GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II W CZASACH ZARAZY
ZAGADNIENIA DO SAMODZIELNEGO ROZWAŻENIA – ZESTAW III

Zagadnienie 1.

Niechaj G będzie grupą macierzową, tj. niech $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{K})$ (podgrupa) dla pewnego N i pewnego ciała $\mathbb{K}$. Przyjmijmy, że $\tau \equiv (\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^n)$, $n = \dim \mathrm{G}$ jest układem współrzędnych na pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_e$ jedności $\mathbf{1}_N$ w G o przeciwdziedzinie $\mathcal{U}_e \subset \mathbb{R}^{\times n}$, tj. dowolny element $g \in \mathcal{O}_e$ można w jednoznaczny sposób zapisać jako obraz pewnego punktu $\tau \in \mathcal{U}_e$ względem odwzorowania macierzowego

$$g(\cdot) \equiv \big(g_{ij}(\cdot)\big)_{i,j \in \overline{1,N}} \; : \; \mathcal{U}_e \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_e \; : \; \tau \longmapsto \big(g_{ij}(\tau)\big)_{i,j \in \overline{1,N}} \equiv g(\tau)\,,$$

przy czym współrzędna τ^A odmierza „czas” wzdłuż potoku bazowego pola lewoniezmienniczego L_A, czyli jest parametrem na krzywej całkowej tegoż o własności

$$g(0) = e \equiv \mathbf{1}_N\,.$$

Uzasadnij, dlaczego macierze

$$T_A := \tfrac{\partial}{\partial \tau^A} \restriction_{\tau=0} g(\tau) \in \mathbb{K}(N)$$

spełniają tożsamości

$$T_A \cdot T_B - T_B \cdot T_A = f_{AB}{}^C\, T_C\,,$$

gdzie $f_{AB}{}^C$ są stałymi struktury stycznościowej algebry Liego grupy G względem bazy $\mathsf{T}_e\mathrm{G}$ utworzonej przez wektory $t_A \equiv L_A(e)$, $A \in \overline{1,n}$.

Zagadnienie 2.

Na podstawie rozwiązania zagadnienia 1. wyznacz algebrę Liego poniższych grup Liego

(i) Rzeczywista grupa Heisenberga:

$$H_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Grupa obrotów euklidesowych w $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) := \left\{ \; R \in \mathbb{R}(3) \quad \big| \quad R \cdot R^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}_3 = R^{\mathrm{T}} \cdot R \quad \wedge \quad \det R = 1 \; \right\},$$

czyli izometrii iloczynu skalarnego $\delta = \delta_{ab}\, \mathsf{d}x^a \otimes \mathsf{d}x^b$, np. w parametryzacji kątami Taita–Bryana (tzw. uogólnionymi kątami Eulera) na otoczeniu $(0,0,0)$,

$$R(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi + \sin\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\theta\sin\varphi\cos\psi & \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi + \sin\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi + \sin\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Porównaj rezultat z wynikiem linearyzacji więzów definiujących grupę $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ (jej element R) jako podzbiór $\mathbb{R}(3)$.

(iii) Grupa specjalna unitarna przestrzeni $\mathbb{C}^2$ z naturalną formą półtoraliniową $\mathbb{C}^{\times 2} \times \mathbb{C}^{\times 2} \ni \big((z_1, z_2), (\zeta_1, \zeta_2)\big) \longmapsto z_1\, \overline{\zeta}_1 + z_2\, \overline{\zeta}_2 \in \mathbb{C}$, tj.

$$\mathrm{SU}(2) := \left\{ \; U \in \mathbb{C}(2) \quad \big| \quad U \cdot U^\dagger = \mathbf{1}_2 = U^\dagger \cdot U \quad \wedge \quad \det U = 1 \; \right\}.$$

Jak można ją „dobrze” sparametryzować? Porównaj rezultat z wynikiem linearyzacji więzów definiujących $\mathrm{SU}(2) \subset \mathbb{C}(2)$.

Zagadnienie 3.

Skonstruuj dowolną bazę przestrzeni pól lewoniezmienniczych na grupie

$$\mathrm{SU}(1,1) := \left\{ U = \begin{pmatrix} u & v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2) \quad \Big| \quad \det U = 1 \right\},$$

a następnie wyznacz algebrę Liego tej grupy.

Zagadnienie 4.

Sprawdź, że dowolna macierz postaci

$$X := \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$$

należy do algebry Liego $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ grupy Liego $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, a następnie, zdefiniowawszy

$$\theta := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

i

$$Y := \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)\,,$$

udowodnij – przy założeniu $\theta \neq 0$ – dla odnośnego odwzorowania eksponencjalnego

$$\exp \ : \ \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$$

formułę Rodriguesa

$$\exp(X) = \cos\theta \triangleright \mathbf{1}_3 + \tfrac{\sin\theta}{\theta} \triangleright X + \tfrac{1-\cos\theta}{\theta^2} \triangleright Y$$

lub równoważną jej

$$\exp(X) = \mathbf{1}_3 + \tfrac{\sin\theta}{\theta} \triangleright X + \tfrac{1-\cos\theta}{\theta^2} \triangleright X^2\,.$$

Podpowiedź: Wykorzystaj tożsamości (które należy pierwej sprawdzić)

$$X^2 = -\theta^2 \triangleright \mathbf{1}_3 + Y\,, \qquad\qquad X \cdot Y = 0 = Y \cdot X\,.$$