GR II W CZASACH ZARAZY
W 8 STRON OD TEORII GRUP DO TEORII KATEGORII

Zaczniemy od przeformułowania opisu pojęcia grupy. Oto w sposób nieco sztuczny przedstawimy grupę G jako zbiór bijekcji singletonu (zbioru jednoelementowego) $\{\bullet\}$ „udekorowanych" elementami grupy $g \in \mathrm{G}$. Taką oczywistą nadmiarowości w zbiorze odwzorowań singletonu w siebie możemy traktować jako sposób na zapisanie informacji o ukrytej wewnętrznej strukturze *obiektu* $\bullet$, której nie określamy w żaden inny (bezpośredni) sposób. W tym obrazku G stanowi (albo indeksuje) kompletny zbiór odwzorowań uzgodnionych z ukrytą strukturą obiektu $\bullet$, tj. strukturę tę respektujących (i w tym sensie „zachowujących" obiekt $\bullet$), więc *dozwolonych* z punktu widzenia naszych rozważań. Istnienie operacji binarnej na G możemy zrozumieć jako prawo orzekające, że superpozycja odwzorowań dozwolonych jest także odwzorowaniem dozwolonym, a łączność operacji binarnej tłumaczy się na łączność tejże dobrze określonej superpozycji. Pośród odwzorowań dozwolonych istnieje jedno odwzorowanie wyróżnione, które odpowiada trywialnej bijekcji obiektu $\bullet$ i z tej przyczyny stanowiące nie zmieniające żadnego innego odwzorowania dozwolonego po przyłożeniu go przed tym odwzorowaniem lub po nim – tym odwzorowaniem jest bijekcja indeksowana elementem neutralnym $e \in \mathrm{G}$. Wreszcie też każdemu odwzorowaniu odpowiada odwzorowanie *odwrotne*, tj. takie, którego superpozycja z wyjściowym daje poprzednio omówione odwzorowanie trywialne. Jego istnienie zapewnia operacja unarna $\mathrm{Inv} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$.

Z naszej dotychczasowej dyskusji wyłania się już pewna (z konieczności dość banalna w swej zawartości) struktura, dostarczająca równoważnego przeformułowania opisu grupy, które poddaje się dalekosiężnemu uogólnieniu. Mamy więc do czynienia z dwoma zbiorami: **zbiorem obiektów** $\mathrm{Ob}\,\mathrm{G} \equiv \{\bullet\}$ i zbiorem dozwolonych odwzorowań między nimi, który będziemy określać mianem **zbioru morfizmów** $\mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \cong \mathrm{G}$ i przedstawiać jako zbiór strzałek „udekorowanych" elementami grupy,

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "g"] \end{tikzcd}$$

Każde z odwzorowań ma swoją dziedzinę, z której wychodzi stowarzyszona z nim strzałka i którą w dalszej części wywodu będziemy nazywać **początkiem morfizmu**,

$$s : \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathrm{G} : \xleftarrow{g} \longmapsto \bullet ,$$

oraz przeciwdziedzinę, do której strzałka sięga i którą będziemy nazywać **końcem morfizmu**,

$$t : \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathrm{G} : \xleftarrow{g} \longmapsto \bullet .$$

Na zbiorze $\mathrm{Mor}\,\mathrm{G}\,{}_s\!\times_t \mathrm{Mor}\,\mathrm{G}$ par strzałek składalnych, tj. takich, u których koniec poprzednika pokrywa się z początkiem następnika (w naszym przypadku są to wszystkie strzałki), określona jest łączna operacja **złożenia** (**superpozycji**)

$$\circ : \mathrm{Mor}\,\mathrm{G}\,{}_s\!\times_t \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} : \left(\xleftarrow{h} , \xleftarrow{g} \right) \longmapsto \xleftarrow{h \cdot g}$$

o oczywistych (u nas wręcz trywialnych) własnościach

$$s\left(\xleftarrow{h} \circ \xleftarrow{g} \right) = s\left(\xleftarrow{g} \right) , \qquad t\left(\xleftarrow{h} \circ \xleftarrow{g} \right) = t\left(\xleftarrow{h} \right) .$$

Na zbiorze obiektów określamy odwzorowanie

$$\mathrm{Id.} : \mathrm{Ob}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} : \bullet \longmapsto \xleftarrow{e} ,$$

które przypisuje obiektowi **morfizm identycznościowy** o własnościach

$$s \circ \mathrm{Id.} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ob}\,\mathrm{G}} = t \circ \mathrm{Id.} ,$$

$$\xleftarrow{g} \circ \mathrm{Id}_{s\left(\xleftarrow{g} \right)} = \xleftarrow{g} = \mathrm{Id}_{t\left(\xleftarrow{g} \right)} \circ \xleftarrow{g} .$$

Odwracalność wszystkich morfizmów (strzałek) jest równoznaczna z istnieniem odwzorowania

$$\mathrm{Inv} \;:\; \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \;:\; \xleftarrow{\;g\;} \;\longmapsto\; \xrightarrow{\;g\;} \;\equiv\; \xleftarrow{\;g^{-1}\;}$$

o własnościach

$$s \circ \mathrm{Inv} = t\,, \qquad\qquad t \circ \mathrm{Inv} = s\,,$$

$$\xleftarrow{\;g\;} \circ \mathrm{Inv}\big(\xleftarrow{\;g\;}\big) = \mathrm{Id}_{t(\xleftarrow{\;g\;})}\,,$$

$$\mathrm{Inv}\big(\xleftarrow{\;g\;}\big) \circ \xleftarrow{\;g\;} = \mathrm{Id}_{s(\xleftarrow{\;g\;})}\,.$$

Zanim przejdziemy do dyskusji realizacji grupy, zaadaptujemy nowy formalizm do opisu struktury nieco mniej sztywnej niż rozpatrywana dotąd struktura grupy, a mianowicie: monoidu $\mathbf{Map}(X,X)$ odwzorowań (ustalonego) zbioru X w siebie. Struktura ta doskonale, a przy tym całkowicie naturalnie ilustruje ideę modelowania wewnętrznej struktury obiektu (jakim w tym przypadku jest sam zbiór X) w mnogości dozwolonych morfizmów. Mamy tu zatem do czynienia z jednoelementowym zbiorem obiektów

$$\mathrm{Ob}\,\mathbf{Map}(X,X) = \{X\}\,,$$

zbiorem morfizmów zaś – w pełnej analogii do sytuacji wcześniejszej – jest zbiór strzałek udekorowanych odwzorowaniami $f \in \mathbf{Map}(X,X)$. Reszta dyskusji przebiega analogicznie jak w przypadku grupy G, z tą wszelako istotną różnicą, że tym razem opuszczamy wymóg odwracalności morfizmów.

Dokonawszy powyższej – może nieco dziwacznej na pierwszy rzut oka, ale też – jak się okaże – nader pożytecznej – formalizacji struktury grupy i wyróżnionego monoidu $\mathbf{Map}(X,X)$, możemy poddać analogicznemu zabiegowi strukturę realizacji R (tj. działania) grupy G na zbiorze X. Realizacja taka jest homomorfizmem monoidu definiowanego przez G (poprzez „zapomnienie" o odwracalności wszystkich elementów) w monoid[1] $\mathbf{Map}(X,X)$.

W wypracowanym wcześniej języku, stwierdzamy więc istnienie odwzorowania o **składowych**: **obiektowej**

$$R \;:\; \mathrm{Ob}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Map}(X,X) \;:\; \bullet \longmapsto X$$

i **morfizmowej** (zwyczajowo oznaczanej tym samym symbolem)

$$R \;:\; \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Map}(X,X) \;:\; \xleftarrow{\;g\;} \;\longmapsto\; \xleftarrow{\;R(g)\;}$$

o własnościach (zapisanych w konwencji zgodnej z tym zwyczajem)

$$s^{\mathbf{Map}(X,X)} \circ R = R \circ s^{\mathrm{G}}\,, \qquad\qquad t^{\mathbf{Map}(X,X)} \circ R = R \circ t^{\mathrm{G}}$$

oraz

$$R\big(\xleftarrow{\;h\;} \circ_{\mathrm{G}} \xleftarrow{\;g\;}\big) = R\big(\xleftarrow{\;h\;}\big) \circ_{\mathbf{Map}(X,X)} R\big(\xleftarrow{\;g\;}\big)\,,$$

$$R \circ \mathrm{Id}^{\mathrm{G}}_{\cdot} = \mathrm{Id}^{\mathbf{Map}(X,X)}_{\cdot} \circ R\,.$$

Na najniższym szczeblu hierarchii struktur algebraicznych stowarzyszonych z pojęciem grupy i jej działania na wybranym zbiorze znajdujemy odwzorowania G-ekwiwariantne splatające realizacje R_1 i R_2, które w rozbudowanym tu formalizmie możemy (znów w sposób nieco nadmiarowy) przedstawić jako indeksowane przez zbiór $\mathrm{Ob}\,\mathrm{G}$ rodziny morfizmów

$$\eta_{\cdot} \;:\; \mathrm{Ob}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Map}(X,X) \;:\; \bullet \longmapsto \eta_\bullet$$

o **składowych** (tutaj w liczbie 1)

$$\eta_\bullet \;:\; R_1(\bullet) \to R_2(\bullet)\,,$$

[1]Obraz G leży w grupie symetrycznej $\mathfrak{S}_X$, jednak to uściślenie pozbawiłoby nasze rozumowanie nieodzownej ogólności.

na które został nałożony definiujący warunek G-ekwiwariantności

$$\forall_{\,\xleftarrow{g} \in \mathrm{Mor}\,\mathrm{G}} \;:\; \eta_{t(\xleftarrow{g})} \circ R_1\big(\xleftarrow{g}\big) = R_2\big(\xleftarrow{g}\big) \circ \eta_{s(\xleftarrow{g})} \,.$$

Sformułowany przez nas schemat opisu struktur grupy i zbioru z jej działaniem poddaje się następującym istotnym i przez to interesującym ogólnieniom:

- Dopuszczenie dowolnej liczby obiektów we wcześniejszym opisie grupy (co prowadzi do wyodrębnienia podzbioru właściwego par morfizmów składalnych w kwadracie kartezjańskim zbioru morfizmów) przy zachowaniu odwracalności wszystkich morfizmów daje **grupoid**.
- Rezygnacja z odwracalności morfizmów (czyli cofnięcie się do poziomu monoidu) prowadzi do ogólnej **małej kategorii**.
- Jeśli dodatkowo dopuścić tę ewentualność, że obiekty lub morfizmy nie tworzą zbioru, lecz klasę właściwą (tj. mnogość nie będącą zbiorem a określaną przez wspólną cechę elementów, jak np. klasa wszystkich zbiorów określana przez cechę „bycie zbiorem"), to mamy do czynienia także z **dużymi kategoriami**, przy czym wyróżniamy takie, u których klasy morfizmów są zbiorami, nazywając je **lokalnie małymi**.
- Odwzorowanie między kategoriami spełniające warunki wypisane dla realizacji grupy to **funktor kowariantny** $F : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$. Jeśli warunki te zastąpimy układem

  $$s^2 \circ F = F \circ t^1 \,, \qquad\qquad t^2 \circ F = F \circ s^1 \,,$$

  $$F(\chi_2 \circ_1 \chi_1) = F(\chi_1) \circ_2 F(\chi_2) \,,$$

  $$F \circ \mathrm{Id}^1_{\cdot} = \mathrm{Id}^2_{\cdot} \circ F \,,$$

  to otrzymamy definicję **funktora kontrawariantnego**. Ilekroć składowa morfizmowa funktora jest injekcją w ograniczeniu do każdej klasy $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X,Y)$, mówimy o **funktorze wiernym**, kiedy natomiast jej ograniczenia są surjekcjami, funktor nazywamy **pełnym**. Przy spełnieniu obu warunków funktor określamy mianem **w pełni wiernego**. Szczególnymi i szczególnie ważnymi przykładami funktorów są **funktory** $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ dla ustalonej lokalnie małej kategorii $\mathcal{C}$: **kowariantny**

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot) \;:\; \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \,,$$

  określony dla dowolnego $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, o składowej obiektowej

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot) \;:\; \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set} \;:\; Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

  i morfizmowej

  $$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot) \quad &: \quad \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set} \\ &: \quad \big(\, Y \xrightarrow{\chi} Z \,\big) \longmapsto \big(\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{\chi\circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \,\big) \end{aligned}$$

  oraz **kontrawariantny**

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot,X) \;:\; \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \,,$$

  określony analogicznie jak wyżej, o składowej obiektowej

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot,X) \;:\; \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set} \;:\; Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

  i morfizmowej

  $$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot,X) \quad &: \quad \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set} \\ &: \quad \big(\, Y \xrightarrow{\chi} Z \,\big) \longmapsto \big(\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \xrightarrow{\circ\chi} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \,\big) \,. \end{aligned}$$

- Wreszcie też rodzinę odwzorowań w rodzaju tych przypisanych splataczowi realizacji R_1 i R_2 nazywamy **transformacją naturalną**, a kiedy każdy z morfizmów składowych jest odwracalny, mówimy o **izomorfizmie naturalnym** (**funktorów**), bądź **równoważności naturalnej**. Warunek naturalności dla funktorów kowariantnych jest więc postaci

(1) $$\forall_{\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X,Y)}\ :\ \eta_Y\circ_2 F(\chi)=G(\chi)\circ_2\eta_X\,.$$

W przypadku funktorów kontrawariantnych należy dokonać stosownej korekty relacji definicji transformacji naturalnej, kładąc

$$\forall_{\chi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X,Y)}\ :\ \eta_X\circ_2 F(\chi)=G(\chi)\circ_2\eta_Y\,.$$

Elementarnym, lecz istotnym wynikiem strukturalnym teorii grup, eksponującym pierwszorzędne znaczenie grup symetrycznych w tej teorii, jest Twierdzenie Cayleya, które orzeka, że każda grupa jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy symetrycznej $\mathfrak{S}_X$ pewnego zbioru X, czyli może być zrealizowana jako podzbiór zbioru bijekcji X w siebie, z ograniczonym doń składaniem odwzorowań w roli operacji binarnej (tj. działania grupowego). Dokonamy teraz transkrypcji klasycznego konstruktywnego dowodu tego twierdzenia w rozwijanym przez nas konsekwentnie formalizmie kategorialnym, co pozwoli wysłowić twierdzenie w sposób poddający się naturalnemu uogólnieniu. Takie uogólnienie będzie następnie przedmiotem naszych dalszych dociekań.

Przypomnijmy: we wspomnianym wyżej dowodzie jako zbiór X wybieramy samą grupę G (innymi słowy, aplikujemy do niej **funktor zapominania** $\mathbf{Grp}\longrightarrow\mathbf{Set}$ z kategorii grup w kategorię zbiorów), wyróżniając zarazem te spośród jej bijekcji w siebie, które pochodzą od lewego regularnego działania grupy na sobie,

$$\ell.\ :\ \mathrm{G}\times X\to X\ :\ (g,h)\longmapsto g\cdot h\,,$$

czyli rozważamy podzbiór

$$\Lambda_{\mathrm{G}}:=\{\ \ell_g\ |\ g\in\mathrm{G}\ \}\subset\mathfrak{S}_X\,,$$

jawnie izomorficzny (czyli będący w bijekcji) ze zbiorem G i zamknięty ze względu na składanie odwzorowań,

$$\Lambda_{\mathrm{G}}\times\Lambda_{\mathrm{G}}\ni(\ell_{g_2},\ell_{g_1})\longmapsto\ell_{g_2}\circ\ell_{g_1}\equiv\ell_{g_2\cdot g_1}\in\Lambda_{\mathrm{G}}\,,$$

które realizują wiernie strukturę grupy, przez co należy rozumieć, że odwzorowanie

$$\widetilde{\ell.}\ :\ \mathrm{G}\longrightarrow\mathfrak{S}_X\ :\ g\longmapsto\ell_g\,,$$

indukowane przez $\ell.$, jest monomorfizmem grup, więc też

$$(\mathrm{G},\cdot,\mathrm{Inv},\bullet\longmapsto e)\cong\big(\Lambda_{\mathrm{G}},\circ\restriction_{\Lambda_{\mathrm{G}}^{\times 2}},\mathrm{Inv}^*,\bullet\longmapsto\ell_e\big)\subset(\mathfrak{S}_X,\circ,(\cdot)^{-1},\bullet\longmapsto\mathrm{id}_X)\,,$$

przy czym wskazany tu obraz odwzorowania $\widetilde{\ell.}$ jest podgrupą $\mathfrak{S}_X$, o której mowa w tezie twierdzenia. Należy przy tym zauważyć, że wykorzystane tutaj działanie lewe regularne G na sobie jest przemienne z prawymi translacjami na G o dowolny element grupy, czyli z działaniem prawym regularnym

$$\wp.\ :\ X\times\mathrm{G}\to X\ :\ (h,g)\longmapsto h\cdot g\,,$$

czyli słuszne jest stwierdzenie

(2) $$\forall_{g,h\in\mathrm{G}}\ :\ \ell_g\circ\wp_h=\wp_h\circ\ell_g\,,$$

będące konsekwencją łączności działania grupowego. Warto podkreślić, że powyższa własność odwzorowań $\wp_h\in\mathbf{Map}(X,X)$ jest dla nich definiująca, tzn. każde odwzorowanie $\gamma\in\mathbf{Map}(X,X)$ przemienne z działaniem lewym regularnym jest prawą translacją o pewien element grupy. W rzeczy samej, warunek

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ \ell_g\circ\gamma=\gamma\circ\ell_g$$

implikuje równość

$$\forall_{g\in\mathrm{G}}\ :\ g\cdot\gamma(e)=\gamma(g\cdot e)\equiv\gamma(g)\,,$$

która prowadzi do identyfikacji

$$\gamma = \wp_{\gamma(e)}\,. \tag{3}$$

Okazuje się, że całą opisaną tu strukturę można zwięźle wysłowić, jak następuje: Morfizm $\widetilde{\ell.}$ określa kontrawariantne funktorialne zanurzenie (czyli funktor w pełni wierny z) kategorii G, wprowadzonej wcześniej, w kategorię $\mathbf{Set}^{\mathrm{G}}$ (kowariantnych) funktorów[2] z kategorii G w kategorię $\mathbf{Set}$ zbiorów. W szczególności funktorialny obraz kategorii G w $\mathbf{Set}^{\mathrm{G}}$, jakim jest pełna podkategoria Λ_{G}, jest kanonicznie izomorficzny z wyjściową kategorią G. Istotnie, odwzorowanie $\widetilde{\ell.}$ stowarzysza z jedynym obiektem $\bullet$ kategorii G kowariantny funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\bullet,\cdot) \equiv \ell.\ :\ \mathrm{G} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

o składowej obiektowej

$$\ell.\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}\ :\ \bullet \longmapsto X(\equiv \mathrm{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\bullet,\bullet)$$

i składowej morfizmowej

$$\ell.\ :\ \mathrm{Mor}\,\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set}\ :\ \xleftarrow{g} \longmapsto \ell_g = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\bullet, \xleftarrow{g}\big)\,,$$

przy czym ostatnie przyporządkowanie ma sens, gdyż $\ell_g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\big(\ell.(\bullet).\ell.(\bullet)\big) \equiv \mathbf{Map}(X,X)$. Funktorialność $\ell.$ sprowadza się do stwierdzonych wcześniej strukturalnych własności odwzorowania $\ell.$, tj.

$$\ell.(\mathrm{Id}^{\mathrm{G}}_{\bullet}) = \mathrm{Id}^{\mathbf{Set}}_{\ell.(\bullet)} \iff \ell_e = \mathrm{id}_X\,,$$

$$\ell.\big(\xleftarrow{g_2} \circ_{\mathrm{G}} \xleftarrow{g_1}\big) = \ell.\big(\xleftarrow{g_2}\big) \circ_{\mathbf{Set}} \ell.\big(\xleftarrow{g_1}\big) \iff \ell_{g_2\cdot g_1} = \ell_{g_2} \circ \ell_{g_1}\,.$$

Wreszcie też $\widetilde{\ell.}$ pozwala przyporządkować dowolnemu morfizmowi $\xleftarrow{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\bullet,\bullet)(\equiv \mathrm{Mor}\,\mathrm{G})$ transformację naturalną

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\xleftarrow{g},\cdot\big)\ :\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(t(\xleftarrow{g}),\cdot\big) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(s(\xleftarrow{g}),\cdot\big)\,,$$

czyli indeksowaną przez $\mathrm{Ob}\,\mathrm{G} = \{\bullet\}$ rodzinę morfizmów o jedynym elemencie

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\xleftarrow{g},\bullet\big) &\equiv \wp_g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(t(\xleftarrow{g}),\bullet\big),\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(s(\xleftarrow{g}),\bullet\big)\Big)\\ &\equiv \mathbf{Map}(X,X)\end{aligned}$$

o własności

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\xleftarrow{g}, t(\xleftarrow{h})\big) \circ_{\mathbf{Set}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(t(\xleftarrow{g}), \xleftarrow{h}\big)\\ =\ &\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(s(\xleftarrow{g}), \xleftarrow{h}\big) \circ_{\mathbf{Set}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\xleftarrow{g}, s(\xleftarrow{h})\big)\,,\end{aligned}$$

zapisanej dla dowolnego $\xleftarrow{h} \in \mathrm{Mor}\,\mathrm{G}$, a wyrażającej stwierdzoną uprzednio własność (2). Podkreślmy, że kontrawariantny charakter opisanego tu funktora $\mathrm{G} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathrm{G}}$ niesie informację o prawym charakterze działania prawego regularnego grupy G na sobie, oto bowiem zapis

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\xleftarrow{g_2} \circ_{\mathrm{G}} \xleftarrow{g_1},\cdot\big) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\xleftarrow{g_1},\cdot\big) \circ_{\mathbf{Set}^{\mathrm{G}}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\big(\xleftarrow{g_2},\cdot\big)$$

oznacza w istocie tożsamość

$$\wp_{g_2\cdot g_1} = \wp_{g_1} \circ \wp_{g_2}\,.$$

Na koniec zauważmy, że jest to, zgodnie z wypowiedzianą wcześniej tezą, funktor w pełni wierny, albowiem dla jedynej pary obiektów jego dziedziny, $(\bullet,\bullet)$, zadawane przezeń przyporządkowanie (podkreślenie pierwszego „wolnego" miejsca oznacza, że to właśnie miejsce przyjmuje argument z dziedziny)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\bullet,\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{G}}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\bullet,\cdot),\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\bullet,\cdot)\big)$$

jest omówioną wcześniej bijekcją $\wp.: \mathrm{G} \xrightarrow{\cong} \mathbf{Map}(X,X) : g \longmapsto \wp_g$, patrz: (3).

[2]Morfizmami w kategorii, której obiektami są funktory pomiędzy dwiema ustalonymi kategoriami, są transformacje naturalne pomiędzy owymi funktorami.

Dokonane tutaj abstrakcyjne przeformułowanie Twierdzenia Cayleya w języku teorii kategorii stawia nas przed oczywistym pytaniem: Czy twierdzenie to jest przejawem szczególnego statusu $\mathbf{G}$ pośród kategorii, czy też raczej jest ono emanacją ogólniejszego prawa, któremu podlegają wszystkie kategorie lokalnie małe? (Wymóg lokalnej małości staje się koniecznością, kiedy staramy się odwzorować klasy morfizmów pomiędzy dowolnymi parami obiektów wyjściowej kategorii *bijektywnie* w klasy transformacji naturalnych między funktorialnymi obrazami tychże obiektów.) Bardzo ogólnej odpowiedzi na tak postawione pytanie dostarcza

Twierdzenie 1 (Lemat Yonedy)**.** Niechaj $\mathcal{C}$ będzie dowolną kategorią lokalnie małą, a X – dowolnym jej obiektem i niech $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ będzie dowolnym funktorem kowariantnym[3]. Wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm (bijekcja) pomiędzy zbiorem $\mathrm{Nat}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),F\big)$ transformacji naturalnych między funktorami $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)$ i F a elementami zbioru $F(X)$,

$$\mathrm{Nat}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),F\big) \cong F(X)\,.$$

Dowód: Punktem wyjścia do konstruktywnego dowodu istnienia bijekcji, o której mowa w treści twierdzenia, jest następująca obserwacja: Oto dowolna transformacja naturalna $\eta_\cdot \in \mathrm{Nat}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),F\big)$ jest w pełni określona przez element

$$\xi_X^{\eta_\cdot} := \eta_X(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) \in F(X)$$

zbioru będącego funktorialnym obrazem wyróżnionego obiektu $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. W rzeczy samej, warunek (1) naturalności $\eta_\cdot$ implikuje tożsamość

$$\eta_Y(\chi) \equiv \eta_Y(\chi \circ \mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = \big(\eta_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\chi)\big)(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = \big(F(\chi) \circ \eta_X\big)(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\chi)(\xi_X^{\eta_\cdot})\,,$$

słuszną dla dowolnego morfizmu $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ o początku w dowolnym obiekcie $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, a pokazującą dowodnie, że znajomość $\xi_X^{\eta_\cdot}$ pozwala wyznaczyć wszystkie elementy rodziny $\{\eta_Y\}_{Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$. Odwzorowanie

$$\xi_X^{\cdot} \;:\; \mathrm{Nat}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),F\big) \to F(X) \;:\; \eta \longmapsto \xi_X^{\eta_\cdot}$$

to właśnie szukana bijekcja. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy wskazać odwzorowanie odwrotne. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\eta_\cdot^{\cdot} \;:\; F(X) \to \mathrm{Nat}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),F\big) \;:\; \xi \longmapsto \eta_\cdot^{\xi}$$

wzorem

$$\eta_Y^{\xi}(\chi) := F(\chi)(\xi)\,.$$

Podana definicja ma sens, gdyż dla dowolnego morfizmu $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ zachodzi

$$\begin{aligned}\big(\eta_Z^{\xi} \circ_{\mathbf{Set}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\psi)\big)(\chi) &= \eta_Z^{\xi}(\psi \circ_{\mathcal{C}} \chi) = F(\psi \circ_{\mathcal{C}} \chi)(\xi) = \big(F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} F(\chi)\big)(\xi)\\ &= F(\psi)\big(F(\chi)(\xi)\big) = \big(F(\psi) \circ_{\mathbf{Set}} \eta_Y^{\xi}\big)(\chi)\,,\end{aligned}$$

czyli – w istocie – $\eta_\cdot^{\xi}$ jest transformacją naturalną między $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)$ a F. Pokażemy, że $\eta_\cdot^{\cdot}$ jest poszukiwaną odwrotnością odwzorowania $\xi_X^{\cdot}$. W tym celu wyznaczamy transformację naturalną przyporządkowaną przez $\eta_\cdot^{\cdot}$ elementowi $\xi_X^{\eta_\cdot}$,

$$\eta_Y^{\xi_X^{\eta_\cdot}}(\chi) = F(\chi)(\xi_X^{\eta_\cdot}) = \eta_Y(\chi)\,,$$

uzyskując pożądany wynik

$$\eta_Y^{\xi_X^{\eta_\cdot}} = \eta_Y\,,$$

a następnie wskazujemy element zbioru $F(X)$ będący obrazem transformacji naturalnej $\eta_\cdot^{\xi}$ względem odwzorowania $\xi_X^{\cdot}$,

$$\xi_X^{\eta_\cdot^{\xi}} = \eta_X^{\xi}(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}}) = F(\mathrm{Id}_X^{\mathcal{C}})(\xi) = \mathrm{Id}_{F(X)}^{\mathbf{Set}}(\xi) \equiv \mathrm{id}_{F(X)}(\xi) = \xi\,,$$

co kończy dowód postulowanej relacji między $\eta_\cdot^{\cdot}$ i $\xi_X^{\cdot}$, a tym samym także dowód twierdzenia. □

[3]Istnieje także wersja kontrawariantna Lematu Yonedy, którą Czytelnik bez trudu wymyśli sam.

Bezpośredniego uogólnienia teoriogrupowego Twierdzenia Cayleya dostarcza poniższe elementarne corollarium Lematu Yonedy.

Stwierdzenie 1 (Zanurzenie Yonedy)**.** W oznaczeniach Twierdzenia 1 kontrawariantny funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathcal{C}\longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$$

jest w pełni wierny, przeto określa zanurzenie kategorii $\mathcal{C}$ w kategorii $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, którego obrazem jest pełna podkategoria tej ostatniej o zbiorze obiektów $\{\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)\ |\ X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\ \}$, izomorficzna z kategorią $\mathcal{C}$.

<u>*Dowód:*</u> Odnosząc tezę Lematu Yonedy do funktora $F:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\cdot)$, stwierdzamy istnienie bijekcji

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Nat}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot),\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\cdot)\big)\ :\ \chi\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\chi,\cdot)\,,$$

co oznacza właśnie, że funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\cdot},\cdot)$ jest w pełni wierny. Tym samym kontrawariantny funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathcal{C}\longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}\,,$$

o składowej obiektowej

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\cdot},\cdot)\ :\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}\ :\ X\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)$$

i morfizmowej

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\cdot},\cdot)\quad &:\quad \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}\longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}\\ &:\quad \big(\ X\xrightarrow{\ \chi\ }Y\ \big)\longmapsto\big(\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\cdot)\xRightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\chi,\cdot)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)\ \big)\end{aligned}$$

zadaje zanurzenie kategorii $\mathcal{C}$ w kategorii funktorów $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, zwane **zanurzeniem Yonedy**. □

Lematu Yonedy i wynikającego zeń stwierdzenie o zanurzeniu stanowią doskonałą ilustrację najgłębszej idei, jaka tkwi u podstaw teorii kategorii, sformułowanej – nie bez kozery – w pierwszej połowie XX w., tj. w czasach fenomenalnej eksplozji myślenia abstrakcyjnego w naukach przyrodnicznych na wszystkich skalach dostępnych poznaniu – od skali atomowej po skalę kosmiczną. Ich zawartość „filozoficzna" powinna być bliska sercu i umysłowi każdego fizyka, oto bowiem jedynym dostępnym nam sposobem empirycznego poznania elementarnych składników materii są obserwacje ich oddziaływań z innymi składnikami materii. Najbardziej bodaj zwięzłej i obrazowej wulgaryzacji socjologicznej tych twierdzeń dostarcza stare rosyjskie (?) powiedzenie

Powiedz mi, kto jest twoim przyjacielem, a powiem ci, kim jesteś.