

II seria zadań z Geometrii różniczkowej II – część druga

10. czerwca 2016 r.

Zadanie 1. Niechaj M będzie gładką rozmaitością różniczkowalną. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\mathcal{G} : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM : (t, X) \mapsto e^t \triangleright X.$$

Wyznacz pole wektorowe na TM stowarzyszone z jednoparametrową grupą $\mathcal{G}$ przekształceń TM . Udowodnij w bezpośrednim rachunku, że wyznaczone pole jest zachowywane przez tę grupę.

Zadanie 2. Zbadaj zupełność poniższych pól wektorowych na $\mathbb{R}^2$, znajdź ich potoki i wyznacz stowarzyszone z nimi (lokalne) jednoparametrowe grupy (lokalnych) dyfeomorfizmów:

(i) $X_{a,b}(x, y) = (ax + by)(y\partial_x - x\partial_y)$, $a, b > 0$;

(ii) $X(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\partial_x + xy\partial_y$.

Zadanie 3. Dla jakich funkcji gładkich $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow]0, \infty[$ potoki pola wektorowego

$$X(x, y) = -xf(x, y)\partial_x - yf(x, y)\partial_y$$

zachowują formę objętości na $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 4. Określmy pola wektorowe na $\mathbb{R}^n$ następującymi wzorami (w których $i, j, k, l \in \overline{1, n}$)

$$\Omega_{ij}(x^l) = \delta_{ik} x^k \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk} x^k \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad P_i(x^l) = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad D(x^l) = x^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$K_i(x^l) = 2\delta_{ij} x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \delta_{jk} x^j x^k \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Wyznacz pełną algebrę Liego tych pól, tj. pokaż, że komutator dowolnej pary jest (funkcjonalną) kombinacją liniową powyższych generatorów (jest to tzw. algebra przekształceń konforemnych przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$), a następnie opisz stowarzyszone z nimi jednoparametrowe grupy przekształceń $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 5.

Powodzenia!