GR II W CZASACH ZARAZY
NIEZBĘDNIK ROZMAITOŚCI

Wykorzystamy funktor styczny w klasyfikacji odwzorowań między rozmaitościami różniczkowalnymi, poznając przy tej okazji kilka standardowych metod ich konstrukcji.

Definicja 1. Odwzorowanie $f \in C^1(M_1, M_2)$ między dwiema rozmaitościami gładkimi $(M_\alpha, \widehat{\mathscr{A}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ nazywamy

- **immersywnym w punkcie** $x \in M_1$, jeśli odwzorowanie styczne $\mathsf{T}_x f$ jest injektywne, tj. $\ker \mathsf{T}_x f = \{0\}$;
- **submersywnym w punkcie** $x \in M_1$, jeśli odwzorowanie styczne $\mathsf{T}_x f$ jest surjektywne, tj. $\operatorname{im} \mathsf{T}_x f = \mathsf{T}_{f(x)} M_2$;

Ilekroć odwzorowanie f jest immersywne (wzgl. submersywne) w każdym punkcie swej dziedziny, określamy je mianem **immersji** lub **zanurzenia** (wzgl. **submersji**). Immersja będąca homeomorfizmem na obraz to **włożenie**.

W przyjętym przez nas schemacie interpretacyjnym immersje i submersje jawią się jako geometryzacje znanych dobrze pojęć z algebry liniowej: monomorfizmu i – odpowiednio – epimorfizmu przestrzeni wektorowych. Oczywisty związek między wektorami stycznymi w punkcie rozmaitości i lokalnymi układami współrzędnych w jego otoczeniu w połączeniu z twierdzeniem o postaci kanonicznej odwzorowania liniowego prowadzi do stwierdzeń o kanonicznej postaci odwzorowania immersywnego (wzgl. submersywnego) w danym punkcie, które przedstawiamy poniżej. Zaczniemy od odwzorowań immersywnych.

Stwierdzenie 1 (Twierdzenie o lokalnej immersji)**.** Niechaj $(M_\alpha, \widehat{\mathscr{A}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą rozmaitościami o wymiarach $\dim M_\alpha =: n_\alpha$, $n_2 \geq n_1$ i niech $f \in C^1(M_1, M_2)$ będzie odwzorowaniem immersywnym w punkcie $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ dla pewnego $y \in M_2$. Wówczas istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni y$ oraz lokalne mapy $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \mathbb{R}^{\times n_\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$ o własnościach

$$\kappa_1(x) = 0\,, \qquad \kappa_2(y) = 0 \tag{1}$$

oraz

$$f(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2\,, \tag{2}$$

w których lokalna prezentacja odwzorowania f przyjmuje postać

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \imath_{1,2,\ldots,n_1} \restriction_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)}\,,$$

gdzie odwzorowanie $\imath_{1,2,\ldots,n_1}$ jest **immersją kanoniczną**

$$\imath_{1,2,\ldots,n_1} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrowtail \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \longmapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, 0, 0, \ldots, 0)\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Rozważmy lokalną prezentację f względem dowolnych map $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_\alpha}$ określonych na pewnych otoczeniach $\mathcal{U}_1 \ni x$ i $\mathcal{U}_2 \ni y$, przy czym dokonując – jeśli trzeba – ich trywialnej modyfikacji (translacja wartości o stałą) możemy zawsze wycentrować oba układy współrzędnych na – odpowiednio – $\psi_1(x)$ i $\psi_2(y)$. Przy tym jeśli warunek $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$ nie jest spełniony, wystarczy zastąpić mapę ψ_1 podmapą $\psi_1 \restriction_{\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)}$, o dziedzinie $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2) =: \mathcal{U}_1^f$. Wprowadźmy oznaczenie $\widehat{f} := \psi_2 \circ f \circ \left(\psi_1 \restriction_{\mathcal{U}_1^f}\right)^{-1}$. Skoro $\mathsf{T}_0 \widehat{f}$ jest injekcją, możemy wybrać bazy $\mathscr{B}_\alpha$ w $\mathbb{R}^{\times n_\alpha} \equiv \mathsf{T}_0 \mathbb{R}^{\times n_\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$ tak, by macierz odwzorowania $\mathsf{T}_0 \widehat{f}$ względem tych baz miała postać

$$[\mathsf{T}_0 \widehat{f}]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{(n_2 - n_1) \times n_1} \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$G : \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{\times n_2 - n_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_2} : (v, w) \longmapsto \widehat{f}(v) + (0, w)\,,$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać $\mathsf{T}_0 G = \mathbf{1}_{n_2}$, w szczególności więc jest odwracalne. Na mocy twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań G jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $\mathcal{U} \in \mathscr{T}\big(\psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{\times n_2 - n_1}\big)$ punktu 0 na otoczenie $\mathcal{V}$ tegoż punktu w $\mathbb{R}^{\times n_2}$. Zauważmy jednak, że

$$\widehat{f}\restriction_{\imath_{1,2,\ldots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = G \circ \imath_{1,2,\ldots,n_1} \restriction_{\imath_{1,2,\ldots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} ,$$

co wobec lokalnej odwracalności G możemy przepisać jako

$$\Big(\big(G\restriction_{\mathcal{U}}\big)^{-1} \circ \psi_2\Big) \circ f \circ \psi_1^{-1} \restriction_{\imath_{1,2,\ldots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = \imath_{1,2,\ldots,n_1} \restriction_{\imath_{1,2,\ldots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} .$$

Mapy $\kappa_1 := \psi_1 \restriction_{\psi_1^{-1} \circ \imath_{1,2,\ldots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})}$ oraz $\kappa_2 := \big(G\restriction_{\mathcal{U}}\big)^{-1} \circ \psi_2 \restriction_{\psi_2^{-1}(\mathcal{V})}$ są tymi właśnie, o których mowa w tezie dowodzonego stwierdzenia. □

Odpowiednikiem powyższego dla odwzorowań submersywnych jest

Stwierdzenie 2 (Twierdzenie o lokalnej submersji)**.** Niechaj $(M_\alpha, \widehat{\mathscr{A}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą rozmaitościami gładkimi o wymiarach $\dim M_\alpha =: n_\alpha$, $n_2 \leq n_1$ i niech $f \in C^1(M_1, M_2)$ będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ dla pewnego $y \in M_2$. Wówczas istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni y$ oraz lokalne mapy $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_\alpha}$, $\alpha \in \{1,2\}$ o własnościach (1) i (2), w których lokalna prezentacja odwzorowania f przyjmuje postać

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \pi_{1,2,\ldots,n_2} \restriction_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)} ,$$

gdzie odwzorowanie $\pi_{1,2,\ldots,n_2}$ jest **submersją kanoniczną**

$$\pi_{1,2,\ldots,n_2} : \mathbb{R}^{n_1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}, \ldots, x_{n_1}) \longmapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}) .$$

Dowód: Postępując jak w dowodzie poprzedniego stwierdzenia, otrzymujemy surjektywne odwzorowanie $\mathsf{T}_0 \widehat{f}$, w przypadku którego możemy tak dobrać bazy $\mathscr{B}_\alpha$ w $\mathbb{R}^{\times n_\alpha}$, aby było

$$[\mathsf{T}_0 \widehat{f}]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1} = \big(\mathbf{1}_{n_2} | \mathbf{0}_{n_2 \times (n_1 - n_2)}\big) .$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} G \quad &: \quad \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_1} \\ &: \quad \widehat{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}, \ldots, x_{n_1}) \longmapsto \big(\widehat{f}(\widehat{x}), x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \ldots, x_{n_1}\big) , \end{aligned}$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać $\mathsf{T}_0 G = \mathbf{1}_{n_1}$, zatem – znów na mocy twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań – G jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $\mathcal{U} \in \mathscr{T}\big(\psi_1(\mathcal{U}_1^f)\big)$ punktu 0 na otoczenie $\mathcal{V}$ tegoż punktu w $\mathbb{R}^{\times n_1}$. Skoro zaś

$$\widehat{f} = \pi_{1,2,\ldots,n_2} \circ G ,$$

to wobec odwracalności $G\restriction_{\mathcal{U}}$ możemy zapisać

$$\psi_2 \circ f \circ \big(\psi_1^{-1} \circ (G\restriction_{\mathcal{U}})^{-1}\big) = \pi_{1,2,\ldots,n_2} \restriction_{\mathcal{V}} ,$$

otrzymując poszukiwane mapy $\kappa_1 := G \circ \psi_1 \restriction_{\psi_1^{-1}(\mathcal{U})}$ oraz $\kappa_2 := \psi_2$. □

Warto zwrócić uwagę, że zarówno obraz immersji kanonicznej, jak i dowolna poziomica submersji kanonicznej są podrozmaitościami w – odpowiednio – przeciwdziedzinie i dziedzinie odnośnego odwzorowania. To stwierdzenie traci słuszność w ogólnym przypadku (tj. w przypadku dowolnej immersji[1] wzgl. submersji), o czym łatwo jest się przekonać analizując immersje okręgu oraz prostej w $\mathbb{R}^{\times 2}$, których obrazem jest lemniskata, jak również poziomice rzutu w $\mathbb{R}^{\times 3}$ na pierwszą składową ograniczonego do torusa zanurzonego w $\mathbb{R}^{\times 3}$ tak, że leży on w sposób stabilny na płaszczyźnie $x_3 = 0$, a jego środek symetrii jest na osi $x_1 = 0 = x_2$. W dalszej części naszej dyskusji zajmiemy się zbadaniem warunków, jakie muszą być spełnione w każdym z wymienionych przypadków, aby

[1] Należy podkreślić, że źródłem obstrukcji może się okazać nie tylko nieinjektywny charakter odwzorowania, ale też brak ciągłości jego odwrotności w sytuacji, kiedy odwrotność istnieje.

obraz wzgl. przeciwobraz punktu (tudzież innej podrozmaitości) względem C^r-odwzorowania był podrozmaitością. W wyniku naszych dociekań nie tylko uzyskamy wygodne narzędzia konstrukcji nowych podrozmaitości, ale też – jak się okaże – otrzymamy przydatny opis *dowolnej* rozmaitości. Zaczynamy od immersji.

Twierdzenie 1. Niechaj $(M, \widehat{\mathscr{A}})$ będzie rozmaitością gładką. Podzbiór $S \subset M$ jest podrozmaitością klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on obrazem włożenia klasy C^∞.

<u>*Dowód:*</u>

- $\Rightarrow$ Każda podrozmaitość dziedziczy strukturę różniczkową z przestrzeni zanurzenia. Wprost na mocy definicji kanoniczna injekcja $S \hookrightarrow M$ jest włożeniem względem tej struktury różniczkowej (kanoniczną immersją na poziomie lokalnej prezentacji, identycznościowo wkładającą S w M).
- $\Leftarrow$ W pierwszej kolejności sprowadzimy zagadnienie do analizy włożenia klasy C^∞ otwartego podzbioru $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{\times n_1}$ w $\mathbb{R}^{\times n_2}$. W tym celu zauważamy, że dla dowolnej podprzestrzeni $S \coloneqq f(M_1) \subset M_2$ status podrozmaitości ma charakter lokalny i niezmienniczy względem dyfeomorfizmów, toteż do jego weryfikacji możemy użyć lokalnych układów współrzędnych:
  - $\{ \kappa^2_{i_2} : \mathcal{O}^2_{i_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_2} \}_{i_2 \in I_2}$ na M_2, które pokrywają S oraz
  - $\{ \kappa^1_{i_1} : \mathcal{O}^1_{i_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_1} \}_{i_1 \in I_1}$ na M_1, o własności $f(\mathcal{O}^1_{i_1}) \subset \mathcal{O}^2_{\phi(i_1)}$.

  Istnienie atlasów o tych własnościach wynika z ciągłości f. Wykorzystując ciągłość odwzorowania odwrotnego (oznaczającą otwartość f, a będącą konsekwencją homeomorficznego charakteru f w ograniczeniu do obrazu) możemy zrealizować wymóg bardziej szczegółowy: $f(\mathcal{O}^1_{i_1}) = S \cap \mathcal{O}^2_{\phi(i_1)}$ – istotnie, w tym celu należy zastąpić wyjściowe pokrycie $\mathcal{O}_2 = \{\mathcal{O}^2_{i_2}\}_{i_2 \in I_2}$ (ograniczone do S) jego rozdrobnieniem względem pokrycia $f(\mathcal{O}_1) = \{f(\mathcal{O}^1_{i_1})\}_{i_1 \in I_1}$. Wystarczy teraz wskazać mapy stowarzyszone z pokryciem S otrzymanym tym sposobem, w których S jawi się lokalnie jako otwarty podzbiór $\mathbb{R}^{\times n_1} \equiv \mathbb{R}^{\times n_1} \times \{\mathbf{0}_{n_2 - n_1}\} \subset \mathbb{R}^{\times n_2}$. Oznaczmy $\mathcal{U}^1_{i_1} \coloneqq \kappa^1_{i_1}(\mathcal{O}^1_{i_1}) \subset \mathbb{R}^{\times n_1}$, $i_1 \in I_1$ i rozważmy

  $$f_{i_1} = \kappa^2_{\phi(i_1)} \circ f \circ \left(\kappa^1_{i_1}\right)^{-1} : \mathcal{U}^1_{i_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_2}.$$

  Lokalne prezentacje f_{i_1} to – rzecz jasna – włożenia klasy C^∞, przeto na mocy Stw. 1 możemy wybrać w ich dziedzinie i przeciwdziedzinie współrzędne, w których te odwzorowania przyjmą postać kanoniczną i które tym samym sparametryzują zbiory $f(\mathcal{O}^1_{i_1})$ w pożądany sposób.

$\square$

Szczegółowa dyskusja warunków, w których poziomica ustalonego punktu ze zbioru wartości odwzorowania klasy C^k jest podrozmaitością, wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć, co czynimy poniżej.

Definicja 2. Przyjmijmy zapis Def. 1. Jeśli f jest submersywne w punkcie $x \in M_1$, to wówczas x nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania f. W przeciwnym razie mówimy o **punkcie krytycznym**. Punkt przeciwdziedziny $y \in M_2$ będący obrazem punktu krytycznego względem f to **wartość krytyczna**, wszystkie pozostałe punkty przeciwdziedziny (nie wyłączając tych spoza obrazu odwzorowania) noszą miano **wartości regularnych**. Poziomice $f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ wartości regularnych $y \in M_2$ bywają nazywane **poziomicami regularnymi**, a w przypadku surjektywnej submersji także **włóknami**. Rozmaitość M_1 zyskuje w tym kontekście przydomek **przestrzeni totalnej** (**submersji**). Niechaj $f_\alpha : M^{(\alpha)}_1 \longrightarrow M^{(\alpha)}_2$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą submersjami. Parę odwzorowań gładkich $F_\beta : M^{(1)}_\beta \longrightarrow M^{(2)}_\beta$, $\beta \in \{1,2\}$ o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} M_1^{(1)} \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_1^{(2)} \arrow[d, "f_2"] \\ M_2^{(1)} \arrow[r, "F_2"'] & M_2^{(2)} \end{tikzcd}$$

nazywamy **morfizmem submersji**. Powiemy też, że F_1 zachowuje włókna obu submersji.

O pierwszorzędnym znaczeniu wprowadzonych tu pojęć w kontekście naszych rozważań przekonuje

Twierdzenie 2 (O wartości regularnej)**.** Poziomica regularna odwzorowania klasy C^∞ pomiędzy rozmaitościami gładkimi jest podrozmaitością gładką w dziedzinie tegoż odwzorowania, wymiaru równego różnicy wymiarów dziedziny i przeciwdziedziny odwzorowania.

Dowód: Jak stwierdziliśmy uprzednio, status podrozmaitości ma charakter lokalny i niezmienniczy względem dyfeomorfizmów, przeto jego weryfikację wystarczy przeprowadzić w dziedzinie jednej z map na dziedzinie odwzorowania oraz w dziedzinie odnośnej mapy na jego przeciwdziedzinie. Rozważmy zatem otwarte otoczenie punktu regularnego $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$ odwzorowania $f : M_1 \longrightarrow M_2$ klasy C^∞ między rozmaitościami M_1 i M_2. Odwzorowanie f jest submersywne w x, zatem na mocy Stw. 2 istnieją lokalne układy współrzędnych $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ na zbiorach otwartych $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni y$ o własnościach (1) i (2) i takie, w których lokalna prezentacja $\widetilde{f} = \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}$ jest ograniczeniem submersji kanonicznej do $\kappa_1(\mathcal{O}_1)$. Wprost z konstrukcji wynika, że dla każdego punktu $\widetilde{x} \in \mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$ jest spełniony warunek $x^k(\widetilde{x}) = 0,\ k \in \overline{1, n_2}$ dla składowych mapy $\kappa_1 = (x^1, x^2, \ldots, x^{n_2})$, oto bowiem

$$\big(x^1(\widetilde{x}), x^2(\widetilde{x}), \ldots, x^{n_2}(\widetilde{x})\big) = \widetilde{f} \circ \kappa_1(\widetilde{x}) \equiv \kappa_2 \circ f(\widetilde{x}) = \kappa_2(y) = 0\,.$$

Jest to jedyny warunek, jaki przyjęte założenia narzucają na $\kappa_1(\widetilde{x})$, stąd też podprzestrzeń $\mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$ jest parametryzowana przez $n_1 - n_2$ ostatnich współrzędnych na $\mathcal{O}_1$,

$$\kappa_1(\widetilde{x}) = \big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{n_2} x^{n_2+1}(\widetilde{x}), x^{n_2+2}(\widetilde{x}), \ldots, x^{n_1}(\widetilde{x})\big)\,,$$

co daje nam tezę dowodzonego twierdzenia. □

Warto przy tej okazji odnotować także powszechnie stosowane

Stwierdzenie 3. W oznaczeniach dowodu Tw. 2 zachodzi tożsamość

$$\mathsf{T}_x\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \ker \mathsf{T}_x f\,.$$

Dowód: Jako że f jest stałe na swej poziomicy, zachodzi równość

$$\mathsf{T}_x f \restriction_{\mathsf{T}_x(f^{-1}(\{y\}))} = 0\,,$$

więc też

$$\mathsf{T}_x\big(f^{-1}(\{y\})\big) \subset \ker \mathsf{T}_x f\,.$$

Z drugiej strony czysto algebraiczny bilans wymiarów dla odwzorowania liniowego $\mathsf{T}_x f$ daje nam – wobec jego surjektywności, a w świetle Tw. 2 – równość

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \ker \mathsf{T}_x f &= \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} \mathsf{T}_x f = \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_y M_2 \\ &\equiv \dim M_1 - \dim M_2 = \dim f^{-1}(\{y\}) \equiv \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x\big(f^{-1}(\{y\})\big)\,, \end{aligned}$$

która zamyka dowód. □

Tytułem rozwinięcia dotychczasowej naszej dyskusji podstawowych typów odwzorowań różniczkowalnych między rozmaitościami omówimy kilka przykładów oraz podstawowe ich własności. Zaczyniemy od warunków wystarczających dla bycia immersją.

Stwierdzenie 4. Każde injektywne odwzorowanie gładkie o stałym rzędzie między dwiema rozmaitościami gładkimi jest immersją.

Dowód: Załóżmy, że odwzorowanie gładkie $f : M_1 \longrightarrow M_2$ o stałym rzędzie $\mathrm{rk}\,\mathsf{D}F = r$ między dwiema rozmaitościami $(M_\alpha, \widehat{\mathscr{A}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ wymiaru $n_\alpha := \dim M_\alpha$ jest wprawdzie injektywne, ale *nie* jest immersją, czyli $r < n_1$. Rozważmy obrazy: dowolnego punktu $x \in M_1$ oraz jego obrazu $f(x) \in M_2$ względem odnośnych lokalnych map $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_\alpha$ określonych na pewnych otwartych otoczeniach: $\mathcal{O}_1 \ni x$ i $\mathcal{O}_2 \ni f(x)$, które są odwzorowywane homeomorficznie w odnośne zbiory otwarte $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^{\times n_\alpha}$. Odwzorowanie $\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2$ spełnia założenia twierdzenia o rzędzie odwzorowania, możemy przeto odnieść do niego tezę tego twierdzenia, która przesądza o istnieniu na pewnych otoczeniach $\widetilde{\mathcal{U}_\alpha} \subset \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in \{1,2\}$ punktów: $\kappa_1(x) \in \widetilde{\mathcal{U}_1}$ i $\kappa_2 \circ f(x) \in \widetilde{\mathcal{U}_2}$ oraz lokalnych transformacji współrzędniowych (dyfeomorfizmów) ι_α klasy C^∞, które pozwalają sprowadzić lokalną prezentację f do szczególnie prostej postaci danej wzorem

$$\iota_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \circ \iota_1^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_r, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n_2 - r}) .$$

To jednak prowadzi nas do wniosku, że wszystkie punkty z dziedziny powyższej lokalnej prezentacji, które są szczególnej postaci $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n_1 - r})$, $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1, n_1 - r}$, są przez nią przeprowadzane na punkt $\mathbf{0}_{n_2}$, co wobec relacji $r < n_1$ implikuje nieinjektywność tejże lokalnej prezentacji, a zatem także – nieinjektywność f, w sprzeczności z poczynionymi założeniami. □

Praktyczny opis włożenia zawiera natomiast

Stwierdzenie 5. Każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym jest gładkim włożeniem.

Dowód: Odwzorowanie, o którym mowa w treści stwierdzenia, jest na mocy twierdzenia o domkniętości odwzorowania właściwego o lokalnie prezwartej przeciwdziedzinie (a taką jest rozmaitość gładka) domknięte, co w połączeniu z jego injektywnością oznacza, że jest ono włożeniem topologicznym, czyli injektywnym odwzorowaniem gładkim będącym homeomorfizmem na obraz względem topologii podprzestrzeni. □

Przydatny przykład zastosowania powyższego rezultatu stanowi

Stwierdzenie 6. Niechaj $f : M_1 \longrightarrow M_2$ będzie odwzorowaniem klasy C^∞ pomiędzy dwiema rozmaitościami gładkimi $(M_\alpha, \widehat{\mathscr{A}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$. **Wykres odwzorowania** f, tj. podzbiór

$$\mathrm{graph}(f) := \left\{ \big(x, f(x)\big) \quad | \quad x \in M_1 \right\} \subset M_1 \times M_2 ,$$

wyposażony w topologię produktową, jest podrozmaitością gładką rozmaitości (o strukturze produktowej) $M_1 \times M_2$.

Dowód: Odwzorowanie $(\mathrm{id}_{M_1}, f) : M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2$, którego obrazem jest $\mathrm{graph}(f)$, jest w oczywisty sposób injektywną immersją. Ponadto jest ono właściwe. Istotnie, rozważmy dowolny zbiór zwarty $\mathcal{K} \subset M_1 \times M_2$ oraz dowolny ciąg punktów $x_\cdot : \mathbb{N} \longrightarrow (\mathrm{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ w jego przeciwobrazie w M_1. Obraz tego ciągu w $\mathcal{K}$ zawiera, z racji zwartości, pewien podciąg zbieżny $(x_{n_\cdot}, f(x_{n_\cdot})) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{K}$ o granicy $(x_*, f(x_*)) \in \mathcal{K}$, której postać jest podyktowana przez założoną ciągłość f. Ów podciąg definiuje podciąg $x_{n_\cdot} : \mathbb{N} \longrightarrow (\mathrm{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ zbieżny do $x_* \in (\mathrm{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$, co przesądza o zwartości zbioru $(\mathrm{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$. Na gruncie Stw. 5 konstatujemy, że (id_{M_1}, f) jest gładkim włożeniem, więc też – w odwołaniu do Tw. 1 – jego obraz $\mathrm{graph}(f)$ jest podrozmaitością klasy C^k, zgodnie z postulowaną tezą. □

Przejdziemy teraz do dyskusji odwzorowań submersywnych. Prostą, acz istotną ich własność, stanowiącą geometryzację zaawansowanego pojęcia algebry liniowej, jakim jest rozszczepialny krótki ciąg dokładny modułów nad pierścieniem, opisuje

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Def. 1. Obraz każdego punktu regularnego $x \in M_1$ odwzorowania $f : M_1 \longrightarrow M_2$ klasy C^∞ ma otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \ni f(x)$, na którym jest określone odwzorowanie $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \longrightarrow M_1$ klasy C^∞ o własnościach

$$f \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \qquad \wedge \qquad \sigma \circ f(x) = x\,,$$

zwane **cięciem lokalnym** odwzorowania f.

<u>*Dowód:*</u> Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia $\mathcal{O}_x \ni x$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n_1})$, w której $\kappa_1(x) = 0$, a także – do pewnego otoczenia $\widetilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$ będącego dziedziną lokalnej mapy $\kappa_2 : \widetilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_2 \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^{\times n_2})$, w której $\kappa_2 \circ f(x) = 0$. Submersywność f w x oznacza, że odwzorowanie styczne

$$\mathsf{T}_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : \mathsf{T}_{\kappa_1(x)=0}\mathbb{R}^{\times n_1} \equiv \mathbb{R}^{\times n_1} \longrightarrow \mathsf{T}_{\kappa_2 \circ f(x)=0}\mathbb{R}^{\times n_2} \equiv \mathbb{R}^{\times n_2}$$

jest epimorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych. Niechaj zatem $V_1 \subset \mathbb{R}^{\times n_1}$ będzie (dowolną) podprzestrzenią izomorficznie odwzorowywaną w $\mathbb{R}^{\times n_2}$ przez (ograniczenie) $\mathsf{T}_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$, a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy C^∞

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \restriction_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \longrightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{\times n_2}\,,$$

o jawnie niepustej dziedzinie (wszak V_1 jest podprzestrzenią w $\mathbb{R}^{\times n_1}$, a $\mathcal{U}_1$ jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. Istotnie, wobec tożsamości $\mathsf{T}_0 V_1 \equiv V_1$, dziedzina $\mathsf{T}_0 F$ przyjmuje postać $\mathsf{T}_0\mathcal{U}_1 \cap \mathsf{T}_0 V_1 \equiv \mathbb{R}^{\times n_1} \cap V_1 = V_1$, co oznacza, że $\mathsf{T}_0 F$ jest izomorfizmem

$$\mathsf{T}_0 F \equiv \mathsf{T}_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1}\,.$$

W odwołaniu do twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań wnioskujemy zatem, że $F \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \restriction_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$ ma pożądaną lokalną odwrotność $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1} \restriction_{F(\mathcal{U}_0)}$ klasy C^l na pewnym otoczeniu $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \cap V_1$ wektora $0 \equiv \kappa_1(x)$. Homeomorficzny przeciwobraz $\kappa_1^{-1}(\mathcal{U}_0)$ tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu x, na którym jest określone lokalne cięcie σ klasy C^∞. □

Dotychczasowe nasze rozważania nieuchronnie prowadzą do pytania o warunki, których spełnienie gwarantuje, że przeciwobraz podrozmaitości w przeciwdziedzinie odwzorowania względem tegoż odwzorowania także jest podrozmaitością. Przy ich wyprowadzaniu natrafiamy na naturalne uogólnienie pojęcia „regularności” punktu przeciwdziedziny, o czytelnej interpretacji geometrycznej. Tak jak poprzednio dociekania nasze prowadzimy na poziomie lokalnym. Stwierdzamy przy tym, że przeciwobraz dowolnej podrozmaitości gładkiej $S \subset M_2$ rozmaitości gładkiej względem odwzorowania $f : M_1 \longrightarrow M_2$ klasy C^∞ jest podrozmaitością gładką wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $x \in f^{-1}(S)$ ma otoczenie $\mathcal{O} \in \mathscr{T}(M_1)$ o tej własności, że $\mathcal{O} \cap f^{-1}(S)$ jest (pod)rozmaitością gładką (tego samego wymiaru). Ustalmy $y \in S$ i przywołajmy treść Tw. 1, z której wynika, że $S \subset M_2$ jest obrazem włożenia $\iota_S : S \hookrightarrow M_2$ (klasy C^k), zatem też – na mocy Stw. 1 – lokalnie, tj. w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_y$ punktu y, jest wspólną poziomicą zerową układu $\mathrm{codim}_{M_2} S =: s$ liniowo niezależnych funkcji[2] $w_l := \varphi_2^{\dim S + l}$, $l \in \overline{1,s}$. Wobec tego w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_x$ punktu $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(S) \subset M_1$ zbiór $f^{-1}(S)$ jest wspólną poziomicą zerową układu funkcji $w_l \circ f$, $l \in \overline{1,s}$. Zdefiniujmy submersję[3]

$$w := (w_1, w_2, \ldots, w_s) : \mathcal{O}_y \longrightarrow \mathbb{R}^{\times s}\,,$$

[2] Tj. funkcji o różniczkach liniowo niezależnych na pewnym otoczeniu y.

[3] Odwzorowanie styczne ma względem odpowiednich baz macierz jednostkową.

a następnie rozważmy odwzorowanie

$$w \circ f \;:\; \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{\times s}\,.$$

W świetle Tw. 2 podprzestrzeń $(w \circ f)^{-1}(\{0\}) \equiv \mathcal{O}_y$ jest podrozmaitością, jeśli 0 jest wartością regularną odwzorowania $w \circ f$. Zachodzi

$$\mathsf{T}_x(w \circ f) = \mathsf{T}_y w \circ \mathsf{T}_x f \;:\; \mathsf{T}_x \longrightarrow \mathsf{T}_0\mathbb{R}^{\times s} \equiv \mathbb{R}^{\times s}\,,$$

wobec czego $\mathsf{T}_x(w \circ f)$ jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathsf{T}_y w$ odwzorowuje $\mathrm{im}\,\mathsf{T}_x f$ na $\mathbb{R}^{\times s}$. Jednakowoż $\ker \mathsf{T}_y w = \mathsf{T}_y S$ na mocy Stw. 3, musimy zatem wobec surjektywności $\mathsf{T}_y w$ zażądać spełnienia warunku, o którym mowa w

Definicja 3. Niechaj $(M_\alpha, \widehat{\mathscr{A}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą rozmaitościami gładkimi i niech $f \in C^1(M_1, M_2)$, a ponadto niech $S \subset M_2$ będzie podrozmaitością gładką. Odwzorowanie f określamy mianem **transwersalnego w punkcie** $f(x) \in S$, $x \in M_1$ **względem** S, co zapisujemy symbolicznie jako

$$f \,\overline{\pitchfork}_{f(x)}\, S\,,$$

jeśli spełnia ono warunek

$$\mathrm{im}\,\mathsf{T}_x f + \mathsf{T}_{f(x)} S = \mathsf{T}_{f(x)} M_2 \tag{3}$$

(w którego zapisie suma po lewej stronie znaku równości jest sumą algebraiczną przestrzeni $\mathbb{R}$-liniowych). Ilekroć warunek ten jest spełniony w każdym z punktów poziomicy $f^{-1}(S)$, mówimy, że odwzorowanie f jest **transwersalne względem** S i piszemy $f \,\overline{\pitchfork}\, S$.

W podsumowaniu naszej wcześniejszej analizy możemy już wysłowić

Twierdzenie 3. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj $S \subset M_2$ będzie podrozmaitością gładką. Jeśli $f \,\overline{\pitchfork}\, S$, to także $f^{-1}(S) \subset M_1$ jest podrozmaitością gładką, przy czym

$$\mathrm{codim}_{M_1} f^{-1}(S) = \mathrm{codim}_{M_2} S\,.$$

Dowód: Jedynym stwierdzeniem, które nie zostało dotąd udowodnione, jest to dotyczące kowymiaru przeciwobrazu. Przypomnijmy, że w dotychchczasowych naszych rozważaniach kowymiar S przyjęliśmy równym s. Przeciwobraz $f^{-1}(S)$ możemy opisać lokalnie jako wspólną poziomicę zerową układu s funkcji $w_l \circ f$, $l \in \overline{1,s}$, przy czym ich jednoczesne zerowanie się jest jedynym warunkiem definiującym tę podrozmaitość. Ich liniowa niezależność wynika wprost z naszej konstrukcji (patrz: rozumowanie prowadzące do wzoru (3)), oto bowiem

$$\mathrm{im}\big(\mathsf{T}_x(w_1 \circ f), \mathsf{T}_x(w_2 \circ f), \ldots, \mathsf{T}_x(w_s \circ f)\big) \equiv \mathrm{im}\,\mathsf{T}_x(w \circ f) = \mathbb{R}^{\times s}\,.$$

□

Uwaga 1. Ilekroć $S = \{y\}$ (pojedynczy punkt przeciwdziedziny), powyższa konstrukcja daje $\mathsf{T}_y S = \{0\} \subset \mathsf{T}_y M_2$, więc też

$$f \,\overline{\pitchfork}\, S \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall_{x \in f^{-1}(\{y\})} \;:\; \mathsf{T}_y M_2 = \mathrm{im}\,\mathsf{T}_x f + 0 \equiv \mathrm{im}\,\mathsf{T}_x f\,,$$

co jest równoznaczne z surjektywnością odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowego $\mathsf{T}_x f$ w każdym z punktów poziomicy. Tym samym odtwarzamy poprzednio wprowadzone pojęcie wartości regularnej jako szczególny przypadek ogólniejszego pojęcia transwersalności odwzorowania względem podrozmaitości. To ostatnie można prosto rozszerzyć do pary podrozmaitości oraz pary odwzorowań o wspólnej przeciwdziedzinie, czym zajmujemy się w dalszej części naszej dyskusji.

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i niechaj $S_1, S_2 \subset M$ będą dwiema podrozmaitościami gładkimi. Powiemy, że są one wzajem **transwersalne**, co zapiszemy symbolicznie jako

$$S_1 \,\overline{\pitchfork}\, S_2\,,$$

jeśli kanoniczna injekcja $\iota_{S_1} \;:\; S_1 \hookrightarrow M$ spełnia warunek $\iota_{S_1} \,\overline{\pitchfork}\, S_2$ (lub – równoważnie – $\iota_{S_2} \,\overline{\pitchfork}\, S_1$ dla $\iota_{S_2} \;:\; S_2 \hookrightarrow M$).

Analogicznie, odwozrowania $f_\alpha \in C^1(M_\alpha, M)$, $\alpha \in \{1,2\}$ określimy jako wzajem **transwersalne**, zapisując

$$f_1 \,\overline{\pitchfork}\, f_2 \,,$$

jeśli dla dowolnej pary punktów $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ o własności $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ spełniona jest tożsamość

$$\mathsf{T}_{f_1(x)} M = \mathrm{im}\,\mathsf{T}_{x_1} f_1 + \mathrm{im}\,\mathsf{T}_{x_2} f_2 \,.$$

Należy zwrócić uwagę, że $x \in S_1$ należy do przeciwobrazu $\iota_{S_1}^{-1}(S_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \equiv \iota_{S_1}(x) \in S_1 \cap S_2 \subset M$, a ponieważ $\mathsf{T}_x \iota_{S_1} : \mathsf{T}_x S_1 \rightarrowtail \mathsf{T}_{\iota_{S_1}(x)} M$ jest kanonicznym monomorfizmem, przeto

$$S_1 \,\overline{\pitchfork}\, S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x \in S_1 \cap S_2} \ : \ \mathsf{T}_x S_1 + \mathsf{T}_x S_2 = \mathsf{T}_x M \,, \tag{4}$$

co jest zgodne z intuicją geometryczną leżącą u podstaw całej konstrukcji. Znajduje ona dodatkowe solidne podparcie w

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy oznaczenia Def. 4. Ilekroć $S_1 \,\overline{\pitchfork}\, S_2$, podprzestrzeń $S_1 \cap S_2$ ma kanoniczną strukturę podrozmaitości gładkiej kowymiaru

$$\mathrm{codim}_M \,(S_1 \cap S_2) = \mathrm{codim}_M \, S_1 + \mathrm{codim}_M \, S_2 \,, \tag{5}$$

więc też

$$\forall_{x \in S_1 \cap S_2} \ : \ \mathsf{T}_x(S_1 \cap S_2) = \mathsf{T}_x S_1 \cap \mathsf{T}_x S_2 \,.$$

Dowód: W świetle Tw. 3 (i uwag wypowiedzianych pod jego dowodem) $\iota_{S_1}^{-1}(S_2) \equiv S_1 \cap S_2$ ma kanoniczną strukturę podrozmaitości, a nadto otrzymujemy równość

$$\mathrm{codim}_{S_1} \,(S_1 \cap S_2) \equiv \mathrm{codim}_{S_1} \, \iota_{S_1}^{-1}(S_2) = \mathrm{codim}_M \, S_2 \,,$$

tj.

$$\dim S_1 - \dim\,(S_1 \cap S_2) = \dim M - \dim S_2 \,,$$

a zatem

$$\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = -\dim\,(S_1 \cap S_2) \,.$$

Stąd też

$$\begin{aligned} \mathrm{codim}_M \, S_1 + \mathrm{codim}_M \, S_2 \quad &\equiv \quad 2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim\,(S_1 \cap S_2) \\ &\equiv \quad \mathrm{codim}_M \,(S_1 \cap S_2) \,, \end{aligned}$$

która pokazuje dowodnie, że $\mathrm{codim}_M \, S_1$ liniowo niezależnych funkcji definiujących S_1 jako ich wspólną poziomicę zerową, wraz z $\mathrm{codim}_M \, S_2$ liniowo niezależnymi funkcjami definiującymi S_2 tworzy układ liniowo niezależny definiujący w tenże sposób $S_1 \cap S_2$.

Ponadto jest oczywistym, że $\mathsf{T}_x S_1 \cap \mathsf{T}_x S_2 \subset \mathsf{T}_x(S_1 \cap S_2)$, dla zakończenia dowodu pozostaje więc sprawdzić równość wymiarów obu podprzestrzeni. W tym celu przywołujemy warunek transwersalności (4), który prowadzi do równości

$$\dim M = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim_{\mathbb{R}}\,(\mathsf{T}_x S_1 \cap \mathsf{T}_x S_2)$$

i na mocy wcześniej udowodnionej równości kowymiarów (5) daje pożądaną równość

$$\begin{aligned} &\dim M - \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{T}_x(S_1 \cap S_2) \equiv \mathrm{codim}_M \,(S_1 \cap S_2) = \mathrm{codim}_M \, S_1 + \mathrm{codim}_M \, S_2 \\ \equiv \quad &2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim_{\mathbb{R}}\,(\mathsf{T}_x S_1 \cap \mathsf{T}_x S_2) \,. \end{aligned}$$

□

Przydatnego przeformułowania warunku definiującego parę map transwersalnych dostarcza

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis Def. 4 oraz Stw. 6 i rozważmy odwzorowania $f_\alpha \in C^\infty(M_\alpha, M)$, $\alpha \in \{1,2\}$. Prawdziwą jest równoważność

$$f_1 \overline{\pitchfork} f_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_1 \times f_2 \overline{\pitchfork} \mathrm{graph}(\mathrm{id}_M) \subset M \times M\,.$$

<u>*Dowód:*</u> Transwersalność produktu $f_1 \times f_2$ względem $\mathrm{graph}(\mathrm{id}_M)$ jest równoznaczna z równością – dla dowolnego punktu $(x_1, x_2) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(\mathrm{graph}(\mathrm{id}_M))$ –

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{(f_1\times f_2)(x_1,x_2)}(M \times M) &= \mathsf{T}_{(f_1\times f_2)(x_1,x_2)}\mathrm{graph}(\mathrm{id}_M) \\ &\quad + \mathsf{T}_{(x_1,x_2)}(f_1 \times f_2)\big(\mathsf{T}_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2)\big)\,, \end{aligned}$$

którą przepisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathsf{T}_{f_2(x_2)}M &= \mathsf{T}_{(f_1(x_1),f_2(x_2))}\mathrm{graph}(\mathrm{id}_M) \\ &\quad + \mathsf{T}_{x_1}f_1\big(\mathsf{T}_{x_1}M_1\big) \oplus \mathsf{T}_{x_2}f_2\big(\mathsf{T}_{x_2}M_2\big)\,, \end{aligned}$$

co po uwzględnieniu $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in \mathrm{graph}(\mathrm{id}_M)$ daje

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathsf{T}_{f_1(x_1)}M &= \mathsf{T}_{(f_1(x_1),f_1(x_1))}\mathrm{graph}(\mathrm{id}_M) \\ &\quad + \mathsf{T}_{x_1}f_1\big(\mathsf{T}_{x_1}M_1\big) \oplus \mathsf{T}_{x_2}f_2\big(\mathsf{T}_{x_2}M_2\big) \\ &\equiv \Delta_{\mathsf{T}_{f_1(x_1)}M}\big(\mathsf{T}_{f_1(x_1)}M\big) \\ &\quad + \mathsf{T}_{x_1}f_1\big(\mathsf{T}_{x_1}M_1\big) \oplus \mathsf{T}_{x_2}f_2\big(\mathsf{T}_{x_2}M_2\big)\,, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy w zapisie określone dla dowolnego punktu $y \in M$ diagonalne zanurzenie $\mathbb{R}$-liniowe

$$\Delta_{\mathsf{T}_yM} \;:\; \mathsf{T}_yM \longrightarrow \mathsf{T}_yM \oplus \mathsf{T}_yM \;:\; v \longmapsto (v, v)\,.$$

Na tym etapie możemy już przywołać elementarną algebrę liniową, które w obecnym kontekście ustala równoważność między wypisanym rozkładem algebraicznym $\mathsf{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathsf{T}_{f_1(x_1)}M$ i równością

$$\mathsf{T}_{f_1(x_1)}M = \mathsf{T}_{x_1}f_1\big(\mathsf{T}_{x_1}M_1\big) + \mathsf{T}_{x_2}f_2\big(\mathsf{T}_{x_2}M_2\big)\,,$$

w której rozpoznajemy warunek transwersalności odwzorowań f_1 i f_2. □

Dotychczasowe nasze ustalenia pozwalają wysłowić twierdzenie dające nam do ręki ważne i naturalne narzędzie konstrukcyjne, z którego przyjdzie nam nieraz korzystać w dalszej części kursu, poświęconej geometryzacjom struktur algebraicznych. Oto więc mamy

Twierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj $f_\alpha \,:\, M_\alpha \longrightarrow M$, $\alpha \in \{1,2\}$ będą odwzorowaniami klasy C^∞ między rozmaitościami gładkimi $(M_\alpha, \widehat{\mathscr{A}_\alpha})$, $\alpha \in \{1,2\}$ i rozmaitością gładką $(M, \widehat{\mathscr{A}})$. Wyposażmy produkt włóknisty $M_1 \times_M M_2 \subset M_1 \times M_2$ opisany przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} & M_1 \times_M M_2 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1\restriction_{M_1\times_M M_2}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2\restriction_{M_1\times_M M_2}"] & \\ M_1 \arrow[dr, "f_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na $M_1 \times M_2$. Ilekroć $f_1 \overline{\pitchfork} f_2$, przestrzeń $M_1 \times_M M_2$ jest podrozmaitością gładko włożoną w $M_1 \times M_2$, zwaną **produktem włóknistym rozmaitości różniczkowalnych** M_α, $\alpha \in \{1,2\}$ **nad rozmaitością** M. W szczególności jest tak, gdy jedno z odwzorowań f_α, $\alpha \in \{1,2\}$ jest submersją.

Dowód: W świetle Stw. 9, a z racji założenia o transwersalności f_1 i f_2 – spełniona jest relacja

$$f_1 \times f_2 \pitchfork \mathrm{graph}(\mathrm{id}_M)\,,$$

a ponieważ produkt włóknisty spełnia tożsamość

$$M_1 \times_M M_2 = (f_1 \times f_2)^{-1}\mathrm{graph}(\mathrm{id}_M)\,,$$

przeto teza wynika wprost z treści Tw. 3.

W przypadku, gdy (choć) jedno z odwzorowań – powiedzmy, że f_1 – jest submersją, warunek transwersalności wzajemnej obu odwzorowań z pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia jest spełniony automatycznie, oto bowiem dla dowolnej pary punktów $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ o własności $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ otrzymujemy ciąg inkluzji

$$\mathsf{T}_{f_1(x)}M = \mathrm{im}\,\mathsf{T}_{x_1}f_1 \subset \mathrm{im}\,\mathsf{T}_{x_1}f_1 + \mathrm{im}\,\mathsf{T}_{x_2}f_2 \subset \mathsf{T}_{f_1(x)}M\,,$$

który dowodzi pożądanej równości

$$\mathsf{T}_{f_1(x)}M = \mathrm{im}\,\mathsf{T}_{x_1}f_1 + \mathrm{im}\,\mathsf{T}_{x_2}f_2\,.$$

□

I wreszcie na koniec rzut oka na własności submersji, która ukazuje ją jako byt pokrewny dyskutowanym wcześniej algebraicznym strukturom uniwersalnym.

Stwierdzenie 10 (Kwazi-uniwersalna[4] własność submersji)**.** Przyjmijmy zapis Def. 1, zakładając przy tym, że $f : M_1 \longrightarrow M_2$ jest surjektywną submersją klasy C^∞. Niechaj ponadto N będzie rozmaitością gładką, a $\check{F} : M_2 \longrightarrow N$ dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie $\check{F}$ jest klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie złożone $\check{F} \circ f : M_1 \longrightarrow N$ ma tę własność. W szczególności każdemu gładkiemu odwzorowaniu $F : M_1 \longrightarrow N$ stałemu na poziomicach f odpowiada dokładnie jedno odwzorowanie $\check{F} \in C^\infty(M_2, N)$ o własności wyrażonej – wraz z rzeczoną własnością f – przez diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \times_{M_2} M_1 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
M_1 \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, bend right, "F"'] & & M_1 \arrow[dl, "f"'] \arrow[ddl, bend left, "F"] \\
& M_2 \arrow[d, dashed, "\check{F}"] & \\
& N &
\end{tikzcd}.$$

Dowód: Ilekroć $\check{F}$ jest klasy C^∞, także $\check{F} \circ f$ ma tę własność jako superpozycja odwzorowań klasy C^∞.

I odwrotnie, niechaj $\check{F} \circ f \in C^\infty(M_1, N)$. Wobec surjektywności f dowolny punkt w M_2 możemy przedstawić w postaci $f(x)$ dla pewnego $x \in M_1$. Wybierzmy zatem (dowolnie) punkt $f(x) \in M_2$ oraz jego otoczenie $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$, na którym jest określone cięcie lokalne $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \longrightarrow M_1$ odwzorowania f spełniające warunki z tezy Stw. 7. Przyjąwszy zapis dowodu rzeczonego stwierdzenia, otrzymujemy tożsamość

$$\check{F}\restriction_{\mathcal{O}_{f(x)}} \equiv \check{F} \circ \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} = (\check{F} \circ f) \circ \sigma\,,$$

[4]Powodem, dla którego wzbraniamy się przed nadaniem tej własności submersji miana „uniwersalnej", jest to, że klasa obiektów, pośród których para (M_2, f) odgrywa rolę „inicjalną", jest zdefiniowana w terminach odwzorowania f (chodzi o stałość na poziomicach tego odwzorowania).

która dowodzi gładkości $\check{F}\restriction_{\mathcal{O}_{f(x)}}$ na gruncie założenia o gładkości $\check{F}\circ f$ oraz wynikającej ze Stw. 7 gładkości cięcia lokalnego σ. Dowolność wyboru $f(x)$ pozwala wnioskować o globalnej gładkości odwzorowania $\check{F}$.

Wreszcie na koniec zajmiemy się udowodnieniem istnienia i jednoznaczności odwzorowania $\check{F} \in C^\infty(M_2, N)$, spełniającego tożsamość

$$F = \check{F} \circ f\,.$$

Po pierwsze zauważmy, że każde dwa takie odwzorowania pokrywają się na zbiorze $f(M_1)$, który z racji surjektywności f jest tożsamy z M_2, przeto odwzorowanie $\check{F}$ może być co najwyżej jedno. Postulujemy

$$\check{F}\ :\ M_2 \longrightarrow N\ :\ f(x) \longmapsto F(x)\,,$$

wykorzystując raz jeszcze surjektywność f. Założona przez nas stałość F na włóknach f przesądza o sensowności powyższego postulatu ($F(x)$ nie zależy od wyboru reprezentanta włókna $f^{-1}(\{f(x)\})$), a do tego wprost z definicji zachodzi pożądana tożsamość

$$\check{F} \circ f(x) = F(x)\,.$$

□