwszy) w postaci współrzędniowej:

$$M\big(\gamma(t)\big)^A{}_\mu\,\tfrac{\mathsf{d}\widetilde{\gamma}_p^\mu}{\mathsf{d}t}(t)=\mathsf{D}\gamma(t)^A\,,\qquad A\in\overline{1,D}\,,$$

w której

$$M\big(\gamma(t)\big)=\left(\begin{array}{c}\Pi\big(\pi_E(q)\big)\\ \Upsilon\big(\pi_E(q)\big)\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc}\underline{\Pi}\big(\pi_E(q)\big) & \mathbf{0}_{d\times D-d}\\ \underline{\Upsilon}\big(\pi_E(q)\big) & \mathbf{1}_{D-d\times D-d}\end{array}\right)\in\mathbb{R}(d)$$

i

$$\mathsf{D}\gamma(t)^a=\tfrac{\mathsf{d}\gamma^a}{\mathsf{d}t}(t)\,,\qquad a\in\overline{1,d}\,,\qquad\qquad \mathsf{D}\gamma(t)^\nu=0\,,\qquad \nu\in\overline{d+1,D}\,.$$

Macierz $M\big(\gamma(t)\big)$ jest jawnie odwracalna, przeto możemy przepisać warunki podniesienia poziomego w formie zagadnienia początkowego

$$\tfrac{\mathsf{d}(\widetilde{\gamma}_p^\mu)}{\mathsf{d}t}(t)=\Big(M\big(\gamma(t)\big)^{-1\,\mu}{}_A\,\mathsf{D}\gamma(t)^A\Big)\,,\qquad\qquad \widetilde{\gamma}_p(0)\equiv p$$

o prawej stronie wyznaczonej przez zadaną gładką funkcję czasu. Zagadnienie to ma jednoznaczne rozwiązanie, które jest postulowanym podniesieniem poziomym γ. Rozwiązanie to zależy gładko od warunku początkowego $\widetilde{\gamma}_p(0)\equiv p$. Możemy je gładko przedłużać wybierając w tym celu otoczenia punktów wzdłuż tak rekonstruowanego podniesienia położonych coraz dalej od wyjściowego p we włóknie nad $\gamma(0)$ będące dziedzinami lokalnych map – w każdym z nich podniesienie jest, jak powyżej, określone jednoznacznie. Przy tym zwartość krzywej $\gamma([0,1])$ (jako ciągłego obrazu zbioru zwartego $[0,1]$) gwarantuje, że procedurę przedłużania podniesionej poziomo krzywej można zrealizować w skończonej liczbie kroków. Przebiegając E_x jako dziedzinę watunków początkowych dla podniesienia γ, uzyskujemy tym sposobem gładką rodzinę dyfeomorfizmów

$$\mathsf{P}^\gamma_{0,t}\ :\ E_x\xrightarrow{\cong}E_{\gamma(t)}\ :\ p\longmapsto\widetilde{\gamma}_p(t)\,,\qquad t\in[0,1]\,,\tag{5}$$

określających w naturalny sposób (lokalne – nad $\pi_E^{-1}(\gamma([0,1]))$) gładkie pole wektorowe $\mathcal{V}\in\Gamma(\mathsf{H}E\restriction_{\pi_E^{-1}(\gamma([0,1]))})$ – jest to pole wektorów stycznych do podniesień poziomych. Innymi słowy, opisana tu procedura podniesienia poziomego daje nam gładką rodzinę izomorfzimów

$$\mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\ :\ \mathsf{T}_{\gamma(t)}M\xrightarrow{\cong}\mathsf{H}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}E\,,\qquad p\in E_x\,,\ t\in[0,1]\,,$$

zyskując przy tym interpretację parametryzowanej gładko przez warunek początkowy $p\in E_x$ rodziny krzywych całkowych podniesienia $\mathcal{V}$ pola prędkości $\dot{\gamma}$ rozwiązujących zagadnienia początkowe

$$\dot{\widetilde{\gamma}}_p(t)=\mathrm{Hor}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\,,\qquad\qquad \widetilde{\gamma}_p(0)=p\,.\tag{6}$$

Z tego punktu widzenia zasada superpozycji (PT3) z Def. 2, jak również warunek początkowy (PT2), wynikają bezpośrednio z konstrukcji potoku gładkiego pola wektorowego (związku z lokalną grupą lokalnych dyfeomorfizmów).

Pozostaje na koniec rozpatrzeć pochodną kowariantną definiowaną przez tak określone powiązanie włókien w E. Rozumując jak w dowodzie Stw. 1, wyznaczamy

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}\sigma(x)\quad&\equiv\quad\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,t}\big(\sigma\circ\gamma(t)\big)=-\mathrm{Hor}_{\sigma(x)}\big(\dot{\gamma}(0)\big)+\mathsf{T}_{\sigma(x)}\mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,0}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\sigma\circ\gamma(t)\big)\\ &=\quad-\mathrm{Hor}_{\sigma(x)}\big(\dot{\gamma}(0)\big)+\mathsf{T}_x\sigma\big(\dot{\gamma}(0)\big)\,,\end{aligned}\tag{7}$$

konstatujemy więc, że pochodna zależy od użytej w jej definicji ścieżki γ tylko poprzez $\dot{\gamma}(0)$ (oraz $\gamma(0)=x$), od samego zaś pola $\dot{\gamma}$ – w sposób jawnie $C^\infty(B,\mathbb{R})$-liniowy, zgodnie z aksjomatem (PT4) w Def. 2. $\square$

Na gruncie interpretacji sumy Whitneya jako geometryzacji sumy prostej przestrzeni wektorowych, a w odwołaniu do równoważności opisu tejże konstrukcji przy użyciu zupełnej rodziny rzutów komplementarnych, wnioskujemy, że opis powiązania na wiązce włóknistej w terminach rozkładu wiązki stycznej do przestrzeni totalnej tejże wiązki na sumę (Whitneya) podwiązek: pionowej i poziomej niesie w sobie podpowiedź dotyczącą kolejnego naturalnego przeformułowania definicji powiązania. Oto więc

Definicja 4. **Forma powiązania** na wiązce włóknistej (E, B, F, π_E) to $C^\infty(B, \mathbb{R})$-liniowy morfizm wiązek wektorowych

$$(\mathsf{A}, \mathrm{id}_E) \;:\; \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{V}E$$

o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{V}E \arrow[r, "\jmath_{\mathsf{V}E}"] \arrow[dr, equal, "\mathrm{id}_{\mathsf{V}E}"'] & \mathsf{T}E \arrow[d, "\mathsf{A}"] \\ & \mathsf{V}E \end{tikzcd},$$

na którym $\jmath_{\mathsf{VE}}$ jest włożeniem kanonicznym.

I tym razem konstatujemy istnienie prostej relacji pomiędzy definicjami.

Twierdzenie 2. Forma powiązania na wiązce włóknistej określa na niej w sposób kanoniczny powiązanie Ehresmanna.

<u>*Dowód:*</u> Z dowolnym morfizmem wiązek wektorowych $\mathsf{A} \;:\; \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{V}E$ o własności $\mathsf{A}\restriction_{\mathsf{V}E} = \mathrm{id}_{\mathsf{V}E}$ możemy – w świetle Tw. 2.4 – stowarzyszyć podwiązkę

$$\mathsf{H}E \coloneqq \mathrm{Ker}(\mathsf{A}, \mathrm{id}_E) \subset \mathsf{T}E\,.$$

Przy tym dla dowolnego $v \in \mathsf{H}_pE \cap \mathsf{V}_pE,\ p \in E$ otrzymujemy wynik

$$v = \mathrm{id}_{\mathsf{V}E}(v) = \mathsf{A}(v) = 0_{\mathsf{T}_pE}\,,$$

zatem

$$\mathsf{H}E \cap \mathsf{V}E = \{\mathbf{0}_{\mathsf{T}E}\}\,.$$

□

Uwaga 3. Na zakończenie ogólnej dyskusji konstrukcji powiązania w wiązce włóknistej sformułujemy lokalny jego opis stowarzyszony z trywializacjami lokalnymi $\tau_i \;:\; \pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times F,\ i \in I$ nad pokryciem $\mathscr{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$, o odwzorowaniach przejścia $g_{ij} \;:\; \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$. Opis ten prześledzimy szczegółowo we współrzędnych lokalnych: (x^μ, ξ^A), $\mu \in \overline{1, \dim B}$, $A \in \overline{1, \dim F}$ na pewnym otoczeniu $(x, f) \equiv (\pi_{\mathsf{T}\mathcal{O}_{ij}}(X), \pi_{\mathsf{T}F}(V)) \in \mathcal{O}_{ij} \times F$ oraz $(y^\mu \equiv x^\mu, \zeta^A)$ na pewnym otoczeniu $(x, g_{ij}(x)(f)) \in \mathcal{O}_{ij} \times F$. Trywializacje wiązki E indukują styczne trywializacje lokalne

$$\mathsf{T}\tau_i \;:\; \mathsf{T}\pi_E^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathsf{T}(\mathcal{O}_i \times F) \cong \mathrm{pr}_1^*\mathsf{T}\mathcal{O}_i \oplus_{\mathcal{O}_i \times F, \mathbb{R}} \mathrm{pr}_2^*\mathsf{T}F\,.$$

Wykorzystując bazy współrzędniowe w przestrzeniach stycznych, oznaczmy

$$\mathsf{T}t_{ij} \equiv \mathsf{T}\tau_i \circ \big(\mathsf{T}\tau_j\big)^{-1} \;: \mathsf{T}(\mathcal{O}_{ij} \times F) \circlearrowleft \;:\; \big((x, f), X + V\big) \longmapsto \big(\big(x, g_{ij}(x)(f)\big), \widetilde{X} + \widetilde{V}\big)\,,$$

$$X \equiv X^\mu \triangleright \tfrac{\partial}{\partial x^\mu}(x)\,, \qquad V \equiv V^A \triangleright \tfrac{\partial}{\partial \xi^A}(f)\,,$$

$$\widetilde{X} \equiv \widetilde{X}^\mu \triangleright \tfrac{\partial}{\partial y^\mu}(x)\,, \qquad \widetilde{V} \equiv \widetilde{V}^A \triangleright \tfrac{\partial}{\partial \zeta^A}\big(g_{ij}(x)(f)\big)\,,$$

przy czym zachodzą tożsamości

$$t_{ij}^*\mathsf{d}y^\mu(x, f) = \tfrac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}(x) \triangleright \mathsf{d}x^\nu(x) = \delta^\mu_\nu \triangleright \mathsf{d}x^\nu(x) = \mathsf{d}x^\mu(x)$$

oraz

$$t_{ij}^* \mathsf{d}\zeta^A(x,f) = \tfrac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu}\big(\big(g_{ij}(x)(f)\big) \triangleright \mathsf{d}x^\mu(x) + \tfrac{\partial \zeta^A}{\partial \xi^B}\big(\big(g_{ij}(x)(f)\big) \triangleright \mathsf{d}\xi^B(f)\,,$$

które pozwalają zapisać

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &\equiv \mathsf{T}_{(x,f)}t_{ij}(X+V) \lrcorner \mathsf{d}y^\mu(x) \triangleright \tfrac{\partial}{\partial y^\mu}(x) = (X+V) \lrcorner t_{ij}^*\mathsf{d}y^\mu(x,f) \triangleright \tfrac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \\ &= (X+V) \lrcorner \mathsf{d}x^\mu(x) \triangleright \tfrac{\partial}{\partial x^\mu}(x) = X \lrcorner \mathsf{d}x^\mu(x) \triangleright \tfrac{\partial}{\partial x^\mu}(x) \equiv X\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\widetilde{V} &\equiv \mathsf{T}_{(x,f)}t_{ij}(X+V) \lrcorner \mathsf{d}\zeta^A\big(g_{ij}(x)(f)\big) \triangleright \tfrac{\partial}{\partial \zeta^A}\big(g_{ij}(x)(f)\big) \\ &= (X+V) \lrcorner t_{ij}^*\mathsf{d}\zeta^A(g_{ij}(x,f) \triangleright \tfrac{\partial}{\partial \zeta^A}\big(g_{ij}(x)(f)\big) \\ &= \big(X^\mu\, \tfrac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu}\big(\big(g_{ij}(x)(f)\big) + V^B\, \tfrac{\partial \zeta^A}{\partial \xi^B}\big(\big(g_{ij}(x)(f)\big)\big) \triangleright \tfrac{\partial}{\partial \zeta^A}\big(g_{ij}(x)(f)\big)\,.\end{aligned}$$

W dalszej części naszej dyskusji rzut na drugi składnik prosty, $\mathsf{T}F$, w whitneyowskim rozkładzie wiązki stycznej $\mathsf{T}(\mathcal{O}_i \times F) \cong \mathrm{pr}_1^*\mathsf{T}\mathcal{O}_i \oplus_{\mathcal{O}_i\times F,\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2^*\mathsf{T}F$ (wzgl. $\mathsf{T}(\mathcal{O}_{ij} \times F) \cong \mathrm{pr}_1^*\mathsf{T}\mathcal{O}_i \oplus_{\mathcal{O}_{ij}\times F,\mathbb{R}} \mathrm{pr}_2^*\mathsf{T}F$), będziemy oznaczać symbolem ϖ_i (wzgl. ϖ_{ij}).

Ażeby postąpić dalej w naszym rachunku, musimy poczynić pewne założenia w odniesieniu do grupy $\mathrm{Aut}(F)$, w której przyjmują wartości odwzorowania przejścia g_{ij}. Odtąd będziemy więc zakładać, że wyróżnione elementy $g_{ij}(x)$ grupy $\mathrm{Aut}(F)$ należą do pewnej (skończenie wymiarowej) (pod)grupy Liego $\mathrm{G} \subset \mathrm{Aut}(F)$, co w szczególnie nas interesujących przypadkach jest prawdą: w przypadku wiązki wektorowej rzędu n nad ciałem bazowym $\mathbb{K}$ mamy do czynienia z grupą $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K})$, a w przypadku (gładkiej) wiązki głównej oraz wiązek z nią stowarzyszonych – z grupą strukturalną, która jest grupą Liego. Poczynione założenie pozwoli nam wykorzystać zgromadzoną w Wykładzie 3. wiedzę szczegółową na temat rachunku różniczkowego na rozmaitości grupowej oraz na rozmaitości z działaniem grupy Liego uzgodnionych z naturalnym działaniem grupy.

Rozważmy lokalne cięcie

$$\sigma\ :\ \mathcal{O} \longrightarrow E$$

i wybierzmy punkt $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$. W obrazie lokalnym definiujemy odwzorowania $\sigma_i\ :\ \mathcal{O}_i \longrightarrow F$ klasy C^∞, jak następuje:

$$\tau_i \circ \sigma(x) =: \big(x, \sigma_i(x)\big)\,,$$

przy czym zachodzi tożsamość

$$\big(x, \sigma_j(x)\big) \equiv \tau_j \circ \sigma(x) = \tau_j \circ \tau_i^{-1}\big(\tau_i \circ \sigma(x)\big) = \tau_j \circ \tau_i^{-1}\big(x, \sigma_i(x)\big) = \big(x, g_{ji}(x)\big(\sigma_i(x)\big)\big)\,,$$

z której wyprowadzamy regułę transformacyjną dla odwzorowań σ_i na $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$,

$$\sigma_j(x) = g_{ji}(x)\big(\sigma_i(x)\big) \equiv \delta_{g_{ji}(x)}\big(\sigma_i(x)\big)\,.$$

Powyżej wprowadziliśmy symbol $\delta.\ :\ \mathrm{G} \times F \longrightarrow F$ dla oznaczenia (definiującego) działania grupy Liego $\mathrm{G} \subset \mathrm{Aut}(F)$ na F. Wprowadzone przez nas obiekty pozwalają nam skwantyfikować w obrazie lokalnym poprawkę do naturalnego różniczkowania wertykalnego $\mathsf{T}\sigma_i$ cięcia σ, jaką wprowadza pochodna kowariantna. Oto więc dla dowolnego pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{O})$ o wartości $V \equiv \mathcal{V}(x)$ w punkcie $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_i$ definiujemy

$$V \lrcorner \alpha_i\big(x, \sigma(x)\big) := \varpi_i \circ \mathsf{T}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) - \mathsf{T}_x\sigma_i(V)\,, \tag{8}$$

gdzie

$$\alpha_i\big(\cdot, \sigma(\cdot)\big) \in \mathsf{T}^*_\cdot\mathcal{O}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}.F \subset \mathsf{T}^*_\cdot\mathcal{O}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{(\cdot,\sigma(\cdot))}(\mathcal{O}_i \times F)$$

jest miarą odstępstwa pochodnej kowariantnej od $\mathsf{T}\sigma_i$. Ten ostatni obiekt również możemy traktować jako element przestrzeni $\Omega^1(\mathcal{O}_i) \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}F$, przy czym będziemy go wówczas oznaczać w sugestywny sposób jako $\mathsf{d}\sigma_i$. Trzymając się tej wygodnej konwencji, zapiszemy zatem

$$\varpi_i \circ \mathsf{T}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) = V \lrcorner \big(\mathsf{d}\sigma_i(x) + \alpha_i\big(x, \sigma(x)\big)\big)\,.$$

Rzecz jasna, przywołane tu kryterium naturalności w wyborze różniczkowania referencyjnego $\mathsf{T}\sigma_i$ ma moc ograniczoną. Rzetelnego usprawiedliwienia dla poczynionego tu rozkładu pochodnej kowariantnej na części zależne od σ_i w sposób „stycznościowy" i „funkcjonalny" dostarczy nam dopiero szczegółowa dyskusja powiązania uzgodnionego z dodatkową strukturą na włóknie oraz jego zastosowań fizykalnych, jaką podejmiemy podczas kolejnych wykładów. Tymczasem zbadamy własności transformacyjne obiektów lokalnych α_i przy przejściu pomiędzy trywializacjami lokalnymi na przecięciu ich dziedzin. Oto więc w dowolnym punkcie $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{ij}$ znajdujemy

$$\begin{aligned} V \lrcorner \big(\mathsf{d}\sigma_i(x) + \alpha_i\big(x, \sigma(x)\big)\big) &\equiv \varpi_{ij} \circ \mathsf{T}\tau_i(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) = \varpi_{ij} \circ \mathsf{T}t_{ij} \circ \mathsf{T}\tau_j(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma)(x) \\ &= V \lrcorner \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_j(x)}\delta_{g_{ij}(x)}\big)\big(\mathsf{d}\sigma_j(x) + \alpha_j\big(x, \sigma(x)\big)\big), \end{aligned}$$

czyli – wobec dowolności V –

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_j(x)}\delta_{g_{ij}(x)}\big)\alpha_j\big(x, \sigma(x)\big) - \alpha_i\big(x, \sigma(x)\big) \\ =\ & \mathsf{d}\sigma_i(x) - \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_j(x)}\delta_{g_{ij}(x)}\big)\mathsf{d}\sigma_j(x) \\ =\ & \mathsf{d}\sigma_i(x) - \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_j(x)}\delta_{g_{ij}(x)}\big)\mathsf{d}\big(\delta_{g_{ji}(x)}\big(\sigma_i(x)\big)\big). \end{aligned}$$

Celem uniknięcia nieporozumień na dalszych etapach analizy podkreślmy wyraźnie: $\mathsf{T}_{\sigma_j(x)}\delta_{g_{ij}(x)}$ jest odwzorowaniem stycznym do dyfeomorfizmu $\delta_{g_{ij}(x)} : F \circlearrowleft$ w punkcie $\sigma_j(x)$ dziedziny tego ostatniego, natomiast $\mathsf{d}\big(\delta_{g_{ji}(x)}\big(\sigma_i(x)\big)\big)$ jest (tożsame z) odwzorowaniem stycznym do $\delta_{g_{ji}(\cdot)}\big(\sigma_i(\cdot)\big) : \mathcal{O}_{ij} \longrightarrow F$ w punkcie x. Przywoławszy treść Uwagi 3.3 oraz Równ. (3.6), zapiszemy zatem

$$\begin{aligned} &\mathsf{d}\big(\delta_{g_{ji}(x)}\big(\sigma_i(x)\big)\big) \\ =\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\mathsf{d}\sigma_i(x) + \theta^A_{\mathrm{L}}\big(g_{ji}(x)\big) \otimes_{\mathbb{R}} \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\delta_{\mathcal{L}^{t_A}_t(g_{ji}(x))}\big(\sigma_i(x)\big)\big) \\ =\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\big(\mathsf{d}\sigma_i(x) + g^*_{ji}\theta^A_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\delta_{g_{ij}(x)\cdot\mathcal{L}^{t_A}_t(g_{ji}(x))}\big(\sigma_i(x)\big)\big)\big) \\ =\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\big(\mathsf{d}\sigma_i(x) + g^*_{ji}\theta^A_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\delta_{g_{ij}(x)\cdot g_{ji}(x)\cdot\mathcal{L}^{t_A}_t(e)}\big(\sigma_i(x)\big)\big)\big) \\ =\ & \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\big(\mathsf{d}\sigma_i(x) + g^*_{ji}\theta^A_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0}\big(\delta_{\mathcal{L}^{t_A}_t(e)}\big(\sigma_i(x)\big)\big)\big), \end{aligned}$$

co w świetle Uwagi 4.1 prowadzi do wyniku

$$\mathsf{d}\big(\delta_{g_{ji}(x)}\big(\sigma_i(x)\big)\big) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\mathsf{d}\sigma_i(x) + g^*_{ji}\theta^A_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big(\mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma_i(x)\big)\big).$$

Na podstawie Stw. 4.1 możemy – w odwołaniu do Równ. (3.9) – przepisać ten ostatni w postaci

$$\begin{aligned} \mathsf{d}\big(\delta_{g_{ji}(x)}\big(\sigma_i(x)\big)\big) &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\mathsf{d}\sigma_i(x) + g^*_{ji}\theta^A_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}(t_A)}\big(\sigma_j(x)\big) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\mathsf{d}\sigma_i(x) + \big(\mathsf{T}_e\mathrm{Ad}_{g_{ji}(x)}\big)^{\ B}_{A} \triangleright g^*_{ji}\theta^A_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}\big(\sigma_j(x)\big) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\mathsf{d}\sigma_i(x) + g^*_{ji}\theta^B_{\mathrm{R}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}\big(\sigma_j(x)\big), \end{aligned}$$

albo – raz jeszcze wyzyskując tezę Stw. 3.13 –

$$\mathsf{d}\big(\delta_{g_{ji}(x)}\big(\sigma_i(x)\big)\big) = \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\mathsf{d}\sigma_i(x) - g^*_{ij}\theta^B_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_B}\big(\sigma_j(x)\big). \tag{9}$$

Ostatecznie otrzymujemy poszukiwaną formułę transformacyjną

$$\begin{aligned} \alpha_j\big(x, \sigma(x)\big) &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ji}(x)}\big)\alpha_i\big(x, \sigma(x)\big) - g^*_{ji}\theta^A_{\mathrm{R}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma_j(x)\big) \\ &= \big(\mathrm{id}_{\mathsf{T}^*B} \otimes \mathsf{T}_{\sigma_i(x)}\delta_{g_{ij}(x)^{-1}}\big)\alpha_i\big(x, \sigma(x)\big) + g^*_{ij}\theta^A_{\mathrm{L}}(x) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{t_A}\big(\sigma_j(x)\big), \end{aligned}$$

o charakterze jawnie afinicznym. Fomuła ta stanowi punkt wyjścia do dalszej analizy uwzględniającej dodatkową strukturę algebraiczną na włóknie, którą podejmiemy na następnym wykładzie.

Zwieńczeniem naszych rozważań jest specjalizacja pojęcia morfizmu wiązek włoknistych w obecności powiązania, której dokonujemy poniżej.

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Def. 2, 3 oraz 4 i niechaj $(E_\alpha, B_\alpha, F_\alpha, \pi_{E_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą wiązkami włóknistymi z powiązaniem włókien. **Morfizm wiązek włóknistych z powiązaniem włókien** (**nad dyfeomorfizmem baz**) pomiędzy E_1 i E_2 to morfizm wiązek włóknistych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{E_1}"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_{E_2}"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

o składowej bazowej[2] $f \in \mathrm{Diff}^\infty(B_1, B_2)$ spełniający poniższy warunek:

(FCM1) dla dowolnych: ścieżki $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow B_1$, $\varepsilon > 0$ i $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ zachodzi tożsamość

$$\Phi \circ \mathsf{P}^{(1)\,\gamma}_{0,t} = \mathsf{P}^{(2)\,f\circ\gamma}_{0,t} \circ \Phi\,,$$

przy czym wówczas dla dowolnych: cięcia (lokalnego) $\sigma : \mathcal{O}_x \longrightarrow E_1$ określonego na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_x$ punktu $x \in B_1$ oraz pola wektorowego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_x)$ spełniony jest **warunek kowariancji**

$$\mathsf{T}_{\sigma(x)}\Phi\big(\nabla^{(1)}_{\mathcal{V}}\sigma(x)\big) = \nabla^{(2)}_{\mathsf{T}f(\mathcal{V})}\big(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}\big)\big(f(x)\big)\,.$$

Ilekroć na obu wiązkach określone jest powiązanie Ehresmanna, mianem **morfizmu wiązek włóknistych z powiązaniem Ehresmanna** (**nad dyfeomorfizmem baz**) określamy morfizm wiązek włóknistych (Φ, f) spełniający warunek:

(FCM2) para odwzorowań stycznych: $(\mathsf{T}\Phi, \mathsf{T}f)$ ogranicza się do podwiązek poziomych $\mathsf{H}E_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ i zadaje tym sposobem morfizm wiązek wektorowych opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} \mathsf{H}E_1 \arrow[r, "\mathsf{T}\Phi\restriction_{\mathsf{H}E_1}"] \arrow[d, "\mathsf{T}\pi_{E_1}\restriction_{\mathsf{H}E_1}"'] & \mathsf{H}E_2 \arrow[d, "\mathsf{T}\pi_{E_2}\restriction_{\mathsf{H}E_1}"] \\ \mathsf{T}B_1 \arrow[r, "\mathsf{T}f"'] & \mathsf{T}B_2 \end{tikzcd} .$$

Wreszcie też w obecności formy powiązania na obu wiązkach mówimy o **morfizmie wiązek włóknistych z formą powiązania** (**nad dyfeomorfizmem baz**), jeśli (Φ, f) spełnia warunek:

(FCM3) odwzorowanie styczne $\mathsf{T}\Phi$ zachowuje formę powiązania w rozumieniu równości

$$\mathsf{T}\Phi \circ \mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2 \circ \mathsf{T}\Phi\,.$$

Uwaga 4. Warunek kowariancji z punktu (FCM1) sprawdzamy w bezpośrednim rachunku (przeprowadzonym z wykorzystaniem dowolnej ścieżki γ w B_1 przez $x = \gamma(0)$ o wektorze stycznym $\dot\gamma(0) = \mathcal{V}(x)$),

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{\sigma(x)}\Phi\big(\nabla_{\mathcal{V}}\sigma(x)\big) &\equiv \mathsf{T}_{\sigma(x)}\Phi\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,t}\big(\sigma \circ \gamma(t)\big)\big) = \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \Phi \circ \mathsf{P}^{\gamma\,-1}_{0,t}\big(\sigma \circ \gamma(t)\big) \\ &= \tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\restriction_{t=0} \mathsf{P}^{f\circ\gamma\,-1}_{0,t}\big(\big(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}\big) \circ (f \circ \gamma)(t)\big) \\ &= \nabla_{\mathsf{T}f(\mathcal{V})}\big(\Phi \circ \sigma \circ f^{-1}\big)\big(f(x)\big)\,, \end{aligned}$$

[2] Powód zawężenia wyboru składowej bazowej morfizmu jest oczywisty – zawężenie takie zapewnia istnienie naturalnego transportu pól wektorowych między bazami, a zatem także pomiędzy podwiązkami poziomymi. Możliwe jest uogólnienie podanej definicji, którego jednak nie będziemy tu rozważać.

przy czym identyfikacja pola wektorowego, wzdłuż którego różniczkowane jest cięcie $\Phi\circ\sigma$ na końcu ciągu równości, wynika wprost z tożsamości

$$\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\,(f\circ\gamma)(t)=\mathsf{T}_{\gamma(t)}f\big(\dot\gamma(t)\big)\,.$$

To właśnie zweryfikowany powyżej warunek tłumaczy nazwę nadaną obiektowi $\nabla_{\mathcal{V}}\sigma$.

Należy też zauważyć, w odniesieniu do punktu (FCM2), że para $(\mathsf{T}\Phi,\mathsf{T}f)$ zawsze jest morfizmem wiązek wektorowych z racji funktorialności T i dopiero postulat zachowywania podwiązek poziomych stanowi nietrywialny warunek dodatkowo ograniczający morfizm wiązek (Φ,f).

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 5. Warunki (FCM1), (FCM2) i (FCM3) są powiązane relacjami

$$\text{(FCM3)}\Longrightarrow\text{(FCM2)}\Longrightarrow\text{(FCM1)}\,.$$

<u>*Dowód:*</u>

$(FCM2)\Rightarrow(FCM1)$ Przemienność diagramu z warunku (FCM2), który w ograniczeniu do punktu $p\in E_{1\,x}$, $x\in B_1$ przybiera postać

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{H}_pE_1 \arrow[r, "\mathsf{T}_p\Phi\restriction_{\mathsf{H}_pE_1}"] & \mathsf{H}_{\Phi(p)}E_2 \\
\mathsf{T}_xB_1 \arrow[u, "\mathrm{Hor}^{(1)}_p"] \arrow[r, "\mathsf{T}_xf"'] & \mathsf{T}_{f(x)}B_2 \arrow[u, "\mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi(p)}"']
\end{tikzcd}\,, \tag{10}$$

pozwala obliczyć, dla dowolnych ścieżek $\widetilde{\gamma}_p$, $p\in E_{1\,x}$ będących podniesieniami ścieżki γ w B_1 przez $x\equiv\gamma(0)$, tj. będących rozwiązaniem zagadnienia początkowego (6) i definiujących tym samym powiązanie włókien wedle formuły (5), co następuje:

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p)(t) &= \mathsf{T}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\Phi\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{\gamma}_p(t)\big)=\mathsf{T}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\Phi\circ\mathrm{Hor}^{(1)}_{\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\dot\gamma(t)\big)\\ &= \mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p(t)}\circ\mathsf{T}_{\gamma(t)}f\big(\dot\gamma(t)\big)=\mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p(t)}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(f\circ\gamma)(t)\big)\,.\end{aligned}$$

Z drugiej strony wprost na mocy definicji podniesienia poziomego ścieżki ($f\circ\gamma$ w B_2 przez $f(x)\equiv f\circ\gamma(0)$ do $\Phi(p)$) zachodzi równość

$$\mathrm{Hor}^{(2)}_{\Phi(\widetilde{\gamma}_p(t))}\big(\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(f\circ\gamma)(t)\big)=\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(\widetilde{\gamma}_p(0))}(t)\equiv\tfrac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)}(t)\,,$$

ewidentnie więc – wobec tożsamości punktów początkowych, $\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)}(0)=\Phi(p)=\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p(0)$, oraz wektorów stycznych, a na gruncie twierdzenia o jedyności krzywej całkowej pola wektorowego przechodzącej przez dany punkt jego dziedziny – zachodzi równość

$$\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)}=\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p\,,$$

która w dowolnym punkcie $p\in E_1$ implikuje pożądaną relację

$$\big(\Phi\circ\mathsf{P}^{(1)\,\gamma}_{0,t}\big)(p)\equiv\Phi\circ\widetilde{\gamma}_p(t)=\widetilde{(f\circ\gamma)}_{\Phi(p)}(t)\equiv\mathsf{P}^{(2)\,f\circ\gamma}_{0,t}\big(\Phi(p)\big)=\big(\mathsf{P}^{(2)\,f\circ\gamma}_{0,t}\circ\Phi\big)(p)\,.$$

$(FCM3)\Rightarrow(FCM2)$ Skoro $\mathsf{H}E_\alpha\equiv\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_\alpha$, $\alpha\in\{1,2\}$, to wystarczy wykazać, że

$$\mathsf{T}\Phi(\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_1)\subset\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_2\,,$$

to jednak wynika wprost z ciągu relacji

$$\mathsf{A}_2\big(\mathsf{T}\Phi(\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_1)\big)=\mathsf{T}\Phi\big(\mathsf{A}_1(\mathrm{Ker}\,\mathsf{A}_1)\big)=\mathsf{T}\Phi\big(\{\mathbf{0}_{\mathsf{T}E_1}\}\big)=\{\mathbf{0}_{\mathsf{T}E_2}\}\,.$$

□