

II seria zadań z Geometrii różniczkowej II – część pierwsza

9. czerwca 2016 r.

Zadanie 1. Podaj parametryczny opis **loksodromy**, tj. krzywej na 2-sferze przecinającej południki pod stałym kątem (trajektoria ruchu „na azymut”). Sprawdź, że jeżeli rzeczony kąt ma wartość α , to całkowita długość loksodromy rozciągającej się od bieguna południowego do bieguna północnego jest równa $\pi \sec \alpha$.

Zadanie 2. Udowodnij, że wszystkie płaszczyzny styczne do regularnej powierzchni zanurzonej o parametryzacji

$$\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto \gamma_1(u) + \gamma_2(v), \quad \mathcal{P} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times 2}),$$

w której γ_1 i γ_2 są gładkimi krzywymi sparametryzowanymi, są wzdłuż linii stałego u (wzgl. stałego v) równoległe do wspólnej prostej.

Zadanie 3. Sprawdź, że każdy punkt powierzchni $MS := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2y - y^3 + z = 0 \}$ („małpie siodło”) o współrzędnych $(x, y) \neq (0, 0)$ jest punktem hiperbolicznym, a wyróżniony punkt $(x, y) = (0, 0)$ jest izolowanym punktem (pępkowym) płaskim.

Zadanie 4. Powierzchnię zanurzoną Σ nazywamy **obrotową**, jeśli powstaje w wyniku pełnego obrotu płaskiej krzywej gładkiej

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} : t \longmapsto (\rho(t), 0, \zeta(t)),$$

zwanej **krzywą profilową** (lub **krzywą południkową**), wokół prostej $\{ (0, 0, s) \in \mathbb{R}^3 \mid s \in \mathbb{R} \}$, zwanej **osią symetrii** (obrotowej) Σ , czyli jeśli ma parametryzację

$$\pi : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (t, \varphi) \longmapsto (\rho(t) \cos \varphi, \rho(t) \sin \varphi, \zeta(t)).$$

Wyznacz krzywizny główne powierzchni obrotowej w terminach funkcji ρ, ζ i ich pochodnych. Zakładając dodatkowo, że t jest parametrem naturalnym (czyli długością łuku) na krzywej południkowej, wyprowadź wzory na krzywiznę Gaußa:

$$K = -\frac{\ddot{\rho}}{\rho}$$

i krzywiznę średnią:

$$H = \frac{(\rho \dot{\zeta})'}{(r^2)'}.$$

powierzchni Σ , a następnie (na tej podstawie) przedyskutuj (jakościowo, ilekroć nie jest możliwą dyskusja analityczna) klasyfikację powierzchni o stałej krzywiznie Gaußa (i) $K > 0$, (ii) $K < 0$ oraz (iii) $K = 0$.

Zadanie 5. Niechaj $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{P} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ będzie parametryzacją powierzchni (gładko) zanurzonej $\Sigma \equiv \pi(\mathcal{P})$ i niech $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}$ będzie dowolną (gładką) ścieżką w $\mathcal{P}$. Krzywą $\gamma_\pi := \pi \circ \gamma$

nazwiemy **krzywą asymptotyczną** Σ , ilekroć pole wektorowe $\dot{\gamma}$ spełnia tożsamość $II_{\pi}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \equiv 0$. Udowodnij Twierdzenie Beltramiego-Ennepera: Każda krzywa asymptotyczna o nieznikającej krzywiznie spełnia warunek $\tau^2 = -K$, w którego zapisie τ jest skręceniem krzywej, K zaś – krzywizną Gaußa powierzchni.

Zadanie 6. Powierzchnię zanurzoną Σ nazywamy **prostokreślną**, jeśli dopuszcza parametryzację

$$\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto \gamma(u) + v \triangleright X(u), \quad \mathcal{P} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2),$$

gdzie $\pi(\mathcal{P}) \equiv \Sigma$, przy czym γ jest pewną krzywą różniczkowalną (zwaną **kierownicą** Σ), X zaś jest polem wektorowym nie znikającym nigdzie wzdłuż krzywej γ (prostą o tym wektorze kierunkowym nazywamy **tworzącą** Σ). Przykłady: powierzchnie stożkowe, walcowe, paraboloida hiperboliczna, hiperboloida jednopowłokowa, konoida, helikoida.

Sprawdź, że dowolną taką powierzchnię, dla której $X'(u) \neq 0$ na pewnym odcinku $u \in]u_1, u_2[$ można (nad tym odcinkiem) sparametryzować w jednoznaczny sposób

$$\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (s, t) \longmapsto \tilde{\pi}(s, t) = \tilde{\gamma}(s) + t \triangleright \tilde{X}(s), \quad \tilde{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$$

tak, by były spełnione warunki

$$\tilde{X} = \frac{X}{\|X\|} \quad \wedge \quad \|\tilde{X}'\| = 1 \quad \wedge \quad \delta_E^{(3)}(\tilde{\gamma}', \tilde{X}') = 0.$$

Tak określona parametryzacja nosi miano **standardowej**.

Wyraż krzywiznę Gaußa i krzywiznę średnią powierzchni prostokreślnej w parametryzacji standardowej w terminach jej charakterystyk

$$F := \delta_E^{(3)}(\tilde{\gamma}', \tilde{X}), \quad \lambda := \delta_E^{(3)}(\tilde{\gamma}' \times \tilde{X}, \tilde{X}'), \quad J := \delta_E^{(3)}(\tilde{X} \times \tilde{X}', \tilde{X}'').$$

Ustal wartości powyższych charakterystyk dla **helikoidy (prawoskrętnej)** o parametryzacji

$$\chi_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto (v \cos(\alpha u), v \sin(\alpha u), \beta u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Uwaga pomocnicza: W charakterze pomocniczego kroku pośredniego w rachunkach z drugiej części zadania warto sprawdzić, że pierwsza forma fundamentalna na powierzchni prostokreślnej przyjmuje w parametryzacji standardowej postać

$$I_{\tilde{\pi}}(s, t) = \begin{pmatrix} F(s, t)^2 + \lambda(s, t)^2 + t^2 & F(s, t) \\ F(s, t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 7. Powierzchnię prostokreślną zwiemy **powierzchnią rozwijalną**, jeśli odwzorowanie Gaußa jest stałe wzdłuż każdej z prostych $u = \text{const}$ w Σ (w notacji Zad. 9.), czyli (unormowane) wektory normalne są wzajem równoległe wzdłuż tych prostych. Udowodnij, że równoważnym warunkiem definiującym powierzchnię rozwijalną jest znikanie jej krzywizny Gaußa.

Zadanie 8. Sprawdź, że każda z wymienionych poniżej powierzchni sparametryzowanych jest minimalna:

(i) powierzchnia Ennepera:

$$\varepsilon : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto (3u - u^3 + 3uv^2, 3v - v^3 + 3u^2v, 3(u^2 - v^2));$$

(ii) II powierzchnia Scherka:

$$\begin{aligned} \sigma & :]0, 1[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & : (r, \theta) \longmapsto \left(\log \left(\frac{1 + r^2 + 2r \cos \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \right), \log \left(\frac{1 + r^2 - 2r \sin \theta}{1 + r^2 + 2r \sin \theta} \right), 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2r^2 \sin 2\theta}{r^4 - 1} \right) \right); \end{aligned}$$

(iii) powierzchnia Henneberga

$$\begin{aligned} \chi & : \mathbb{R}^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & : (u, v) \longmapsto \left(2 \operatorname{sh} u \cos v - \frac{2}{3} \operatorname{sh}(3u) \cos(3v), 2 \operatorname{sh} u \sin v + \frac{2}{3} \operatorname{sh}(3u) \sin(3v), 2 \operatorname{ch}(2u) \cos(2v) \right). \end{aligned}$$

Zadanie 9. Parametryzację $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \longmapsto (\pi^1(u, v), \pi^2(u, v), \pi^3(u, v))$, $\mathcal{P} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ nazwiemy **konforemną**, jeśli odnośna 1. forma fundamentalna jest postaci $I_\pi = \lambda \cdot \delta_{\mathbb{E}}^{(2)}$, $\lambda \in C^\infty(\mathcal{P}; \mathbb{R})$, czyli jest (funkcjonalnie) proporcjonalna do metryki euklidesowej. Funkcję (dodatnią) λ określimy mianem **współczynnika konforemnego parametryzacji**. Ogólniej, powiemy, że dwie parametryzacje $\pi_1, \pi_2 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ są **konforemnie równoważne**, jeśli odnośne 1. formy fundamentalne są wzajem (funkcjonalnie) proporcjonalne, $I_{\pi_2} = \lambda_{1,2} \cdot I_{\pi_1}$, $\lambda_{1,2} \in C^\infty(\mathcal{P}; \mathbb{R})$. Udowodnij, że odwzorowanie $\nu := n \circ \pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{P} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ na powierzchni sparametryzowanej o nieznikającej krzywiznie Gaußa (i stowarzyszonym odwzorowaniu Gaußa $n : \pi(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$) jest konforemnie równoważne parametryzacji tejże powierzchni, a nadto – że w dowolnej parametryzacji konforemnej o współczynniku konforemnym λ zachodzi relacja

$$\Delta_{(2)} \pi^i = 2\lambda H \nu^i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

zapisana dla dwuwymiarowego laplasjanu $\Delta_{(2)} = \partial_u^2 + \partial_v^2$. W szczególności więc powierzchnia jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe kartezjańskie parametryzacji są funkcjami harmonicznymi.

Zadanie 10. Konstrukcje operatora kształtu oraz form fundamentalnych dla hiperpowierzchni regularnej (czyli gładko zanurzonej podrozmaitości kowymiaru 1) w $\mathbb{R}^3$ uogólniają się do dowolnego wymiaru $n + 1 > 3$ w następujący sposób: dla hiperpowierzchni $\Sigma \equiv \pi(\mathcal{P})$ sparametryzowanej przez $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} : (u^1, u^2, \dots, u^n) \longmapsto (\pi^1(u^i), \pi^2(u^i), \dots, \pi^{n+1}(u^i))$, $\mathcal{P} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy

- odwzorowanie Gaußa $\nu : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ określa gładkie pole unormowanych wektorów normalnych $\nu(p)$, $p \in \mathcal{P}$ prostopadłych do $T_{\pi(p)}\Sigma$ (formalnie pole takie jest wyznaczone jako unormowane pole dwoiste w sensie Hodge’a do iloczynu zewnętrznego elementów bazy $\{\pi_* \partial_{u^i}\}_{i \in \overline{1, n}}$ stycznej);
- operator kształtu (Weingartena) $\widehat{\Sigma} = -(\pi^* \pi|_{T\Sigma})^{-1} \circ \iota_n^{-1} \circ T(\nu \circ \pi)$, gdzie $\iota_n(\pi) : T_\pi \Sigma \cong T_{\nu(\pi)} \mathbb{S}^n$ jest naturalnym utożsamieniem w pełni analogicznym do tego z wymiaru $n + 1 = 3$;

- 1. formę fundamentalną $\Phi_\pi^{(1)} = \pi^* \delta_E^{(n+1)}$, a przy jej użyciu także – dla dowolnego $k > 1$ – k -tą formę fundamentalną $\Phi_\pi^{(k)} : \Gamma(\mathcal{TP}) \times \Gamma(\mathcal{TP}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{P}; \mathbb{R}) : (X, Y) \longmapsto \Phi_\pi^{(1)}(\widehat{\Sigma}^{k-1}(X), Y)$.

To pozwala na określenie – dla dowolnego $i \in \overline{0, n}$ – i -tej **krzywizny średniej** K_i **hiperpowierzchni** Σ jako współczynnika rozkładu wielomianu charakterystycznego w_Σ operatora kształtu w bazie jednomianowej $\{t^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ pierścienia $\mathbb{R}[t]$ (czyli – z dokładnością do znaku i trywialnego czynnika symetrii – i -tego niezmiennika podstawowego $\widehat{\Sigma}$),

$$w_\Sigma =: \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} K_i \triangleright t^{n-i}.$$

W szczególności definiujemy **krzywiznę średnią** $H := \frac{1}{n} \text{tr}_{(n)} \widehat{\Sigma} \equiv K_1$ oraz **krzywiznę Gaußa–Kroneckera** $K := \det_{(n)} \widehat{\Sigma} \equiv K_n$. Oznaczywszy jako κ_i , $i \in \overline{1, n}$ wartości własne $\widehat{\Sigma}$ (potencjalnie zwyrodniałe, czyli dopuszczamy ewentualność $\kappa_j = \kappa_i$ dla $i \neq j \in \overline{1, n}$), zwane w tym kontekście **krzywiznami głównymi**, otrzymujemy formuły

$$K_i := \binom{n}{i}^{-1} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} \kappa_{j_1} \cdot \kappa_{j_2} \cdot \dots \cdot \kappa_{j_i}.$$

Dla przypadków $n+1 \in \{4, 5\}$ udowodnij tożsamości – odpowiednio –

$$\Phi_\pi^{(4)} - 3K_1 \cdot \Phi_\pi^{(3)} + 3K_2 \cdot \Phi_\pi^{(2)} - K \cdot \Phi_\pi^{(1)} = 0 \quad (\text{dla } n = 3),$$

$$\Phi_\pi^{(5)} - 4K_1 \cdot \Phi_\pi^{(4)} + 6K_2 \cdot \Phi_\pi^{(3)} - 4K_3 \cdot \Phi_\pi^{(2)} + K \cdot \Phi_\pi^{(1)} = 0 \quad (\text{dla } n = 4),$$

a następnie uogólnij je do postaci

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} K_i \cdot \Phi_\pi^{(n+1-i)} = 0.$$

Zdziwiona/-y?

Powodzenia!