GEOMETRIA WEWN. I ZEWN. POWIERZCHNI ZANURZONYCH W $\mathbb{R}^{3}$

[zy]

2024/25

ROZWAŻAMY POWIERZCHNIE SPARAMETRYZOWANE (IMMERSYWNIE) ①

PŁAT PARAMETRYCZNY

$$\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3}, \quad (s,t) \longmapsto \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big),$$
$$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{\times 2} \qquad \qquad \equiv : \big(\pi^i(s,t)\big)$$

o (PRZESTRZENI) STYCZNEJ

$$T_{\pi(s,t)}\pi(\mathcal{P}) = \big\langle T_{(s,t)}\pi(\partial_s), T_{(s,t)}\pi(\partial_t)\big\rangle_{\mathbb{R}}.$$

POWIERZCHNIA TAKA JEST NATURALNIE WYPOSAŻONA W STRUKTURĘ METRYCZNĄ INDUKOWANĄ WZDŁUŻ π Z EUKLIDESOWEJ METRYKI

NA $\mathbb{R}^{\times 3}$: $\mathrm{I}_\pi := \pi^* \delta_E^{(3,0)} = \delta_{ij}\, \pi^* dx^i \otimes \pi^* dx^j \quad \left(\delta_E^{(3,0)} \equiv \delta_{ij}\, dx^i \otimes dx^j\right)$

I FORMA FUNDAMENTALNA POWIERZCHNI

$$= \delta_{ij} \left(\frac{\partial \pi^i}{\partial s}(s,t)\,ds + \frac{\partial \pi^i}{\partial t}(s,t)\,dt\right) \otimes \left(\frac{\partial \pi^j}{\partial s}(s,t)\,ds + \frac{\partial \pi^j}{\partial t}(s,t)\,dt\right) \quad (2)$$

$$= \underbrace{\left(\delta_{ij}\, \frac{\partial \pi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial \pi^j}{\partial s}(s,t)\right)}_{= g^\pi_{ss}(s,t)} ds \otimes ds + \underbrace{\left(\delta_{ij}\, \frac{\partial \pi^i}{\partial t}(s,t)\, \frac{\partial \pi^j}{\partial t}(s,t)\right)}_{= g^\pi_{tt}(s,t)} dt \otimes dt$$

$$+ \underbrace{\left(\delta_{ij}\, \frac{\partial \pi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial \pi^j}{\partial t}(s,t)\right)}_{= g^\pi_{st}(s,t) \equiv g^\pi_{ts}(s,t)} \left(ds \otimes dt + dt \otimes ds\right)$$

PUNKTOM POWIERZCHNI MOŻNA PRZYPISAĆ UNORMOWANY WEKTOR NORMALNY, NATURALNIE WYZNACZAJĄCY PUNKT NA $\mathbb{S}^2$:

$$n : \pi(\mathcal{P}) \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^{\times 3}\ (\text{w}\ \pi(s,t))}{\mathbb{S}^2 \subset}, \quad \pi(s,t) \longmapsto \frac{T_{(s,t)}\pi(\partial_s) \times T_{(s,t)}\pi(\partial_t)}{\left\| T_{(s,t)}\pi(\partial_s) \times T_{(s,t)}\pi(\partial_t) \right\|^2_{\delta_E^{(3,0)}}} =: N_\pi(s,t)$$

Powyższa definicja ma sens, gdyż $\dim_{\mathbb{R}} T_{\pi(s,t)}\pi(\mathcal{P})=2$,

a nadto – obiekt $n(\pi(s,t))$ <u>nie</u> zależy od parametryzacji (czyli jest – w istocie – funkcją punktu na $\pi(\mathcal{P})$):

Rozważmy reparametryzację

$$(s,t)\longmapsto(\sigma(s,t),\tau(s,t)) \quad : \quad \det_{(2)}\left(\frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}\right)\neq 0$$

$$\pi=\tilde{\pi}\circ(\sigma,\tau)$$

Zachodzi

1° $\|N_{\pi}(s,t)\|^2_{\delta_E^{(3,0)}}$

$$\equiv\left\| T_{(s,t)}\pi(\partial_s)\times T_{(s,t)}\pi(\partial_t)\right\|^2_{\delta_E^{(3,0)}}$$

$$\equiv\delta_E^{(3,0)}\left(T_{(s,t)}\pi(\partial_s)\times T_{(s,t)}\pi(\partial_t),\,T_{(s,t)}\pi(\partial_s)\times T_{(s,t)}\pi(\partial_t)\right)$$

4

$$= \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{abc}\,\frac{\partial \pi^i}{\partial s}\frac{\partial \pi^j}{\partial t}\frac{\partial \pi^a}{\partial s}\frac{\partial \pi^b}{\partial t}(s,t)\,\delta^{(3,0)}_{E}(\partial_k,\partial_c)$$

$$= \delta_{kc}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{abc}\,\frac{\partial \pi^i}{\partial s}\frac{\partial \pi^j}{\partial t}\frac{\partial \pi^a}{\partial s}\frac{\partial \pi^b}{\partial t}(s,t)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{abk}\,\frac{\partial \pi^i}{\partial s}\frac{\partial \pi^j}{\partial t}\frac{\partial \pi^a}{\partial s}\frac{\partial \pi^b}{\partial t}(s,t)$$

$$= \left(\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}\right)\frac{\partial \pi^i}{\partial s}\frac{\partial \pi^j}{\partial t}\frac{\partial \pi^a}{\partial s}\frac{\partial \pi^b}{\partial t}(s,t)$$

$$= \left(g^{\pi}_{ss}\,g^{\pi}_{tt} - g^{\pi}_{st}\,g^{\pi}_{ts}\right)(s,t) \equiv \det_{(2)} I_{\pi}(s,t)$$

DLA

$$\begin{cases} s^1 \equiv s,\ s^2 \equiv t \\ \sigma^1 = \sigma,\ \sigma^2 = \tau \end{cases}$$

DEFINIUJEMY

$$\left(\frac{\partial \pi^a}{\partial s^i} = \frac{\partial \tilde{\pi}^a}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial s^i}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}$$ JAKOBIAN (MACIERZ)

$$= \det_{(2)}\left(\frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}^{T}\cdot I_{\tilde{\pi}}(\sigma,\tau)(s,t)\cdot\frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}\right) = \left(\det_{(2)}\frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}\right)^{2}\cdot \det_{(2)} I_{\tilde{\pi}}(\sigma,\tau)(s,t)$$

$$\equiv \left(\det_{(2)} \frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}\right)^2 \cdot \left\| N_{\tilde{\pi}}(\sigma,\tau)(s,t) \right\|^2_{\delta_E^{(3,0)}}$$

$2°$ $$N_\pi(s,t) \equiv T_{(s,t)}\pi(\partial_s) \times T_{(s,t)}\pi(\partial_t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \pi^i}{\partial s} \frac{\partial \pi^j}{\partial t} \partial_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \pi^i}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial \pi^j}{\partial \sigma^\beta} \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial s} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial t} \partial_k$$

WKŁAD DO SUMY OD $\alpha=\beta$ $= 0$
WOBEC ANTYSYMETRII ε_{ijk}

$$= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \pi^i}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi^j}{\partial \tau} \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \frac{\partial \pi^j}{\partial \sigma} \frac{\partial \tau}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \partial_k$$

$$\equiv \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \pi^i}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi^j}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial s} \right) \partial_k$$

$$\equiv \det_{(2)} \frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)} \cdot \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \pi^i}{\partial \sigma} \frac{\partial \pi^j}{\partial \tau} \partial_k \equiv \det_{(2)} \frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)} \cdot N_{\tilde{\pi}}(\sigma,\tau)(s,t)$$

OSTATECZNIE

$$n\big(\pi(s,t)\big) = \frac{\det_{(2)} \frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)} \cdot N_{\tilde{\pi}}(\sigma,\tau)(s,t)}{\left|\det_{(2)} \frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}\right| \cdot \left\| N_{\tilde{\pi}}(\sigma,\tau)(s,t) \right\|_{\delta_E^{(3,0)}}}$$

$$= \operatorname{sign}\left(\det_{(2)} \frac{\partial(\sigma,\tau)}{\partial(s,t)}\right) \cdot n\big(\tilde{\pi}(\sigma,\tau)\big)(s,t) \,,$$

JEŚLI ZATEM OGRANICZYMY SIĘ DO REPARAMETRYZACJI ZACHOWUJĄCYCH ORIENTACJĘ, TO $n\big(\pi(s,t)\big) = n\big(\pi(\sigma,\tau)\big)(s,t)$, W PRZECIWNYM RAZIE ZACHOWYWANY JEST JEDYNIE KIERUNEK (CO NIE ZASKAKUJE WOBEC WYKORZYSTANIA $\times$ W DEFINICJI n).

RÓŻNICZKUJĄC TOŻSAMOŚĆ

$$0 = \delta_E^{(3,0)}\left(T_{(\cdot,\cdot)}\pi\left(\frac{\partial}{\partial s^i}\right), n(\pi(\cdot,\cdot))\right) \equiv \delta_E^{(3,0)}(\partial_i\pi, n\circ\pi)$$

WZGLĘDEM s^j, OTRZYMUJEMY — WOBEC STAŁOŚCI $\delta_E^{(3,0)}$ —

$$0 = \delta_E^{(3,0)}(\partial^2_{ij}\pi, n\circ\pi) + \delta_E^{(3,0)}(\partial_i\pi, \partial_j(n\circ\pi))$$

$$\equiv \delta_E^{(3,0)}(\partial^2_{ij}\pi, n\circ\pi) + \delta_E^{(3,0)}(T\pi(\partial_i), T(n\circ\pi)(\partial_j))$$

ZRÓŻNICZKOWANIE TOŻSAMOŚCI

$0 = \delta_E^{(3,0)}(n\circ\pi, n\circ\pi)$ DAJE NAM $0 = \delta_E^{(3,0)}(T(n\circ\pi)(\partial_j), n\circ\pi)$,

CZYLI $T(n\circ\pi)(\partial_j) \in T_\pi\pi(\mathcal{P})$ (WEKTORY PROSTOPADŁE DO $n\circ\pi$ SĄ — Z PRZYCZYN WYMIAROWYCH — STYCZNE DO $\pi(\mathcal{P})$)

ALE π JEST IMMERSJĄ, CZYLI $T_{(s,t)}\pi$ JEST IZOMORFIZMEM P
NA OBRAZ, TYMCZASEM $T_{(s,t)}(n\circ\pi)(\partial_j) \in \operatorname{Im} T_{(s,t)}\pi$, ZATEM
ISTNIEJE JEDNOZNACZNIE OKREŚLONY WEKTOR $v^j_{s,t}$ STYCZNY
DO $\mathcal{P}$ W (s,t) O WŁASNOŚCI

$$T_{(s,t)}\pi\left(v^j_{s,t}\right) = T_{(s,t)}(n\circ\pi)(\partial_j),$$

CO MOŻEMY ZAPISAĆ W POSTACI $v^j_{s,t} = \left(T\pi^{-1}\circ Tn\circ T\pi\right)(s,t)(\partial_j)$,

$$\triangleq \hat{\Sigma}_{(s,t)}(\partial_j)$$

OPERATOR KSZTAŁTU WEINGARTENA

ZATEM

$$\delta_E^{(3,0)}\left(T\pi(\partial_i),\, T\pi\circ\hat{\Sigma}(\partial_j)\right)$$

$$\triangleq -\delta_E^{(3,0)}\left(\partial^2_{ij}\pi,\, n\circ\pi\right)$$

WZIĄWSZY POD UWAGĘ DEFINICJĘ I_π, PRZEPISUJEMY (9)

POWYŻSZE W POSTACI:

$$\mathrm{I}_\pi\left(\partial_i, \hat{\Sigma}(\partial_j)\right) = -\,\delta_E^{(3,0)}\left(\partial^2_{ij}\pi, n\circ\pi\right)$$

$$\|$$

$$\mathrm{II}_\pi(\partial_i, \partial_j)$$

II FORMA FUNDAMENTALNA POWIERZCHNI

JEST ZATEM

$$\mathrm{I}_\pi = \delta_E^{(3,0)}\left(\partial_i\pi, \partial_j\pi\right) ds^i \otimes ds^j$$

$$\mathrm{II}_\pi = -\,\delta_E^{(3,0)}\left(n\circ\pi, \partial^2_{ij}\pi\right) ds^i \otimes ds^j$$

ZAUWAŻMY, ŻE TERAZ MOŻEMY JUŻ BEZ TRUDU WYZNACZYĆ SAM OPERATOR WEINGARTENA WZGL. BAZ (10)

$\{\partial_i\} \to \{\partial_i\}$: NIECH $\hat{\Sigma}(\partial_i) =: \hat{\Sigma}_{ij}\, \partial_j$,

$\overset{\shortparallel}{[\hat{\Sigma}]}$ TJ. $\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_{ij}\, ds^i \otimes \partial_j$,

A WTEDY DEFINICJĘ II_π PRZEPISZEMY W POSTACI

$$\hat{\Sigma}_{jk}\, \underset{\overset{\shortparallel}{I_\pi(\partial_i,\partial_k)[\hat{\Sigma}]^T_{kj}}}{I_\pi(\partial_i,\partial_k)} \equiv I_\pi(\partial_i, \hat{\Sigma}(\partial_j)) \equiv \mathrm{II}_\pi(\partial_i,\partial_j) \equiv [\mathrm{II}_\pi]_{ij} ,$$

$$I_\pi(\partial_i,\partial_k)[\hat{\Sigma}]^T_{kj} \overset{\shortparallel}{=} [I_\pi]_{ik}[\hat{\Sigma}]^T_{kj}$$

TJ.

(11)

$$[\mathrm{II}_\pi] = [\mathrm{I}_\pi] \cdot [\hat{\Sigma}]^T \,,$$ GDZIE WSZYSTKIE TRZY MACIERZE REPREZENTUJĄ OBIEKTY TENSOROWE W BAZIE $\{\partial_i\}$

$$\Rightarrow [\hat{\Sigma}] = \left([\mathrm{I}_\pi]^{-1} \cdot [\mathrm{II}_\pi]\right)^T = [\mathrm{II}_\pi] \cdot [\mathrm{I}_\pi]^{-1}$$

(BO $\mathrm{I}_\pi, \mathrm{II}_\pi$ SYMETRYCZNE)

ZADAJMY TERAZ NATURALNE PYTANIE O III FORMĘ FUNDAMENTALNĄ POWIERZCHNI :

$$\mathrm{III}_\pi := \mathrm{I}_\pi \circ (\hat{\Sigma} \otimes \hat{\Sigma}) .$$

STW. $\mathrm{III}_\pi = \mathrm{tr}(\hat{\Sigma}) \cdot \mathrm{II}_\pi - \det_{(2)}(\hat{\Sigma}) \cdot \mathrm{I}_\pi$

D: $\hat{\Sigma}$ JEST SYMETRYCZNY (BYŁO NA WYKŁADZIE, WIĘC NIE DOWODZĘ), PRZETO MA ORTOGONALNĄ BAZĘ WŁASNĄ (w $T_{(s,t)}\mathcal{P}$)

OZN. $\xi_a \in T_{(s,t)}\mathcal{P}$: $\hat{\Sigma}(\xi_a) = \lambda_a \triangleright \xi_a$, $a \in \{1,2\}$

$\{\lambda_1, \lambda_2\} \equiv \mathrm{Sp}\,\hat{\Sigma}$.

WÓWCZAS

$$\mathrm{III}_\pi(\xi_1, \xi_1) \equiv \mathrm{I}_\pi(\hat{\Sigma}(\xi_1), \hat{\Sigma}(\xi_1)) = \lambda_1^2\, \mathrm{I}_\pi(\xi_1, \xi_1)$$

$$\mathrm{tr}(\hat{\Sigma}) \cdot \mathrm{II}_\pi(\xi_1, \xi_1) - \det_{(2)}(\hat{\Sigma}) \cdot \mathrm{I}_\pi(\xi_1, \xi_1)$$

$$\equiv (\lambda_1 + \lambda_2)\, \mathrm{I}_\pi(\xi_1, \hat{\Sigma}(\xi_1)) - \lambda_1 \lambda_2\, \mathrm{I}_\pi(\xi_1, \xi_1)$$

$$=(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\lambda_1 \mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_1)-\lambda_1\lambda_2 \mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_1)=\lambda_1^2\mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_1)$$ (13)

JEST ZATEM $\mathrm{III}_\pi(\xi_1,\xi_1) = tr(\hat{\Sigma})\,\mathrm{II}_\pi(\xi_1,\xi_1)-det_{(2)}(\hat{\Sigma})\,\mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_1)$

I ANALOGICZNIE

$$\mathrm{III}_\pi(\xi_2,\xi_2) = tr(\hat{\Sigma})\,\mathrm{II}_\pi(\xi_2,\xi_2)-det_{(2)}(\hat{\Sigma})\,\mathrm{I}_\pi(\xi_2,\xi_2).$$

NA KONIEC PORÓWNUJEMY

$$\mathrm{III}_\pi(\xi_1,\xi_2)\equiv \mathrm{I}_\pi\left(\hat{\Sigma}(\xi_1),\hat{\Sigma}(\xi_2)\right)=\lambda_1\lambda_2\mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_2)\overset{\xi_1\perp\xi_2\,!}{=}0$$

$$3\quad tr(\hat{\Sigma})\cdot\mathrm{II}_\pi(\xi_1,\xi_2)-det_{(2)}(\hat{\Sigma})\cdot\mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_2)$$

$$=(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_2\,\mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_2)-\lambda_1\lambda_2\,\mathrm{I}_\pi(\xi_1,\xi_2)=0 \qquad \square$$

(14)

OZN. $K := \det_{(2)} \hat{\Sigma}$ KRZYWIZNA GAUSSA POWIERZCHNI

$H := \operatorname{tr} \hat{\Sigma}$ KRZYWIZNA ŚREDNIA POWIERZCHNI

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI PODDAMY OBA NIEZMIENNIKI PROSTEJ INTERPRETACJI...

KAŻDĄ POWIERZCHNIĘ MOŻEMY LOKALNIE PRZEDSTAWIĆ JAKO WYKRES FUNKCJI, TJ. ISTNIEJĄ LOKALNE WSPÓŁRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE (!) W $\mathbb{R}^3$, W KTÓRYCH MOŻEMY WYBRAĆ PARAMETRYZACJĘ (STYCZNOŚCIOWĄ) $\pi : P \ni (s,t) \longmapsto (s, t, f(s,t))$, A W NICH

$$\partial_s \pi = (1, 0, \partial_s f), \quad \partial_t \pi = (0, 1, \partial_t f) \quad \text{ORAZ}$$

$$\partial^2_{ss}\pi = (0, 0, \partial^2_{ss} f), \quad \partial^2_{tt}\pi = (0, 0, \partial^2_{tt} f), \quad \partial^2_{st}\pi = (0, 0, \partial^2_{st} f),$$

A NADTO
$$n = \frac{\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & \partial_s f \\ 0 & 1 & \partial_t f \end{vmatrix}}{\left\| \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & \partial_s f \\ 0 & 1 & \partial_t f \end{vmatrix} \right\|} = \frac{(-\partial_s f, -\partial_t f, 1)}{\|(-\partial_s f, -\partial_t f, 1)\|} = \frac{(-\partial_s f, -\partial_t f, 1)}{\sqrt{1 + (\partial_s f)^2 + (\partial_t f)^2}}$$

STĄD DALEJ $[\mathrm{I}_\pi] = \begin{pmatrix} 1+(\partial_s f)^2 & \partial_s f \cdot \partial_t f \\ \partial_s f \cdot \partial_t f & 1+(\partial_t f)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det_{(2)}} 1+(\partial_s f)^2+(\partial_t f)^2$

$$\Rightarrow [\mathrm{I}_\pi]^{-1} = \frac{1}{1+(\partial_s f)^2+(\partial_t f)^2}\begin{pmatrix} 1+(\partial_t f)^2 & -\partial_s f \cdot \partial_t f \\ -\partial_s f \cdot \partial_t f & 1+(\partial_s f)^2 \end{pmatrix}$$

ORAZ $[\mathrm{II}_\pi] = -\dfrac{1}{\sqrt{1+(\partial_s f)^2+(\partial_t f)^2}}\begin{pmatrix} \partial^2_{ss} f & \partial^2_{st} f \\ \partial^2_{st} f & \partial^2_{tt} f \end{pmatrix}$,

NA TYM ETAPIE MOGLIBYŚMY BEZ TRUDU WYZNACZYĆ $[\hat{\Sigma}]$, UCZYNIMY TO JEDNAK DOPIERO PO DALSZEJ ADAPTACJI WSPÓŁRZĘDNYCH...

JEST CAŁKOWICIE JASNE, ŻE PŁASZCZYZNĘ (x^1, x^2), NAD KTÓRĄ (17)
ZAWISŁ WYKRES f, MOŻEMY OBRÓCIĆ TAK, BY W INTERESUJĄCYM
NAS PUNKCIE $\pi(s_*, t_*) \ni p_*$ MIEĆ $n(p_*) \equiv \partial_{x^3}$.
TAK ZAADAPTOWANE WSPÓŁRZĘDNE OKREŚLAMY MIANEM
WSPÓŁRZĘDNYCH MONGE'A. W NICH

$$T_{(s_*, t_*)}\pi(\partial_s) = \partial_{x^1} + \partial_s f(s_*, t_*)\,\partial_{x^3} \equiv \partial_{x^1} + \partial_s f(s_*, t_*)\, n(p_*)$$

ORAZ $T_{(s_*, t_*)}\pi(\partial_t) = \partial_{x^1} + \partial_t f(s_*, t_*)\, n(p_*)$, ZATEM KONIECZNIE

$$T_{(s_*, t_*)} f \equiv 0 .$$

WTEDY JEDNAK UZYSKANE UPRZEDNIEJ FORMUŁY WYDATNIE SIĘ UPRASZCZAJĄ...

$$[\mathrm{I}_\pi](s_*,t_*) = \mathbb{I}_2 \quad \text{i} \quad [\mathrm{II}_\pi](s_*,t_*) = -\begin{pmatrix} \partial^2_{ss} f & \partial^2_{st} f \\ \partial^2_{st} f & \partial^2_{tt} f \end{pmatrix}(s_*,t_*),$$

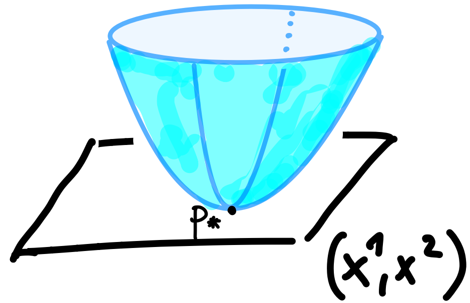
A NADTO $[\hat{\Sigma}](s_*,t_*) \equiv [\mathrm{II}_\pi](s_*,t_*)$, PRZETO

$$K(s_*,t_*) \equiv \det{}_{(2)}[\hat{\Sigma}](s_*,t_*) \equiv \det{}_{(2)}\Big(\underbrace{\mathrm{Hess}(f)}_{\text{HESSIAN}}(s_*,t_*)\Big)$$

TA IDENTYFIKACJA DAJE NAM – W POŁĄCZENIU ZE ZNANĄ Z I ROKU ANALIZY INTERPRETACJĄ FORMY BILINIOWEJ (SYM.) Hess(f) – PROSTĄ INTERPRETACJĘ JAKOŚCIOWĄ MOŻLIWYCH TYPÓW $Sp\,\hat{\Sigma}$, CZYLI KRZYWIZN GŁÓWNYCH...

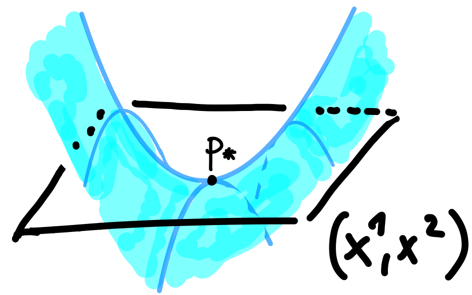
$1^\circ \; K(s_*, t_*) > 0$

PUNKT ELIPTYCZNY



$2^\circ \; K(s_*, t_*) < 0$

PUNKT HIPERBOLICZNY („MAŁPIE SIODŁO")

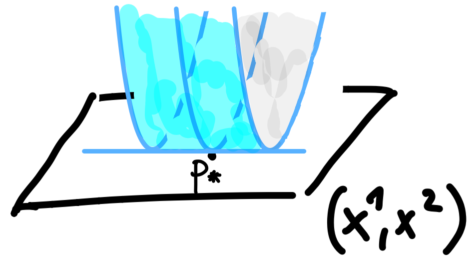


20

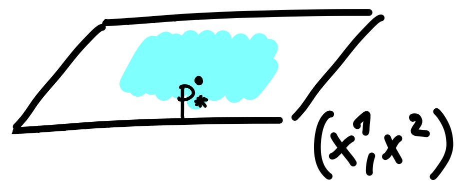
3° $K(s_*, t_*) = 0 \wedge \hat{\Sigma}(s_*, t_*) \neq 0$

$(\mathrm{rk}\, \mathrm{Hess}(f)(s_*, t_*) = 1)$

PUNKT PARABOLICZNY



4° $\hat{\Sigma}(s_*, t_*) \equiv 0$



PUNKT (PĘPKOWY) PŁASKI

W PRZYPADKU ZWYRODNIAŁEGO, LECZ $\neq 0$ WIDMA $\hat{\Sigma}$ MÓWIMY O PUNKCIE PĘPKOWYM (UMBILLICZNYM) WŁAŚCIWYM.

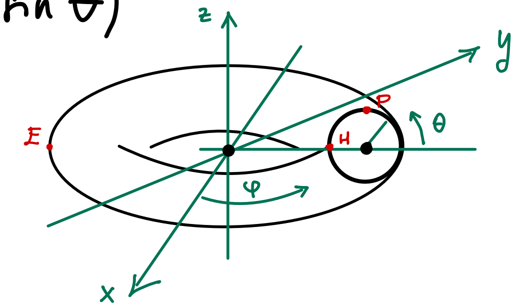
(S^2 ON MY MIND...)

WYJĄTKOWO BOGATYM STUDIUM TYPÓW JEST POCZCIWY 2-TOPYC ...

(ANI LECH, ANI ČECH)

OTO - PYC :

$$\pi : [0, 2\pi[^{\times 2} \ni (\varphi, \theta) \longmapsto \big((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta\big)$$



LICZYMY PO KOLEI : $\mathbb{T}^2$

STYCZNA :

$$\begin{cases} T_{(\varphi,\theta)}\pi(\partial_\varphi) = \big(-(2+\cos\theta)\sin\varphi, (2+\cos\theta)\cos\varphi, 0\big) \\ T_{(\varphi,\theta)}\pi(\partial_\theta) = \big(-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\big) \end{cases}$$

I FORMA FUNDAMENTALNA

$$\mathrm{I}_\pi(\varphi,\theta) = (2+\cos\theta)^2 d\varphi \otimes d\varphi + d\theta \otimes d\theta$$

WERSOR NORMALNY

$$N_\pi(\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -(2+\cos\theta)\sin\varphi & (2+\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix} = (2+\cos\theta)(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad n(\pi(\varphi,\theta)) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

II FORMA FUNDAMENTALNA

$$\partial^2_{\varphi\varphi}\pi(\varphi,\theta) = (-(2+\cos\theta)\cos\varphi, -(2+\cos\theta)\sin\varphi, 0)$$

$$\partial^2_{\theta\theta}\pi(\varphi,\theta) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$\partial^2_{\varphi\theta}\pi(\varphi,\theta) = (\sin\theta\sin\varphi, -\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{II}_\pi(\varphi,\theta) = (2+\cos\theta)\cos\theta\, d\varphi\otimes d\varphi + d\theta\otimes d\theta$$

OPERATOR KSZTAŁTU

$$[\hat{\Sigma}](\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} (2+\cos\theta)\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2+\cos\theta)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SYMETRIA WALCOWA $\mathbb{T}^2$ ZNAJDUJE ODZWIERCIEDLENIE W NIEZALEŻNOŚCI STRUKTUR: I_π, II_π i $\hat{\Sigma}$ OD φ.

ZNAJDUJEMY WYRÓŻNIONE PUNKTY:

$$E: \quad \theta = 0: \quad [\hat{\Sigma}](\varphi,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H: \quad \theta = \pi: \quad [\hat{\Sigma}](\varphi,\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(PATRZ: RYS.)

$$P: \quad \theta = \frac{\pi}{2}: \quad [\hat{\Sigma}](\varphi,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$