

# GEODEZYJNE GEOMETRYCZNE : WARIACYJNE

(NOTATKI DO ĆWICZEŃ DO WYKŁADU  
Z GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ 2024/25)

[22]

JEDNYM ZE SPOSOBÓW ZDEFINIOWANIA LINII GEODEZYCZNEJ  
NA ROZMAITOŚCI METRYCZNEJ  $(M, g)$  JEST OKREŚLENIE JEJ  
JAKO GADUŁEJ KRZYWEJ  $\gamma: I \equiv ]0, 1[ \rightarrow M$  O POLU PRĘDKOŚCI  
 $\dot{\gamma} \in \Gamma(TM|_{\gamma(I)})$  KOWARIANTNIE STAŁYM WZDŁUŻ  $\gamma$ ,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0,$$

PRZY CZYM W PORÓZUMIENIU POWIĄZANIE UŻYTE  
DO ZDEFINIOWANIA RUCHOWEJ KOWARIANTNEJ  $\nabla$  JEST  
POWIĄZANIEM METRYCZNYM DLA  $g$ , O SYMBOLACH CHRISTOFFELA

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{-1 il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}), \quad i, j, k \in \overline{\dim M}.$$

LOKALNA WSPÓŁRZĘDNIOWA POSTAĆ RÓWNAŃ GEODEZYJNEGO TO  
- DLA  $\ddot{\gamma} \xrightarrow{\text{lok.}} \ddot{\gamma}^i \partial_i$  -

$$0 = \nabla_{\ddot{\gamma}} \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}^i (\partial_i \ddot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k(x)) \partial_k = (\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k(x) \ddot{\gamma}^i \ddot{\gamma}^j) \partial_k,$$

CZYLI (99)  $\ddot{\gamma}^i + \Gamma_{jk}^i \ddot{\gamma}^j \ddot{\gamma}^k = 0, i \in \overline{1, \dim M}.$

ROZWIĄZANIE (99) (PRZY DANYM WARUNKI POZIĄTEKOWYM  $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$ )  
OKREŚLAJĄ MIANEM GEODEZYJNEJ GEOMETRIJOWEJ.

ZANIM ROZWAŻYMY KONKRETNY PRZYKŁAD, SPRÓBUJEMY WPISAC!  
POWYŻSZE INTEGRALNIENIE W PARADYGMAT WARIACYJNY, T.J.  
ROZPATRZYMY FUNKCJONALY, DLA KTÓRYCH (99) JEST  
RÓWNAŃMI EULERA-LAGRANGE'A.

(2)

Rozważmy Funkcjonal Energii (kinetycznej):

$$\mathcal{E} : C^0(I, M) \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto \int_0^1 dt g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(t) =: E[\gamma]$$

Jego punkty krytyczne znajdziemy modelując „wariacje” na stycznych do krzywych deformacji. Wybierzmy wektorowicę  $v \in T(M)$  o potoku  $\Phi_v : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \mathcal{O}_\gamma \rightarrow M$  na otoczeniu (tubularnym)  $\mathcal{O} \supset \gamma$ , znikających na końcach (ciężki,  $\gamma(0) = 0_{T_{\gamma(0)}M}$  i  $\gamma(1) = 0_{T_{\gamma(1)}M}$ ). Oto zatem żądany

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E[\Phi_v(s; \cdot) \circ \gamma] \stackrel{!}{=} 0.$$

Racjonalnie tak umodelowanej wariacji przeprowadzimy ③

W LOKALNYCH WSPÓŁZĘDNYCH  $x^i$ , w których  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^i \partial_i$ .  
 PROSTOWNIKOWA

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^1 dt g(\mathbb{P}_v(\cdot; \gamma(t)) (\mathbb{P}_v(\cdot; \gamma(\cdot))^\top, \mathbb{P}_v(\cdot; \gamma(\cdot))) (t)$$

$$= \int_0^1 dt \left[ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathbb{P}_v(\cdot; \gamma(t))^k \partial_k g_{ij}(\mathbb{P}_v(0; \gamma(t))) \dot{\mathbb{P}}_v^i(0; \gamma(t)) \dot{\mathbb{P}}_v^j(0; \gamma(t)) \right. \\ \left. + 2 g_{ij}(\mathbb{P}_v(0; \gamma(t))) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \dot{\mathbb{P}}_v^i(\cdot; \gamma(\cdot)) \dot{\mathbb{P}}_v^j(0; \gamma(\cdot))(t) \right]$$

$$= \int_0^1 dt \left[ v^k(\gamma(t)) \partial_k g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) + 2 g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d}{dt} v^i(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \right]$$

$\dot{v}(\gamma(\partial I)) = 0$

$$= \int_0^1 dt v^k(\gamma(t)) \left[ \partial_k g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) - 2 g_{kj}(\gamma(t)) \ddot{\gamma}^j(t) - 2 \dot{\gamma}^i(t) \partial_i g_{jk}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \right] \textcircled{4}$$

$$= -2 \int_0^1 dt V^k(r) g_{kj}(r) (\ddot{r}^k + \Gamma_{ij}^k(r) \dot{r}^i \dot{r}^j)(t) \equiv -2 \int_0^1 dt g(r) (V(r), \nabla_j \dot{r})(t)$$

OTRZYMANE WYRAŻENIE JEST SKALAREM, ZATEM NASZ  
RACHUNEK WSPÓŁRZĘDNIOWY MA SENS GLOBALNY!

WOBEC DOWOLNEJ  $\gamma$  WNIOSKOWZAMY:

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E[\Phi_\gamma(s; \cdot) \circ \gamma] = 0 \Leftrightarrow \nabla_j \dot{r} = 0$$

JAK POUZA DOŚWIADZENIE, FUNKCJONAL  $E$  NADAJE SIĘ  
WYSWIENICIE DO ANALIZY GEOMETRYCZNEJ, LECZ NIE JAKIŚ  
DO RACHUNKOW. AŻEBY TE OSTATNIE UCZYWIĆ WYGODNYMI, (5)

WPROWADZAMY **Funkcję Długości**

$$L[\gamma] := \int_0^1 dt \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(t)}, \text{ To czym prowadzimy}$$

Rozumowanie jak zawsze. Otrzymujemy równania

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L[\mathcal{E}_\gamma(s; \cdot) \circ \gamma] = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \frac{\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|_g}{\|\dot{\gamma}\|_g} \quad (\text{znovu globalny!}),$$

Gdzie  $\|\dot{\gamma}\|_g = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$  jest normą metryczną.

Rozwiązania tego równania to **NIEPARAMETRIZOWANE  
GEODEZYJNE WARIACJE.**

Bez trudu identyfikujemy obstrukcję dla geodezyjności [GEOMETRYCZNE] - jest to  $\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|_g \neq 0$ . Czy można ją usunąć? (6)

JESLI ROZWAŻANIA OGRANICZYMY DO JEDYNEJ BIERĄCYCH,

$$\forall t \in I: \dot{\gamma}(t) \neq 0.$$

TO ODPOWIEDŹ DOKŁADUJE SIĘ BYĆ TWIERDZĄCA! ZAUWAŻAMY

POWEM, ŻE  $L$  JEST **NIEZMIENNICZY** ZE WZGLĘDU

NA REPARAMETRIZACJE ZACHOWUJĄCE ORIENTACJĘ

PLATA PARAMETRIZOWANO  $I \ni t$ , TY. STRAKUSZ CZASU,

$$\forall f \in \text{Diff}(I): f' > 0 \implies \forall \gamma \in C^1(I, M): L[\gamma \circ f] = L[\gamma]$$

TYMCZASEM POŚRÓD TAKICH REPARAMETRIZACJI WYRÓŻNIONYCH  
POWYŻEJ JESZCZE SĄ TAKIE, DLA KÓRYCH  $\|\dot{\gamma}\|_g = \text{const} \dots$  (7)

(STOTNIE, SKORO  $\|\dot{\gamma}\|_g \neq 0$ , TO MOŻEMY ZDEFINIOWAĆ  
 REPARAMETRIZACJĘ

$$I \ni t \mapsto \frac{\int_0^t ds \|\dot{\gamma}(s)\|_g}{\int_0^1 du \|\dot{\gamma}(u)\|_g} =: \tau(t) \in I, \\ \int_0^1 du \|\dot{\gamma}(u)\|_g =: \lambda$$

KTÓRA SPEŁNIA TÓŻSAMOŚĆ

$$\frac{d\tau}{dt}(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|_g}{\lambda} \Rightarrow$$

DLA  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau^{-1}$   
 OTRZYMUJEMY POŻĄDANY  
 WYNIK:

$$\|\tilde{\gamma}'\|_g = 1 = \text{const} \iff \|\dot{\gamma}\|_g = \|\tilde{\gamma}'\|_g \cdot \tau' = \|\tilde{\gamma}'\|_g \cdot \frac{\|\dot{\gamma}\|_g}{\lambda}$$

ZASTOSOWANY OBEJDNIE POWIĘKRO ROZWIAZANIA ABSTRAKCYJNE  
 DO WYZNACZENIA GEODEZYJNEJ (GEOMETRYJNEJ) NA  $S^2$ ...  
 JAK POŁAZALIŚMY NA ĆWICZENIACH,  $S^2 \setminus \{N, S\}$  MA NATĘPNUJĄCY  
 OPIS PARAMETRYCZNY JAKO POWIERZCHNIA <sup>BIĘGUNY</sup> INWERSYJNA:

$$[0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \ni (\varphi, \theta) \xrightarrow{\pi} (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases}
 (\pi_* \partial_\varphi)(\pi(\varphi, \theta)) = (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0) \leadsto T_{\pi(\varphi, \theta)} S^2 = \langle \pi_* \partial_\varphi(\pi(\varphi, \theta)), \pi_* \partial_\theta(\pi(\varphi, \theta)) \rangle_{\mathbb{R}} \\
 (\pi_* \partial_\theta)(\pi(\varphi, \theta)) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta)
 \end{cases}$$

$$I_\pi(\varphi, \theta) = \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi + d\theta \otimes d\theta$$

$$\Rightarrow L[x] = \int_0^1 dt \sqrt{\sin^2 \theta(t) \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}$$

WYBIERZMY PARAMETRIZACJĘ TAK, BY ZAPEWNIĆ  $\frac{d\theta}{ds}(0) > 0$   
 i OGRANIČMY NASZĄ ROZWAJANIA DO OBOJĘTIA RUNERA  
 $\gamma(0) \equiv (\varphi, \theta)(0)$ , NA KTÓRYM SPĘTNIANA JEST TA NIERÓWNOŚĆ,  
 która pozwala nam zastrzyc parametr  $t$  parametrem  
 $\theta$ , TAK JEST DOPIJĘTY

$$\underline{L}[\gamma] = \int_{\theta(0)}^{\theta(t_k)} d\theta \sqrt{\sin^2 \theta \left( \frac{d\tilde{\varphi}}{d\theta} \right)^2 + 1}$$

$\uparrow$  OBSZAR  
DO INTEGRACJI NASZ ODCINEK

$\left( \frac{d\tilde{\varphi}}{d\theta} \right)^2 + 1$  "CZAS"  
 $\hookrightarrow$   $L(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}'; \theta)$

ZAUWAŻMY, ŻE ZMIENNA  $\varphi$  JEST CYKLICZNA, PRZETO  
 RÓWNAŃE EULERA-LAGRANGA PRZYJMUJĄ PROSTY POKRÓJ. (10)

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\varphi}'} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\varphi}} \equiv 0$$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin^2(\cdot) \tilde{\varphi}'(\cdot)}{\sqrt{\sin^2(\cdot) (\tilde{\varphi}'(\cdot))^2 + 1}} \right)$$

MANY ZÄHLEN KUMPLATURS

$$\frac{\sin^2 \theta \tilde{\varphi}'(\theta)}{\sqrt{\sin^2 \theta (\tilde{\varphi}'(\theta))^2 + 1}} = C = \text{const}$$

$$\sinh^4 \theta \cdot (\tilde{\varphi}')^2 = C^2 (\sinh^2 \theta (\tilde{\varphi}')^2 + 1)$$

$$(\tilde{\varphi}')^2 \sinh^2 \theta (\sinh^2 \theta - C^2) = C^2 (> 0)$$

ABSOLUTNÝC ZNAK  $\varphi'$  V DEFINICIÍ  $C$ , NAPIŠEME

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\theta} = \frac{C}{\sinh \theta \sqrt{\sinh^2 \theta - C^2}} = \frac{C}{\sinh^2 \theta \sqrt{1 - C^2 \frac{\sinh^2 \theta + \cosh^2 \theta}{\sinh^2 \theta}}}$$

$$= \frac{C}{\sinh^2 \theta \sqrt{1 - C^2 - C^2 \coth^2 \theta}} = \operatorname{sign} C \cdot \frac{1}{\sinh^2 \theta \sqrt{\frac{1-C^2}{C^2} - \coth^2 \theta}}$$

PORZUCIWSZY ZBĘDNE (W NASZEJ ANALIZIE) BIZANTYJSKIE  
ORNAMENTY (I WYBRAWSZY KIERUNEK ZĘGLUĆI), ZOSTAJEMY  
Z POWINNIEM

$$d\tilde{\varphi} = \frac{-d \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{\alpha^2 - \operatorname{ctg}^2 \theta}} \equiv \frac{-d\xi}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \Big|_{\xi = \operatorname{ctg} \theta} = \frac{-d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \Big|_{\zeta = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\alpha}}$$

$$= d \arccos \left( \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\alpha} \right), \text{ KÓREGO ROZWIĄZANIE}$$

$$\alpha \cos(\tilde{\varphi}(\theta) - \varphi_0) = \operatorname{ctg} \theta$$

PODDAĆ SIĘ PROSTEJ  
INTERPRETACJI:

PRZYWRÓĆMY WSPÓŁZĘDNE KARTESZYŃSKIE ZANURZENIA  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$   
A WTEDY POWYŻSZE PRZEPISZE SIĘ JAKO

$$Ax + By = z \quad (x^2 + y^2 + z^2 = 1).$$

STWIERDZAMY ZATEM, ŻE GEODEZYJNA JEST NA PRZECIĘCIU  
 $\mathbb{S}^2$  Z PŁASZCZYZNĄ PRZECHODZĄCĄ PRZEZ ŚRODEK  
KULI  $B$ :  $\partial B = \mathbb{S}^2$ , CZYLI PUNKT  $(0,0,0)$ . JEST DWA  
WOBC TEGO ODCINKIEM KOŁA WIELKIEGO NA  $\mathbb{S}^2$ !  
ZASKAKUJĄCE? BIORĄC POD UWAGĘ SKĄJNIE WYSOKĄ  
SYMETRIĘ  $\mathbb{S}^2$ , NIE BARDZO... (14)