

I seria zadań z Geometrii różniczkowej II – część druga

17. maja 2016 r.

Zadanie 1. Niechaj $(\mathcal{M}, g)$ będzie zwartą zorientowaną rozmaitością (pseudo)riemannowską wymiaru N z brzegiem $\partial\mathcal{M}$. Dla dowolnej pary $(\alpha, \beta) \in \Omega^{k-1}(M) \oplus \Omega^k(M)$, $k \in \overline{1, N}$ udowodnij tożsamość

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_g^{(k)} - \langle \alpha, \delta_g \beta \rangle_g^{(k-1)} = \int_{\partial\mathcal{M}} \alpha \wedge \star_g \beta,$$

zapisaną w terminach (standardowych) dwoistości

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g^{(l)} : \Omega^l(M) \times \Omega^l(M) \longrightarrow \mathbb{R} : (\omega, \eta) \longmapsto \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \star_g \eta, \quad l \in \{k, k-1\}$$

(współ)określanych przez operator Hodge’a $\star_g$ metryki g , oraz operatora kopochodnej δ_g sprzężonego do d względem tychże dwoistości.

Zadanie 2. Przyjąwszy zapis jak w Zad. 1., udowodnij dla dowolnej pary $(\omega, \eta) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^k(M)$ **wzór Greena**

$$\langle \Delta \alpha, \beta \rangle_g^{(k)} - \langle \alpha, \Delta \beta \rangle_g^{(k)} = \int_{\partial\mathcal{M}} (\delta \alpha \wedge \star_g \beta - \delta \beta \wedge \star_g \alpha + \alpha \wedge \star_g d\beta - \beta \wedge \star_g d\alpha),$$

w którym użyto standardowego oznaczenia dla operatora Laplace’a–Beltramiego $\Delta = \{d, \delta\}$.

Zadanie 3. Przyjąwszy zapis jak w Zad. 1. (i porzuciwszy założenie o zwartości $\mathcal{M}$ oraz o istnieniu brzegu), udowodnij dla dowolnego dyfeomorfizmu $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ i dla dowolnej $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ tożsamość

$$\delta_{\varphi^*g}(\varphi^*\omega) = \varphi^*(\delta_g\omega).$$

Zadanie 4. Wyznacz metrykę indukowaną przez metrykę euklidesową na $\mathbb{R}^3$ na powierzchni:

- (i) $MS := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2y - y^3 + z = 0 \}$ („małpie siodło”)
- (ii) sparametryzowanej $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto (3u - u^3 + 3uv^2, 3v - v^3 + 3u^2v, 3(u^2 - v^2))$ (powierzchnia Ennepera)
- (iii) sparametryzowanej (II powierzchnia Scherka)

$$\sigma :]0, 1[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$: (r, \theta) \longmapsto \left(\log \left(\frac{1 + r^2 + 2r \cos \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \right), \log \left(\frac{1 + r^2 - 2r \sin \theta}{1 + r^2 + 2r \sin \theta} \right), 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2r^2 \sin 2\theta}{r^4 - 1} \right) \right)$$

- (iv) sparametryzowanej $\beta_a : [0, \infty[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 : (\xi, \varphi) \longmapsto \left(\frac{a \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi}, a(\xi - \operatorname{tgh} \xi), \frac{a \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi} \right)$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ (pseudosfera Beltramiego); jaką postać metryka ta przybiera we współrzędnych (ζ, φ) , z których pierwsza jest zdefiniowana przez relację różniczkową $d\zeta = \operatorname{tgh} \xi d\xi$?

Zadanie 5. Niechaj $(\mathcal{M}, g)$ będzie rozmaitością (pseudo)riemannowską. Udowodnij, że zwężenie pola stycznego do geodezyjnej $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{M}$ z polem 1-formy ω przenoszonym równolegle wzdłuż γ , czyli funkcja gładka $\omega(\dot{\gamma})$, jest stała wzdłuż tejże geodezyjnej γ .

Zadanie 6. Sprawdź, że tożsamość Bianchiego dla tensora Riemanna, $R^i_{j[kl;m]} = 0$, jest równoważna tożsamości Jacobiego dla pochodnych kowariantnych (stowarzyszonych z powiązaniem Levi-Civita'y) w kierunku wektorów bazy współrzędniowej (tej samej, względem której zostały wypisane składowe tensora Riemanna),

$$[[\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}], \nabla_{\partial_k}] + [[\nabla_{\partial_k}, \nabla_{\partial_i}], \nabla_{\partial_j}] + [[\nabla_{\partial_j}, \nabla_{\partial_k}], \nabla_{\partial_i}] = 0.$$

Zadanie 7. Niechaj $(\mathcal{M}, g)$ będzie rozmaitością (pseudo)riemannowską wymiaru N . Wykaż, że krzywa $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{M}$ jest geodezyjną (niesparametryzowaną) metryki g wtedy i tylko wtedy, gdy jej wektor styczny $\dot{\gamma}$ spełnia warunek

$$\forall_{i,j \in \overline{1,N}} : \dot{\gamma}^i (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^j = \dot{\gamma}^j (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^i.$$

Zadanie 8. Niechaj $(\mathcal{M}, g)$ będzie rozmaitością (pseudo)riemannowską. Udowodnij, że linie całkowite pola gradientowego $X = \nabla f$, określonego przez pewną funkcję gładką $f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$, o stałej długości, $d\|X\|_g^2 = 0$, są geodezyjnymi metryki g .

Zadanie 9. Rozważmy obrotową hiperboloidę jednopowłokową w wygodnej parametryzacji

$$\chi_1 : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v).$$

Podaj opis ogólnych geodezyjnych na tej powierzchni prostokątnej w postaci $v = f(u)$ (funkcja f wyraża się przez całkę nieelementarną), a następnie rozważ (dwie) szczególne klasy geodezyjnych, które dają się opisać w sposób jawony. Wskazówka: W obu przypadkach, ogólnym i szczególnym, warto skorzystać z naturalnych kwadratów równań geodezyjnych. W tym drugim popatrz na rysunek powierzchni z naniesioną nań siatką współrzędniową – np. pod adresem

<http://mathworld.wolfram.com/One-SheetedHyperboloid.html>

– po czym... popuść wodze fantazji (wyłącznie).

Zadanie 10. Niechaj $(\mathcal{M}, g)$ będzie rozmaitością (pseudo)riemannowską wymiaru N . Pole wektorowe $V \in \Gamma(\mathcal{TM})$ nazywamy kowariantnie stałym, jeśli jego współrzędne w (dowolnej) bazie spełniają warunki

$$\forall_{X \in \Gamma(\mathcal{TM})} : \nabla_X V = 0,$$

zapisane w terminach pochodnej kowariantnej stowarzyszonej z powiązaniem Levi-Civita'y. Co można powiedzieć (mądrym) o krzywych całkowitych V ? Wykaż, że nie istnieją niezerowe pola wektorowe kowariantnie stałe na dwuwymiarowej ($N = 2$) rozmaitości zakrzywionej ($R^i_{jkl} \neq 0$ dla pewnych $i, j, k, l \in \{1, 2\}$).

Zadanie 11. Sprawdź, że hiperboloida dwupowłokowa, czyli powierzchnia o parametryzacji

$$\chi^2 : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto (a \cdot \operatorname{sh} v \cos u, b \cdot \operatorname{sh} v \sin u, \varepsilon c \cdot \operatorname{ch} v),$$

zadanej przez stałe $a, b, c, d > 0$ oraz znaki $\varepsilon = +1$ (górną powłokę) lub $\varepsilon = -1$ (dolną powłokę), ma dodatni skalar krzywizny powiązania Levi-Civita'y będący wyłącznie (nietrywialną) funkcją parametru v .

Zadanie 12. Wyznacz skalar krzywizny powiązania Levi-Civita'y dla metryki indukowanej na dowolnej powierzchni obrotowej, tj. powierzchni sparametryzowanej

$$\omega : [0, 2\pi[\times \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

określonej przez parę f, g funkcji kawałkami gładkimi na zbiorze (otwartym) $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$.

Zadanie 13.

Zadanie 14.

Zadanie 15.

Powodzenia!