

I seria zadań z Geometrii różniczkowej II – część pierwsza

15. maja 2016 r.

Zadanie 1. Rozważmy krzywą sparametryzowaną

$$\gamma : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto (t, f(t), g(t)), \quad \mathcal{I} \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$$

zadaną na pewnym otwartym odcinku $\mathcal{I}$ zawierającym punkt 0 przez parę funkcji $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Udowodnij implikację

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{f} = 0 \\ \ddot{f} \neq 0 \\ \tau_\gamma = 0 \end{array} \right\} \implies \exists_{c_\gamma \in \mathbb{R}_{>0}} : \lim_{t \rightarrow \infty} t^3 \cdot \kappa_\gamma(t) = c_\gamma,$$

w której zapisie τ_γ jest skręceniem γ , a κ_γ – jej krzywizną. Pokaż ponadto, że ilekroć **pocho** **Schwarza**

$$\mathcal{S}F := \frac{\ddot{F}}{\ddot{F}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{F}}{\ddot{F}} \right)^2$$

funkcji f i g pokrywają się, to wówczas – przy powyższych założeniach – zachodzi równość

$$c_\gamma = \frac{1}{\ddot{f}(0)^2 + \ddot{g}(0)^2}.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że krzywa

$$\gamma : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \longmapsto \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$$

jest płaska, a jej krzywizna spełnia warunek asymptotyczny

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^3 \cdot \kappa_\gamma(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Zadanie 3. Wyznacz krzywiznę krzywej leżącej w płaszczyźnie

$$XY := \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \} \subset \mathbb{R}^3,$$

która we współrzędnych biegunowych (r, φ) jest opisana równaniem

$$r = R(\varphi),$$

zadany przez pewną funkcję gładką $R \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Zastosuj otrzymany wynik do **spirali Archimedes**a, w przypadku której $R(\varphi) := a\varphi$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Zadanie 4. Sprawdź, że długość **spirali logarytmicznej**, tj. krzywej sparametryzowanej we współrzędnych biegunowych w następujący sposób:

$$\gamma(t) = (r(t), \varphi(t)) := (e^t, at),$$

liczona od $t = -\infty$ jest proporcjonalna do promienia, czyli że istnieje stała $c \in \mathbb{R}_{>0}$ o własności

$$s(t) := \int_{-\infty}^t d\xi \|\dot{\gamma}\|(\xi) = c \cdot r(t),$$

a ponadto że wektor wodzący $\gamma(t)$ zachowuje stały kąt nachylenia względem wektora stycznego do krzywej. Oblicz krzywiznę spirali.

Zadanie 5. Niechaj $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (przy oznaczeniach j/w) będzie gładką krzywą sparametryzowaną. Stowarzyszoną z nią krzywą

$$\epsilon_\gamma : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \gamma(t) + \frac{1}{\kappa_\gamma(t)} N_\gamma(t),$$

zapisaną przy użyciu pola normalnego N_γ na γ , określamy mianem **ewoluty**¹ γ . Przekonaj się, że ewoluta **helisy walcowej** o równaniu

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}$$

jest również helisą walcową. Wyznacz **skok**

$$\sigma_\gamma := \frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}$$

tej ostatniej, a następnie porównaj ze skokiem wyjściowej helisy.

Zadanie 6. Wykaż istnienie takiej wartości parametru $a \in \mathbb{R}_{>0}$ spirali opisanej równaniem

$$r = a^\varphi,$$

dla której spirala ta jest swoją własną ewolutą.

Zadanie 7. Wyznacz reper Freneta na krzywej

$$\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \left(\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

i ustal relację między jej krzywizną a skręceniem.

Zadanie 8. Oblicz krzywiznę i skręcenie, jak również kąt samoprzecięcia **krzywej Vivianiego**, powstałej z przecięcia sfery

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0 \}, \quad a \in \mathbb{R}_{>0}$$

¹Jest ona utworzona przez środki okręgów stycznych do γ .

z cylindrem

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0 \}.$$

Zadanie 9. Wyznacz płaską krzywą sparametryzowaną γ , której krzywizna jest dana w funkcji długości łuku przez wyrażenie

$$\kappa_\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Zadanie 10. Rozważmy krzywą γ sparametryzowaną długością łuku. Sprawdź, że jej **ściśle styczna parabola kubiczna** dana wzorem

$$\pi_\gamma(s) := \gamma(0) + sT_\gamma(0) + \frac{s^2}{2}\kappa_\gamma(0)N_\gamma(0) + \frac{s^3}{6}\kappa_\gamma(0)\tau_\gamma(0)B_\gamma(0),$$

używającym reperu Freneta $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$ krzywej γ , ma w $s = 0$ te same: krzywiznę ($\kappa_\gamma(0)$) i skręcenie ($\tau_\gamma(0)$) co γ .

Zadanie 11. Udowodnij, że dla dowolnej gładkiej (sparametryzowanej) krzywej zamkniętej

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(0) = \gamma(1)$$

o długości łuku $s \in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R})$ zachodzi tożsamość

$$\int_0^1 (\gamma(t) d\kappa_\gamma(t) + \tau_\gamma(t) B_\gamma(t) ds(t)) = 0.$$

Zadanie 12. Wyprowadź zależność długości łuku od parametru $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ dla **traktrisy** (czyli „psiej krzywej”) opisanej równaniem

$$\gamma(t) := \left(\cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \sin t \right).$$

Zadanie 13. Sprawdź, że wektor Darboux D_γ krzywej γ należy do jądra jej macierzy Freneta

$$[F_\gamma]_{\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\gamma(s) & 0 \\ -\kappa_\gamma(s) & 0 & \tau_\gamma(s) \\ 0 & -\tau_\gamma(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Znajdź transformację ortogonalną, która przeprowadza bazę Freneta $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$ w bazę ortonormalną współtworzoną przez D_γ i – np. – N_γ . Wypisz macierz Freneta w nowej bazie. Ustal interpretację geometryczną D_γ .

Zadanie 14. Dla **kardioidy przestrzennej** o równaniu

$$\gamma(t) := ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t, \sin t)$$

wyznacz **płaszczyznę ściśle styczną** w punkcie $t = \pi$, tj. płaszczyznę rozpiętą na wektorach $T_\gamma(\pi)$ i $N_\gamma(\pi)$.

Zadanie 15. Sprawdź, że krzywe w $\mathbb{R}^{2,1}$ o równaniach

$$\gamma_1(t) := (at, b \cos t, b \sin t), \quad \gamma_2(t) := (a \operatorname{cht}, a \operatorname{sht}, bt), \quad \gamma_3(t) := (a \operatorname{sht}, a \operatorname{cht}, bt)$$

mają stałe: krzywiznę i skręcenie, zdefiniowane w analogii do ich odpowiedników euklidesowych (patrz: ćwiczenia).

Powodzenia!