GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA II W CZASACH ZARAZY
ZAGADNIENIA DO SAMODZIELNEGO ROZWAŻENIA – ZESTAW V

Rozważmy dwuwymiarową rozmaitość metryczną (Σ, γ) bez brzegu, $\partial\Sigma = \varnothing$, występującą w roli czasoprzestrzeni teorii pola o wiązce pól $\Sigma \times M \longrightarrow \Sigma$, której włókno typowe M jest nośnikiem tensora metrycznego g i 3-kobrzegu de Rhama $\mathrm{H} = \mathsf{d}\mathrm{B} \in \Omega^3(M)$, i o funkcjonale działania (Polyakova) danym wzorem

$$S_{\mathrm{P}}[x] = -\tfrac{1}{2} \int_\Sigma \mathrm{Vol}(\Sigma) \sqrt{|\det\gamma|}\, \gamma^{-1} \lrcorner\, x^*\mathrm{g} + \int_\Sigma x^*\mathrm{B}\,, \qquad x \in [\Sigma, M]\,,$$

w którym $\mathrm{Vol}(\Sigma)$ jest standardową formą objętości na Σ. Niechaj G będzie grupą Liego (o algebrze Liego $\mathfrak{g}$) tych autodyfeomorfizmów M, o działaniu

$$\lambda_\cdot \;:\; \mathrm{G} \times M \longrightarrow M \;:\; (g, m) \longmapsto \lambda_g(m)\,,$$

które zachowują metrykę g oraz potencjał B,

$$\forall_{g \in \mathrm{G}} \;:\; \big(\quad \lambda_g^*\mathrm{g} = \mathrm{g} \quad \wedge \quad \lambda_g^*\mathrm{B} = \mathrm{B} \quad \big)\,.$$

Rozważ „małe” transformacje cechowania (ze składowej spójnej jedności w G)

$$\exp\big(\varepsilon\,\Lambda(\cdot)\big) \;:\; \Sigma \longrightarrow \mathrm{G}\,, \qquad \Lambda(\cdot) \;:\; \Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}\,, \qquad \varepsilon \approx 0$$

w cechowaniu zdefiniowanym przez *trywialną* wiązkę główną $\mathrm{G} \longrightarrow \Sigma \times \mathrm{G} \longrightarrow \Sigma$ nad Σ. Jak zmienia się wartość funkcjonału działania S_{P} po zastąpieniu pola $x(\cdot) \in [\Sigma, M]$ polem przetransformowanym $\lambda_{\exp(\varepsilon\,\Lambda(\cdot))}(x(\cdot))$ w *pierwszym* rzędzie w małej ε? Jakie własności transformacyjne powinna mieć poprawka

$$\alpha \in \Gamma\big(\mathsf{T}^*\Sigma \otimes_\Sigma \mathsf{T}M\restriction_{x(\Sigma)}\big)$$

do pochodnej zewnętrznej $\mathsf{d}x$ występującej w funkcjonale Polyakova, ażeby poprawiona pochodna,

$$Dx := \mathsf{d}x + \alpha\,,$$

dawała po podstawieniu w miejsce wyjściowej (w S_P) funkcjonał niezmienniczy względem powyższych „małych" transformacji cechowania? Czy wynik ten utrzyma się, gdy warunek niezmienniczości B zastąpimy warunkiem *kwazi*-niezmienniczości:

$$\forall_{g \in \mathrm{G}} \;:\; \lambda_g^*\mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathsf{d}\kappa_g\,?$$