

TEORIA GRUP II W CZASACH ZARAŻY

2., 3., 4. I 7. WYKŁAD ZDALNY

LIE TO ME, CARTAN!

(WRAZ Z UZUPEŁNIENIEM)

SPIS TREŚCI

1. Grupy Liego i rachunek różniczkowy Cartana	1
2. Uzupełnienie: Rozmaitości z działaniem grupy Liego	22
Dodatek A. Odzworowania	25
Dodatek B. Iloczyn półprosty grup	25

1. GRUPY LIEGO I RACHUNEK RÓŻNICZKOWY CARTANA

Ostatni wykład dostarczył rzetelnej motywacji do studiowania grup, których elementy zależą w sposób ciągły lub zgoła gładki od (zbioru) parametrów. Naturalnego uogólnienia i formalizacji naszych rozważań dostarcza teoria grup Liego, tj. zbiorów wyposażonych w uzgodnione wzajem struktury: algebraiczną strukturę grupy (wprowadzoną na pierwszorocznym wykładzie z Algebry) i geometryczną strukturę rozmaitości różniczkowalnej (wprowadzoną na drugorocznym wykładzie z Geometrii różniczkowej). Uzgodnienie takie ma daleko idące konsekwencje dla stycznościowego rachunku różniczkowego na tych rozmaitościach, którego liczne *strukturalne* zastosowania w mechanice klasycznej (np. teoria odwzorowań momentowych w opisie symetrii i redukcji symplektycznych) i teorii pola (np. cechowanie symetrii sztywnych, zw. też globalnymi, ale także nieliniowe realizacje symetrii istotne w opisie zjawisk takich jak mechanizm Higgsa czy odwrotny mechanizm Higgsa) czynią studium jego podstawowych własności nieodzownym elementem niniejszego kursu. Z owego studium wyprowadzimy naturalnie pojęcie (stycznościowej) algebry Liego (grupy Liego), którego desygnat zostanie następnie poddany abstrakcji i klasyfikacji, co będzie stanowiło punkt wyjścia do dyskusji teorii reprezentacji o fundamentalnym znaczeniu fizycznym (w kontekście, m.in., klasycznej teorii oddziaływań fundamentalnych i kwantowomechanicznej klasyfikacji pól materii i nośników oddziaływań).

Zacznijmy od pojęć podstawowych

Definicja 1. Grupa topologiczna to grupa

$$(G, m \equiv \cdot, \text{Inv} \equiv (\cdot)^{-1}, \bullet \mapsto e),$$

której nośnik G jest przestrzenią topologiczną, a odwzorowania strukturalne m i Inv są ciągłe. **Podgrupa topologiczna** grupy topologicznej $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ to grupa topologiczna $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$, której nośnik H jest podprzestrzenią topologiczną przestrzeni G . **Homomorfizm topologiczny** między grupami topologicznymi $(G_1, m_1, \text{Inv}_1, \bullet_1 \mapsto e_1)$ i $(G_2, m_2, \text{Inv}_2, \bullet_2 \mapsto e_2)$ to homomorfizm grup ciągły względem topologii dziedziny i przeciwdziedziny.

Analogicznie definiujemy **grupę Liego** jako grupę, której nośnik jest rozmaitością gładką, a odwzorowania strukturalne m i Inv są klasy C^∞ . **Podgrupa Liego** grupy Liego $(G, m, \text{Inv}, \bullet \mapsto e)$ to grupa Liego $(H, m|_{H \times H}, \text{Inv}|_H, \bullet \mapsto e)$, której nośnik H jest podrozmaitością klasy C^∞ rozmaitości G . **Homomorfizm grup Liego** to homomorfizm grup gładki względem struktury różniczkowej dziedziny i przeciwdziedziny.

Przykłady 1.

(1) $\mathbb{R}^{x^n}$

- (2) $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$
- (3) $\mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$
- (4) grupa Poincarégo z App. B
- (5) Grupa liniowa główna $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ dziedziczy topologię i strukturę różniczkową z przestrzeni $\mathbb{R}(n) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$, w której jest zanurzona jako podzbiór otwarty $\det_{(n)}^{-1}(\mathbb{R}_{\neq 0})$ (wszak $\det_{(n)} : \mathbb{R}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem wielomianowo zależnym od wyrazów macierzy, więc ciągłym)
- (6) wiele innych, które zostaną przedstawione na ćwiczeniach.

Lemat 1. Przyjmijmy zapis Def.1 i niechaj G będzie grupą topologiczną. Dla dowolnego elementu $g \in G$ i dowolnego otoczenia otwartego $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$ elementu neutralnego $e \in G$ istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_g \in \mathcal{T}(G)$ elementu g spełniające warunek

$$m_G \circ (\mathrm{Inv}_G \times \mathrm{id}_G)(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e.$$

Dowód: Odwzorowanie $f \equiv m_G \circ (\mathrm{Inv}_G \times \mathrm{id}_G)$ jest ciągle (w topologii produktowej na swej dziedzinie), przeto istnieją otoczenia otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ elementu g o własności $f(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_e$. Otwarte otoczenie $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 =: \mathcal{O}_g$ spełnia pożądaną warunek $f(\mathcal{O}_g \times \mathcal{O}_g) \subset \mathcal{O}_e$. $\square$

Stwierdzenie 1. Przyjmijmy zapis Def.1 i niechaj $(G, m, \mathrm{Inv}, \bullet \mapsto e)$ będzie grupą Liego. Czwórka

$$(\mathrm{T}G, \mathrm{T}m, \mathrm{T}\mathrm{Inv}, (\bullet, 0) \mapsto 0_{\mathrm{T}_e G} \in \mathrm{T}_e G)$$

jest grupą Liego noszącą miano **stycznej grupy Liego**. Rzut kanoniczny $\pi_{\mathrm{T}G} : \mathrm{T}G \rightarrow G$ oraz cięcia zerowe $\mathbf{0}_{\mathrm{T}G}$ są homomorfizmami grup Liego spełniającymi relację

$$(1) \quad \pi_{\mathrm{T}G} \circ \mathbf{0}_{\mathrm{T}G} = \mathrm{id}_G.$$

Dowód: Chwila zastanowienia uświadamia nam, że przyporządkowanie rozmaitości gładkiej jej wiązki stycznej ma charakter funktorialny (zrozumienie użytego tu niezwykle ekonomicznego skrótu pojęciowego umożliwia krótkie wprowadzenie do języka teorii kategorii, które załączam w oddzielnym pliku). Funktorialność T zapewnia transport nie tylko pełnej struktury (czyli struktury gładkiej i odwzorowań) grupy Liego G , ale także jej aksjomatyki – funktorialnym obrazem diagramów przemiennych wyrażających aksjomaty G są analogiczne diagramy dla $\mathrm{T}G$. Jedynym zatem nietrywialnym punktem dowodzonego stwierdzenia jest ten mówiący o homomorficznym charakterze rzutu kanonicznego i cięcia zerowego oraz ich wzajemnej relacji. Zaczniemy od rzutu kanonicznego. Zważywszy definicję odwzorowania stycznego, stwierdzamy, że dla dowolnych $(g, h) \in G^{\times 2}$ jest

$$\mathrm{T}_{(g,h)}m : \mathrm{T}_{(g,h)}(G \times G) \cong \mathrm{T}_g G \oplus \mathrm{T}_h G \rightarrow \mathrm{T}_{m(g,h)}G,$$

zatem

$$\pi_{\mathrm{T}G} \circ \mathrm{T}m = m \circ (\pi_{\mathrm{T}G} \times \pi_{\mathrm{T}G}),$$

a to jest właśnie definiująca własność homomorfizmu grup, przy czym wobec gładkości m także odwzorowanie styczne jest gładkie, mamy przeto do czynienia z homomorfizmem grup Liego. Aby postąpić dalej, musimy wejrzeć w strukturę $\mathrm{T}_{(g,h)}m$. Dla dowolnego elementu $g \in G$ zdefiniujemy odwzorowania gładkie

$$\ell_g : G \curvearrowright : h \mapsto m(g, h), \quad \wp_g : G \curvearrowright : h \mapsto m(h, g).$$

Wybermy lokalne mapy: $\kappa_g \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_g \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$, $n = \dim G$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_g$ punktu g , $\kappa_h \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n) : \mathcal{O}_h \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_h \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_h$ punktu h oraz $\kappa_{g \cdot h} \equiv (z^1, z^2, \dots, z^n) : \mathcal{O}_{g \cdot h} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{g \cdot h} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$ na

pewnym otoczeniu otwartym $\mathcal{O}_{g \cdot h}$ punktu $g \cdot h$, a wtedy – dla dowolnych $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g) \in \mathbb{T}_g G$ i $W = W^a \frac{\partial}{\partial y^a}(h) \in \mathbb{T}_h G$ – dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(g,h)} m(V, W) &= V^i \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h) \\ &\quad + W^a \frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h)) \frac{\partial}{\partial z^\mu}(g \cdot h). \end{aligned}$$

W wyrażeniach $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial x^i}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$ i $\frac{\partial(z^\mu \circ m \circ (\kappa_g^{-1} \times \kappa_h^{-1}))}{\partial y^a}(\kappa_g(g), \kappa_h(h))$ rozpoznajemy elementy macierzy odwzorowań liniowych $\mathbb{T}_g \wp_h$ i $\mathbb{T}_h \ell_g$, odpowiednio, możemy zatem przepisać powyższe w wygodnej postaci

$$(2) \quad \mathbb{T}_{(g,h)} m = \mathbb{T}_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + \mathbb{T}_h \ell_g \circ \text{pr}_2.$$

Na tej podstawie wnioskujemy o słuszności równości

$$\begin{aligned} \mathbb{T}m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \mathbf{0}_{\mathbb{T}G})(g, h) &= \mathbb{T}_{(g,h)} m(0_{\mathbb{T}_g G}, 0_{\mathbb{T}_h G}) = \mathbb{T}_g \wp_h(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_h \ell_g(0_{\mathbb{T}_h G}) \\ &= 0_{\mathbb{T}_{g \cdot h} G} + 0_{\mathbb{T}_{g \cdot h} G} = 0_{\mathbb{T}_{g \cdot h} G} \equiv \mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \circ m(g, h), \end{aligned}$$

która dokumentuje homomorficzny charakter $\mathbf{0}_{\mathbb{T}G}$, przy czym – rzecz jasna – mamy tu do czynienia z homomorfizmem gładkim. Tożsamość (1) jest oczywista. $\square$

Uwaga 1. Ażeby do końca oswoić styczną grupę Liego, znajdziemy jeszcze jawną postać morfizmu $\mathbb{T} \text{Inv}$. W tym celu roważymy tożsamości

$$m \circ (\text{id}_G \times \text{Inv}) \circ \Delta = \eta = m \circ (\text{Inv} \times \text{id}_G) \circ \Delta,$$

w których zapisie użyliśmy odwzorowań (jawnie) gładkich

$$\Delta : G \longrightarrow G \times G : g \longmapsto (g, g), \quad \eta : G \curvearrowright : g \longmapsto e,$$

a których funktorialnym obrazem względem $\mathbb{T}$ jest

$$\mathbb{T}m \circ (\text{id}_{\mathbb{T}G} \times \mathbb{T} \text{Inv}) \circ \mathbb{T} \Delta = 0 = \mathbb{T}m \circ (\mathbb{T} \text{Inv} \times \text{id}_{\mathbb{T}G}) \circ \mathbb{T} \Delta.$$

Uwzględniając Równ. (2), wyprowadzamy stąd tożsamości (dla dowolnych $g \in G$ i $V \in \mathbb{T}_g G$)

$$\mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}}(V) + \mathbb{T}_{g^{-1}} \ell_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) = 0_{\mathbb{T}_e G} = \mathbb{T}_{g^{-1}} \wp_g \circ \mathbb{T}_g \text{Inv}(V) + \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}(V),$$

czyli

$$\mathbb{T}_g \text{Inv} = -\mathbb{T}_e \ell_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \wp_{g^{-1}} = -\mathbb{T}_e \wp_{g^{-1}} \circ \mathbb{T}_g \ell_{g^{-1}}.$$

Godzi się przy tym podkreślić, że ostatnia równość nie wymaga powyższego wyprowadzenia, wynika ona bowiem wprost ze wzajemnej przemienności ℓ_g i $\wp_h$ dla dowolnych $g, h \in G$.

Stwierdzenie 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis i zdefiniujmy **działanie dołączone**

$$\text{Ad} : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \longmapsto m(m(g, h), \text{Inv}(g)) \equiv \text{Ad}_g(h).$$

Odwzorowanie

$$\mathbb{T}_e \ell : G_{\mathbb{T}_e \text{Ad}} \times \mathbb{T}_e G \longrightarrow \mathbb{T}G : (g, X) \longmapsto \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

jest izomorfizmem grup Liego.

Dowód: Na podstawie Równ. (2) możemy przepisać

$$\mathbb{T}_{(g,e)} m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G})(g, X) = \mathbb{T}_{(g,e)} m(0_{\mathbb{T}_g G}, X) = \mathbb{T}_g \wp_e(0_{\mathbb{T}_g G}) + \mathbb{T}_e \ell_g(X)$$

$$(4) \quad = \mathbb{T}_e \ell_g(X) \equiv \mathbb{T}_e \ell.(g, X),$$

czyli

$$\mathbb{T}_e \ell = \mathbb{T}_{(g,e)} m \circ (\mathbf{0}_{\mathbb{T}G} \times \text{id}_{\mathbb{T}_e G}),$$

co dowodzi gładkości $T_e\ell$. W połączeniu z obserwacją

$$(T_e\ell)^{-1} = (\pi_{TG}, T_{\pi_{TG}(\cdot)}\ell_{\text{Inv} \circ \pi_{TG}(\cdot)}(\cdot)),$$

którą weryfikujemy w bezpośrednim rachunku (w którym $v \in TG$):

$$\begin{aligned} & (\pi_{TG}, T_{\pi_{TG}(\cdot)}\ell_{\text{Inv} \circ \pi_{TG}(\cdot)}(\cdot)) \circ T_e\ell(g, X) \\ &= (\pi_{TG}, T_{\pi_{TG}(\cdot)}\ell_{\text{Inv} \circ \pi_{TG}(\cdot)}(\cdot)) \circ T_e\ell_g(X) = (g, T_g\ell_{g^{-1}} \circ T_e\ell_g(X)) \\ &= (g, T_e(\ell_{g^{-1}} \circ \ell_g)(X)) = (g, T_e\ell_{g^{-1}.g}(X)) = (g, T_e\ell_e(X)) = (g, X), \\ & T_e\ell \circ (\pi_{TG}, T_{\pi_{TG}(\cdot)}\ell_{\text{Inv} \circ \pi_{TG}(\cdot)}(\cdot))(v) \\ &= T_e\ell_{\pi_{TG}(v)} \circ T_{\pi_{TG}(v)}\ell_{\pi_{TG}(v)^{-1}}(v) = T_{\pi_{TG}(v)}(\ell_{\pi_{TG}(v)} \circ \ell_{\pi_{TG}(v)^{-1}})(v) \\ &= T_{\pi_{TG}(v)}(\ell_e)(v) = v, \end{aligned}$$

przekonuje nas to o dyfeomorficznym charakterze tego odwzorowania (zależność $(T_e\ell)^{-1}$ od argumentu jest jawnie gładka). Pozostaje zatem upewnić się, że mamy do czynienia z homomorfizmem grup. W tym celu obliczamy – dla dowolnych $X, Y \in T_eG$ oraz $g, h \in G$, a w odwołaniu do Równ. (2) –

$$\begin{aligned} & T_e\ell((g, X)_{T_e\text{Ad} \cdot}(h, Y)) = T_e\ell(g \cdot h, T_e\text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) \\ &= T_e\ell_{g.h}(T_e\text{Ad}_{h^{-1}}(X) + Y) = T_e(\ell_{g.h.h^{-1}} \circ \wp_h)(X) + T_h\ell_g \circ T_e\ell_h(Y) \\ &= T_e(\wp_h \circ \ell_g)(X) + T_h\ell_g \circ T_e\ell_h(Y) = T_g\wp_h(T_e\ell_g(X)) + T_h\ell_g(T_e\ell_h(Y)) \\ &\equiv T_{(g,h)}m(T_e\ell_g(X), T_e\ell_h(Y)) \equiv T_{(g,h)}m(T_e\ell(g, X), T_e\ell(h, Y)). \end{aligned}$$

Warto odnotować na marginesie, że $T_e\ell$ jest stycznościowym odpowiednikiem dyfeomorfizmu $\ell. \upharpoonright_{G \times \{e\}} : G \times \{e\} \rightarrow G$. $\square$

Definicja 2. Przyjmijmy dotychczasowy zapis. **Pole wektorowe lewoniezmiennicze** na grupie Liego G to pole wektorowe $\mathcal{V}_L \in \Gamma(TG)$ o własności

$$\forall_{g \in G} : \ell_g * \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Analogicznie, **pole wektorowe prawoniezmiennicze** na G to pole wektorowe $\mathcal{V}_R \in \Gamma(TG)$ o własności

$$\forall_{g \in G} : \wp_g * \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Uwaga 2. Jako że powyższe wzory prowadzą czasami do nieporozumień, wypiszemy drugi z nich w jawnej postaci. Oto więc dla dowolnych $g, h \in G$ zachodzi w ogólności

$$(\ell_g * \mathcal{V})(h) \equiv T_{\ell_g^{-1}(h)}\ell_g(\mathcal{V}(\ell_g^{-1}(h))) = T_{g^{-1}.h}\ell_g(\mathcal{V}(g^{-1} \cdot h)),$$

przeto warunek lewoniezmienniczości przyjmuje postać

$$T_{g^{-1}.h}\ell_g(\mathcal{V}(g^{-1} \cdot h)) = \mathcal{V}(h).$$

Innymi słowy, przesuwając stycznościowo wzgl. lewej translacji ℓ_g na grupie wartość pola wektorowego w dowolnym punkcie otrzymujemy wektor w punkcie poddanym translacji tożsamej z wartością tegoż pola w tym punkcie.

Stwierdzenie 3. Zbiory

$$\mathfrak{X}_L(G) := \{ \mathcal{V} \in \Gamma(TG) \mid \mathcal{V} \text{ lewnieźmiennicze} \},$$

$$\mathfrak{X}_R(G) := \{ \mathcal{V} \in \Gamma(TG) \mid \mathcal{V} \text{ prawonieźmiennicze} \}$$

są podprzestrzeniami $\mathbb{R}$ -liniowymi w $\Gamma(TG)$, a ponadto komutator pól wektorowych ogranicza się do każdego z nich,

$$[\cdot, \cdot]_G(\mathfrak{X}_H(G) \times \mathfrak{X}_H(G)) \subset \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}_L(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_L(G) \times \mathfrak{X}_L(G)})$$

nazywamy **algebrą pól lewnieźmienniczych na G** , a parę

$$(\mathfrak{X}_R(G), [\cdot, \cdot]_G \upharpoonright_{\mathfrak{X}_R(G) \times \mathfrak{X}_R(G)})$$

algebrą pól prawonieźmienniczych na G .

Dowód: Pierwsza część tezy wynika wprost z $\mathbb{R}$ -liniowości warunku lewnieźmienniczości (wzgl. prawonieźmienniczości), a druga – z prostego rachunku (przeprowadzonego dla dowolnego elementu $g \in G$ i dowolnych pól lewnieźmienniczych $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}_L(G)$):

$$\ell_g * [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G = [\ell_g * \mathcal{V}_1, \ell_g * \mathcal{V}_2]_G = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_G.$$

Analogiczny rachunek dowodzi prawonieźmienniczości komutatora dowolnej pary pól prawonieźmienniczych. $\square$

Uwaga 3. Przywołane powyżej zachowanie komutatora pól wektorowych stanowi szczególny przypadek ogólniejszego mechanizmu, któremu podlegają tzw. **pary pól wektorowych w F -relacji** wyróżnione przez dowolne gładkie odwzorowanie $F : M \rightarrow M$ między rozmaitościami różniczkowalnymi M, N . Przypomnijmy: elementy takiej pary $(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TN)$ spełniają tożsamość definiującą

$$\forall_{x \in M} : \mathcal{W}(F(x)) = T_x F(\mathcal{V}(x)).$$

Dla każdych dwóch takich par $(\mathcal{V}_A, \mathcal{W}_A)$, $A \in \{1, 2\}$ dowiedzimy tożsamości

$$(5) \quad \forall_{x \in M} : [\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]_{\Gamma(TN)}(F(x)) = T_x F([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2](x)),$$

wyrażającej prawidłowość: Komutator pierwszych składowych pary pól w F -relacji jest w F -relacji z komutatorem drugich składowych pary. W rozpatrywanym powyżej przypadku para $(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ jest w ℓ_g -relacji dla dowolnego elementu grupy $g \in G$.

Definicja 3. Algebra Liego nad ciałem $\mathbb{K}$ to kolekcja $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$ złożona z przestrzeni $\mathbb{K}$ -liniowej $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V)$ oraz odwzorowania dwu- $\mathbb{K}$ -liniowego skośnie symetrycznego

$$[\cdot, \cdot]_V : V \times V \rightarrow V : (v, w) \mapsto [v, w]_V = -[w, v]_V,$$

zwanego **nawiasem Liego na V** , którego **jakobiator**

$$\text{Jac}_V : V \times V \times V \rightarrow V$$

$$: (X_1, X_2, X_3) \mapsto [[X_1, X_2]_V, X_3]_V + [[X_3, X_1]_V, X_2]_V + [[X_2, X_3]_V, X_1]_V$$

jest tożsamościowo równy zeru. Tożsamość w algebrze wyrażająca znikanie jakobiatora nazywa się **tożsamością Jacobiego**.

Podalgebrą Liego algebry Liego $((V, +_V, P_V, \bullet \mapsto \mathbf{0}_V), \ell_V, [\cdot, \cdot]_V)$ nazwiemy algebrą Liego $((W, +_W, P_W, \bullet \mapsto \mathbf{0}_W), \ell_W, [\cdot, \cdot]_W)$ o nośniku $W \subseteq V$ będącym podprzestrzenią $\mathbb{K}$ -liniową V .

Homomorfizm algebr Liego między algebrami Liego $((V_\alpha, +_\alpha, P_\alpha, \bullet \mapsto \mathbf{0}_\alpha), \ell_\alpha), [\cdot, \cdot]_\alpha)$, $\alpha \in \{1, 2\}$ to odwzorowanie $\mathbb{R}$ -liniowe $\chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ o własności

$$[\cdot, \cdot]_2 \circ (\chi \times \chi) = \chi \circ [\cdot, \cdot]_1.$$

Stwierdzenie 4. Przyjmijmy zapis Def. 3 i Stw. 3. Odwzorowanie

$$\text{T.Ad.} : \mathfrak{X}_R(G) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_L(G) : \mathcal{V} \mapsto \text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot))$$

jest izomorfizmem przestrzeni pól prawo- i lewoniemienniczych. Istnieją kanoniczne izomorfizmy przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowych¹

$$H. : \mathfrak{g} \equiv \text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}_H(G), \quad H \in \{L, R\},$$

o własności

$$(6) \quad L. \circ (R.)^{-1} \equiv \text{T.Ad.}.$$

Indukują one na przestrzeni $\mathfrak{g} \cong \text{T}_e G$ nawias Liego

$$[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X_1, X_2) \mapsto [L_{X_1}, L_{X_2}]_{\Gamma(\text{TG})}(e).$$

Algebra Liego

$$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}) \equiv \text{Lie } G$$

(w której zapisie $\mathfrak{g}$ jest traktowana jako przestrzeń $\mathbb{R}$ -liniowa) nosi miano **algebry Liego grupy Liego** G .

Dowód: Dla dowolnego pola prawoniemienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_R(G)$ sprawdzamy lewoniemienniczność jego obrazu względem (jawnie $\mathbb{R}$ -liniowego i odwracalnego) T.Ad. w bezpośrednim rachunku, prowadzonym dla dowolnych $g, h \in G$ z uwzględnieniem prawoniemienniczności $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \ell_g * (\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h) &= \text{T}_{\ell_{g^{-1}}(h)} \ell_g((\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(\ell_{g^{-1}}(h))) \\ &= \text{T}_{g^{-1}h} \ell_g(\text{T}_{g^{-1}h} \text{Ad}_{g^{-1}h}(\mathcal{V}(g^{-1}h))) = \text{T}_{g^{-1}h}(\ell_h \circ \wp_{h^{-1}g})(\mathcal{V}(g^{-1}h)) \\ &= \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_{g^{-1}h} \wp_{h^{-1}g}(\mathcal{V}(g^{-1}h)) = \text{T}_e \ell_h(\mathcal{V}(e)) \equiv \text{T}_e \ell_h \circ \text{T}_h \wp_{h^{-1}}(\mathcal{V}(h)) \\ &\equiv (\text{T.Ad.}(\mathcal{V}(\cdot)))(h). \end{aligned}$$

Poszukiwania izomorfizmu $L.$ zaczniemy od zauważenia, że dowolne pole lewoniemiennicze $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$ spełnia tożsamość

$$\mathcal{V}(g) = (\ell_g * \mathcal{V})(g) \equiv \text{T}_{\ell_{g^{-1}}(g)} \ell_g(\mathcal{V}(\ell_{g^{-1}}(g))) = \text{T}_e \ell_g(\mathcal{V}(e)) \equiv \mathcal{V}(e) \circ \ell_g^*,$$

gdzie ℓ_g^* , $g \in G$ jest cofnięciem (funkcji). Jako że $\mathcal{V}(e) \in \mathfrak{g}$, powyższa obserwacja podpowiada wprost definicję poszukiwanego izomorfizmu. Określmy odwzorowanie, jawnie $\mathbb{R}$ -liniowe,

$$L. : \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(\text{TG}) : X \mapsto X \circ \ell^* \equiv L_X,$$

Bez trudu sprawdzamy lewoniemienniczność pól w jego obrazie,

$$\begin{aligned} \ell_g * L_X &= \text{T}_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)} \ell_g(L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \equiv (L_X \circ \ell_{g^{-1}}(\cdot)) \circ \ell_g^* \equiv X \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* \circ \ell_g^* \\ &= X \circ (\ell_g \circ \ell_{\ell_{g^{-1}}(\cdot)})^* = X \circ \ell_{g \cdot \ell_{g^{-1}}(\cdot)}^* = X \circ \ell^* \equiv L_X, \quad g \in G. \end{aligned}$$

Kierując się wcześniejszym rachunkiem postulujemy odwrotność $L.$ w postaci, także jawnie $\mathbb{R}$ -liniowej,

$$\text{ev}_e : \mathfrak{X}_L(G) \longrightarrow \mathfrak{g} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}(e),$$

oto bowiem zachodzi

$$\mathcal{V} = \text{ev}_e(\mathcal{V}) \circ \ell^* \equiv L_{\text{ev}_e(\mathcal{V})}.$$

¹ $\text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R}) = \{ V \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(C^1(G, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \mid \forall_{f, g \in C^1(G, \mathbb{R})} : V(f \cdot_{C^1(G, \mathbb{R})} g) = V(f) \cdot g(e) + f(e) \cdot V(g) \}$ jest przestrzenią różniczkowań algebry funkcji klasy C^1 w e .

Z drugiej strony obliczamy

$$\mathrm{ev}_e(L_X) = X \circ \ell_e^* = X,$$

więc w istocie

$$\mathrm{ev}_e = (L.)^{-1}.$$

Zastępując w powyższym rozumowaniu działanie lewe regularne ℓ , jego prawym odpowiednikiem $\wp$, możemy powtórzyć to rozumowanie w odniesieniu do pól prawoniezmienniczych, co daje nam izomorfizm

$$R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_R(G) : X \longmapsto X \circ \wp^* \equiv R_X,$$

o odwrotności – jak poprzednio –

$$(R.)^{-1} = \mathrm{ev}_e.$$

Tożsamość (6) jest w oczywisty sposób spełniona, oto bowiem dla dowolnego wektora $X \in \mathfrak{g}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} \mathrm{T.Ad.} \circ R.(X) &= \mathrm{T.Ad.}(X \circ \wp^*) = X \circ \wp^* \circ \ell^* \circ \wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)}^* = X \circ \wp^* \circ \wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)}^* \circ \ell^* = X \circ \wp_{\mathrm{Inv}(\cdot)}^* \circ \ell^* \\ &= X \circ \wp_e^* \circ \ell^* = X \circ \ell^* \equiv L.(X). \end{aligned}$$

Pozostaje już tylko przekonać się, że jakobiator jawnie skośnie symetrycznego i dwu- $\mathbb{R}$ -liniowego odwzorowania $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ znika tożsamościowo. Czynimy to w bezpośrednim rachunku, w którym wykorzystujemy prostą tożsamość (w której, tak jak w tych po niej następujących, opuszczamy znacznik $\Gamma(\mathrm{TG})$ na komutatorze pól wektorowych)

$$L_{[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}} \equiv L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}])} = [L_{X_1}, L_{X_2}].$$

Oto więc wyznaczamy

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}_{\mathfrak{g}}(X_1, X_2, X_3) &\equiv [[X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, X_3]_{\mathfrak{g}} + [[X_3, X_1]_{\mathfrak{g}}, X_2]_{\mathfrak{g}} + [[X_2, X_3]_{\mathfrak{g}}, X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [\mathrm{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}]), X_3]_{\mathfrak{g}} + [\mathrm{ev}_e([L_{X_3}, L_{X_1}]), X_2]_{\mathfrak{g}} + [\mathrm{ev}_e([L_{X_2}, L_{X_3}]), X_1]_{\mathfrak{g}} \\ &= [L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_1}, L_{X_2}])}, L_{X_3}](e) + [L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_3}, L_{X_1}])}, L_{X_2}](e) + [L_{\mathrm{ev}_e([L_{X_2}, L_{X_3}])}, L_{X_1}](e) \\ &= [[L_{X_1}, L_{X_2}], L_{X_3}](e) + [[L_{X_3}, L_{X_1}], L_{X_2}](e) + [[L_{X_2}, L_{X_3}], L_{X_1}](e) \\ &\equiv \mathrm{Jac}_{\Gamma(\mathrm{TG})}(L_{X_1}, L_{X_2}, L_{X_3})(e) = 0_{\mathfrak{g}}, \end{aligned}$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Definicja 4. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu, przy czym założymy dodatkowo, że $N := \dim G < \infty$. Wybierzmy w przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ dowolną bazę $\mathcal{T} := \{t_A\}_{A \in \overline{1, N}}$, a wówczas **stałe struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie} G$ w bazie $\mathcal{T}$ to liczby $f_{ABC} = -f_{BAC} \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \overline{1, N}$ zdefiniowane przez **równania struktury algebry Liego** $\mathrm{Lie} G$

$$[t_A, t_B] = f_{ABC} \triangleright t_C, \quad A, B \in \overline{1, N}.$$

W konsekwencji znikania jakobiatora na $\mathrm{Lie} G$ spełniają one tożsamościowo dwuliniowe relacje

$$f_{ABD} f_{DCE} + f_{CAD} f_{DBE} + f_{BCD} f_{DAE} = 0, \quad A, B, C, E \in \overline{1, N},$$

zwane **tożsamościami Jacobiego dla stałych struktury** $\mathrm{Lie} G$. Elementy bazy $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\Gamma(\mathrm{TG})$ będącej L -wzgl. R -obrazem bazy $\mathcal{T}$ będziemy oznaczać symbolem

$$L_A(\cdot) \equiv \mathrm{T}_e \ell.(t_A)$$

wzgl.

$$R_A(\cdot) \equiv \mathrm{T}_e \wp.(t_A).$$

Twierdzenie 1 (Funktorialność Lie). Przyjmijmy zapis Def.3 i Stw.4. Przyporządkowanie grupom Liego ich algebr Liego rozszerza się kanonicznie do funktora

$$\text{Lie} : \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}}.$$

o składowej morfizmowej

$$\begin{aligned} \text{Lie} & : \text{Mor } \mathbf{LieGrp} \longrightarrow \text{Mor } \mathbf{LieAlg}_{\mathbb{R}} \\ & : \left(G_1 \xrightarrow{\chi} G_2 \right) \longmapsto \left(\text{Lie } G_1 \xrightarrow{\text{T}_{e_1}\chi} \text{Lie } G_2 \right). \end{aligned}$$

Dowód: Odwzorowanie $\text{T}_{e_1}\chi$ jest dobrze określone, pozostaje zatem jedynie wykazać, że jest ono homomorfizmem algebr Liego. Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość funkcjonalna, słuszna dla dowolnego elementu $g_1 \in G$:

$$\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi = \chi \circ \ell_{g_1}.$$

Na jej podstawie obliczamy, dla dowolnych: funkcji $f \in C^1(G_2; \mathbb{R})$ oraz wektora $X \in \mathfrak{g}_1$,

$$\begin{aligned} \text{T}_{g_1}\chi(L_X(g_1))(f) & \equiv L_X(g_1) \circ \chi^*(f) \equiv X \circ \ell_{g_1}^* \circ \chi^*(f) = X \circ (\chi \circ \ell_{g_1})^*(f) \\ & = X \circ (\ell_{\chi(g_1)} \circ \chi)^*(f) = (X \circ \chi^*) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \\ & \equiv \text{T}_{e_1}\chi(X) \circ \ell_{\chi(g_1)}^*(f) \equiv L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)}(\chi(g_1))(f), \end{aligned}$$

co pozwala skonstatować, że

$$\text{T}.\chi(L_X(\cdot)) = L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)}(\chi(\cdot)),$$

czyli że $(L_X, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X)})$ jest parą pól w χ -relacji w rozumieniu Uwagi 3, a zatem w świetle wypisanego w niej Równ. (5) dla dowolnych wektorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1$ zachodzi pożądana tożsamość

$$\begin{aligned} [\text{T}_{e_1}\chi(X_1), \text{T}_{e_1}\chi(X_2)]_{\mathfrak{g}_2} & \equiv [L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{G_2}(e_2) = [L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_1)}, L_{\text{T}_{e_1}\chi(X_2)}]_{G_2} \circ \chi(e_1) \\ & = \text{T}_{e_1}\chi([L_{X_1}, L_{X_2}]_{G_1}(e_1)) \equiv \text{T}_{e_1}\chi([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}_1}). \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 5. Pola lewo- i prawoniezmiennicze na dowolnej grupie Liego są zupełne.

Dowód: Rozważmy gładką krzywą całkową $\gamma :]a, b[\longrightarrow G$ przez $\gamma(t_0) = g_0 \in G$ w $t_0 \in]a, b[$ pola lewoniezmienniczego $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}_L(G)$, tj. rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$D\gamma(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)), \quad t \in]a, b[, \quad \gamma(t_0) = g_0.$$

Wyberzmy (dowolnie) czasy pośrednie t_1, t_2 spełniające warunki $a < t_1 < t_2 < b$ i oznaczmy $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$. Krzywą γ będziemy teraz dowolnie przedłużać wykorzystując przechodność działania lewego regularnego na G , która pozwala nam wskazać $g_{21} := \gamma(t_2) \cdot \gamma(t_1)^{-1}$. Zdefiniujmy zatem ścieżkę

$$\gamma_{\Delta t} :]a + \Delta t, b + \Delta t[\longrightarrow G : t \longmapsto \ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t).$$

Jest ona rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = \text{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ D\gamma(t - \Delta t), \quad t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[, \quad \gamma_{\Delta t}(t_2) = \gamma(t_2),$$

a ponieważ $t - \Delta t \in]a, b[$ dla dowolnego czasu $t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[$, przeto – wobec lewoniezmienniczości pola $\mathcal{V}$ –

$$D\gamma_{\Delta t}(t) = \text{T}_{\gamma(t-\Delta t)}\ell_{g_{21}} \circ \mathcal{V}(\gamma(t - \Delta t)) = \mathcal{V}(\ell_{g_{21}} \circ \gamma(t - \Delta t)) \equiv \mathcal{V}(\gamma_{\Delta t}(t)).$$

Widzimy więc, że także $\gamma_{\mathbb{D}t}$ jest gładką krzywą całkową pola $\mathcal{V}$, stąd też – na mocy Twierdzenia o Jednoznaczności Rozwiązania Zagadnienia Cauchy’ego w dziedzinie określoności – na niepustym przedziale $\Delta I :=]a + \Delta t, b[\ni t_2$ zachodzi równość

$$\gamma_{\Delta t} \upharpoonright_{\Delta I} = \gamma \upharpoonright_{\Delta I}$$

i otrzymujemy gładkie przedłużenie $\tilde{\gamma}$ krzywej γ do $]a, b + \Delta t[$ w postaci

$$\tilde{\gamma} :]a, b + \Delta t[\longrightarrow G : \begin{cases} \gamma(t) & \text{dla } t \in]a, b[\\ \gamma_{\Delta t}(t) & \text{dla } t \in]a + \Delta t, b + \Delta t[\end{cases}.$$

Dokonując iteracji powyższej procedury, możemy gładko przedłużyć wyjściową krzywą w sposób nieograniczony od góry, tj. do przedziału $]a, \infty[$. Podobny argument pokazuje, że jest ona także przedłużalna wstecz, tj. do $] - \infty, b[$, ostatecznie więc stwierdzamy, że γ przedłuża się gładko do $\mathbb{R}$, co wobec dowolności g_0 (wszak pole $\mathcal{V}$ jest określone na całej rozmaitości G) daje nam postulowaną tezę dla pól lewoniezmienniczych. Dowód w przypadku pól prawoniezmienniczych przebiega w pełni analogicznie. $\square$

Stwierdzenie 6. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $X \in \mathfrak{g}$. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów grupy Liego G stowarzyszone z polami: lewoniezmienniczym L_X ,

$$\mathcal{L}_{\cdot 1}^X(\cdot 2) \equiv \Phi_{L_X}(\cdot 1, \cdot 2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{L_X}(t, g) \equiv \mathcal{L}_t^X(g),$$

oraz prawoniezmienniczym R_X ,

$$\mathcal{R}_{\cdot 1}^X(\cdot 2) \equiv \Phi_{R_X}(\cdot 1, \cdot 2) : \mathbb{R} \times G \longrightarrow G : (t, g) \longmapsto \Phi_{R_X}(t, g) \equiv \mathcal{R}_t^X(g),$$

przyjmując postać, odpowiednio,

$$(7) \quad \mathcal{L}_t^X = \wp_{\mathcal{L}_t^X(e)}, \quad \mathcal{R}_t^X = \ell_{\mathcal{R}_t^X(e)}.$$

Dowód: To, że potoki zupełnych (i globalnie gładkich) pól lewo- i prawoniezmienniczych zadają jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów G , wynika wprost z wiedzy zgromadzonej w trakcie I semestru. Pozostaje sprawdzić słuszność tożsamości (7). Obliczamy, dla dowolnego $g \in G$,

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X(g) = \mathbb{T}_e \ell_g(L_X(e)) \equiv \mathbb{T}_e \ell_g\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \mathcal{L}_t^X(e)\right) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e),$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z Reguły Łańcuchowej dla pochodnej funkcji złożonej. Ścieżki $\mathcal{L}_{\cdot}^X(g)$ i $\ell_g \circ \mathcal{L}_{\cdot}^X(e)$, przecinające się w chwili $t = 0$,

$$\ell_g \circ \mathcal{L}_0^X(e) = \ell_g(e) = g \cdot e = g \equiv \mathcal{L}_0^X(g),$$

są zatem współstyczne w tejże chwili, a wektorem stycznym jest wartość pola lewoniezmienniczego L_X w g . Obie też są krzywymi całkowymi pola L_X , oto bowiem dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi – wprost z definicji –

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t^X(g) = L_X \circ \mathcal{L}_t^X(g),$$

a także – wobec lewoniezmienniczości L_X –

$$\frac{d}{dt} \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e) = \mathbb{T}_{\mathcal{L}_t^X(e)} \ell_g(L_X \circ \mathcal{L}_t^X(e)) = L_X \circ \ell_g \circ \mathcal{L}_t^X(e).$$

Na mocy Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego ścieżki te są tożsame. Analogicznie dowodzimy drugiej równości w Równ. (7). $\square$

W dalszej części zajmujemy się zatem wyróżnionymi ścieżkami $\mathcal{L}_{\cdot}^X(e)$ oraz $\mathcal{R}_{\cdot}^X(e)$.

Stwierdzenie 7. Przyjmijmy zapis Stw. 6. Gładkie ścieżki

$$\lambda_X \equiv \mathcal{L}_{\cdot}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G, \quad \rho_X \equiv \mathcal{R}_{\cdot}^X(e) : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

spełniają tożsamości

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left(\lambda_{t \triangleright X}(1) = \lambda_X(t) \right) \wedge \left(\rho_{t \triangleright X}(1) = \rho_X(t) \right).$$

Dowód: W świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego krzywa λ_X jest jednoznacznie określona przez warunki

$$\lambda_X(0) = e \quad \wedge \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \lambda_X(t) = L_X \circ \lambda_X(t) \equiv T_e \ell_{\lambda_X(t)}(X).$$

Z drugiego z nich wyprowadzamy tożsamość

$$\forall_{s, t \in \mathbb{R}} : T_e \ell_{\lambda_X(st)}(X) = \frac{d}{d(st)} \lambda_X(st) = \frac{1}{s} \cdot \frac{d}{dt} \lambda_X(st),$$

czyli też równoważną jej (wobec $\mathbb{R}$ -liniowości $T_e \ell_{\lambda_X(st)}$)

$$\forall_{s, t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \lambda_X(st) = T_e \ell_{\lambda_X(st)}(s \triangleright X),$$

Zdefiniujmy rodzinę ścieżek

$$\gamma_s : \mathbb{R} \longrightarrow G : t \longmapsto \lambda_X(st), \quad s \in \mathbb{R},$$

a wówczas powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$\forall_{s, t \in \mathbb{R}} : \frac{d}{dt} \gamma_s(t) = T_e \ell_{\gamma_s(t)}(s \triangleright X),$$

przy czym też

$$\gamma_s(0) \equiv \lambda_X(0) = e,$$

stwierdzamy zatem równość

$$\forall_{s \in \mathbb{R}} : \gamma_s = \lambda_{s \triangleright X},$$

skąd ostatecznie wniosek

$$\lambda_{s \triangleright X}(t) = \gamma_s(t) \equiv \lambda_X(st),$$

czyli także – w szczególności

$$\lambda_{s \triangleright X}(1) = \lambda_X(s).$$

Dowód dla ścieżek wykreślanych przez pola prawoniezmiennicze przebiega w pełni analogicznie. $\square$

Stwierdzenie 8. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Gładkie ścieżki λ_X i ρ_X są homomorfizmami addytywnej grupy Liego $\mathbb{R}$ (z naturalną strukturą różniczkową) w G , spełniającymi warunek początkowy

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_X(t) = X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \rho_X(t).$$

I odwrotnie, każdy homomorfizm grup Liego

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

spełniający warunek początkowy

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) = X \in \mathfrak{g}$$

jest postaci

$$\lambda_X = \chi = \rho_X.$$

W szczególności więc ścieżki λ_X i ρ_X są tożsame.

Dowód: Jedynym, co wymaga sprawdzenia w przypadku ścieżek $\gamma \in \{\lambda_X, \rho_X\}$, jest warunek homomorfizmu

$$\forall_{s, t \in \mathbb{R}} : \gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t).$$

Zacniemy od $\gamma = \lambda_X$. Ażeby udowodnić powyższą tożsamość, musimy przekonać się o tożsamości ścieżek λ_X i $\gamma_s := \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s + \cdot)$ przy ustalonym (dowolnie) s . W tym celu obliczamy – korzystając przy tym wprost z definicji ścieżki γ oraz z lewoniezmienniczości L_X –

$$\frac{d}{dt} \gamma_s(t) = T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left(\frac{d}{dt} \lambda_X(t+s) \right) \equiv T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \left(\frac{d}{d(s+t)} \lambda_X(s+t) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= T_{\lambda_X(s+t)} \ell_{\lambda_X(s)^{-1}} (L_X(\lambda_X(s+t))) = L_X(\ell_{\lambda_X(s)^{-1}} \circ \lambda_X(s+t)) \\
 &\equiv L_X(\gamma_s(t)),
 \end{aligned}$$

skąd wniosek, że ścieżka γ_s jest krzywą całkową pola L_X tak jak λ_X , a nadto

$$\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma_s(t) = L_X(\gamma_s(0)) = L_X(e) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t)$$

i

$$\gamma_s(0) = e = \gamma(0),$$

zatem są to rozwiązania zagadnienia początkowego (dla tego samego pola wektorowego) przy tych samych warunkach początkowych, co w świetle Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego przesądza o ich postulowanej tożsamości. W przypadku $\gamma = \rho_X$ powtarzamy rozumowanie dla $\tilde{\gamma}_s := \wp_{\rho_X(s)^{-1}} \circ \rho_X(s + \cdot)$.

Niechaj teraz χ będzie homomorfizmem spełniającym warunek początkowy (8). Różniczkując relację funkcjonalną wyrażającą homomorficzność χ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \chi(s) &\equiv \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=s} \chi(\xi) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(s+t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \ell_{\chi(s)} \circ \chi(t) \\
 &= T_{\chi(0)} \ell_{\chi(s)} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) = T_e \ell_{\chi(s)} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t) \right) \\
 &\equiv L_{\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t)} (\chi(s)),
 \end{aligned}$$

stwierdzamy, że χ jest krzywą całkową przez $e = \chi(0)$ (równość ta, użyta w powyższym rachunku, jest konsekwencją homomorficzności χ) lewoniemienniczego pola wektorowego będącego obrazem wektora $\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \chi(t)$ względem izomorfizmu L . ze Stw. 4. Powtarzając to rozumowanie w odniesieniu do relacji

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \chi(t) &\equiv \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=t} \chi(\xi) = \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s+t) = \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \wp_{\chi(t)} \circ \chi(s) \\
 &= T_{\chi(0)} \wp_{\chi(t)} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s) \right) = T_e \wp_{\chi(t)} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s) \right) \\
 &\equiv R_{\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \chi(s)} (\chi(t)),
 \end{aligned}$$

uzyskujemy ostatnią brakującą część tezy. □

Stwierdzenie 9. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Odwzorowanie

$$\lambda : \mathfrak{g} \times \mathbb{R} \longrightarrow G : (X, t) \longmapsto \lambda_X(t)$$

jest gładkie.

Dowód: Gładkość zależności λ . od drugiego argumentu wynika wprost z Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, oto bowiem dla ustalonego X ścieżka λ_X jest krzywą całkową gładkiego pola L_X . Pozostaje zatem wykazać gładkość zależności λ . od pierwszego argumentu. W tym celu przedstawimy λ_X jako krzywą całkową gładkiego pola wektorowego na $\mathfrak{g} \times G$ o danych początkowych (X, e) , co pozwoli nam wywnioskować postulowaną gładkość wprost z tegoż Twierdzenia. Będziemy przy tym – jak zazwyczaj – utożsamiać $\text{Der}_e C^1(G, \mathbb{R})$ z $T_e G$. Rozważmy zatem pole wektorowe (jawnie gładkie)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V} &: \mathfrak{g} \times G \longrightarrow T(\mathfrak{g} \times G) \\
 &: (X, g) \longmapsto (0_{\mathfrak{g}}, T_e \ell_g(X)) \equiv (0_{\mathfrak{g}}, L_X(g)) \in \mathfrak{g} \oplus T_e \ell_g(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus T_g G \\
 &\equiv T_{(X, g)}(\mathfrak{g} \times G).
 \end{aligned}$$

Jego potok $\Phi_{\mathcal{V}}$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0)) = \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; t_0, (X_0, g_0))),$$

w którego zapisie (X_0, g_0) jest warunkiem początkowym (w czasie t_0),

$$\Phi_{\mathcal{V}}(t_0; t_0, (X_0, g_0)) = (X_0, g_0).$$

Ustalmy warunek początkowy $(X_0, g_0) := (X, e)$ dla $t_0 := 0$. Rzutując powyższe równanie na drugą składową (tj. na G), w której odbywa się nietrywialna ewolucja, otrzymujemy równość

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) &= \text{pr}_2 \circ \frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e)) = \text{pr}_2 \circ \mathcal{V}(\Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_{\text{pr}_1 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))}(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))) \\ &= L_X(\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(t; 0, (X, e))), \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika wprost z konstrukcji $\mathcal{V}$ (w swej pierwszej składowej warunek początkowy pozostaje niezmienny wobec trywialności tejże składowej pola $\mathcal{V}$). Otrzymana równość pozwala zidentyfikować $\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e))$ jako (jedyną) krzywą całkową pola L_X wychodzącą z punktu $g_0 = e$, czyli

$$\text{pr}_2 \circ \Phi_{\mathcal{V}}(\cdot; 0, (X, e)) = \lambda_X(\cdot),$$

co stanowi właśnie zapowiedzianą wcześniej reinterpretację tejże krzywej całkowej pola L_X . $\square$

Definicja 5. Przyjmijmy zapis Stw. 9. Odwzorowanie

$$\exp \equiv \exp^G := \lambda.(1) : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

określamy mianem **odwzorowania eksponencjalnego na G** .

Stwierdzenie 10. Przyjmijmy zapis Def. 5. Istnieją otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{g}$ oraz $\mathcal{O}_e$ elementu e w G takie, że odwzorowanie $\exp|_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$ jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ na $\mathcal{O}_e$.

Dowód: Obliczymy odwzorowanie styczne do $\exp$ w $0_{\mathfrak{g}}$ na dowolnym wektorze $X \in \mathfrak{g} \equiv T_{0_{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g}$, odwołując się po drodze do Stw. 7. Znajdujemy

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright X) \equiv \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\lambda_{t \triangleright X}(1) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\lambda_X(t) = X,$$

czyli

$$T_{0_{\mathfrak{g}}}\exp = \text{id}_{\mathfrak{g}}.$$

Teza dowodzonego stwierdzenia wynika teraz wprost z Twierdzenia o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. $\square$

Stwierdzenie 11 (Naturalność odwzorowania eksponencjalnego). Przyjmijmy zapis Def. 5 oraz Tw. 1 i niechaj $\chi : G_1 \longrightarrow G_2$ będzie homomorfizmem grup Liego między grupami Liego G_α , $\alpha \in \{1, 2\}$. Poniższy diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie } G_1 & \xrightarrow{\text{Lie } \chi} & \text{Lie } G_2 \\ \exp^{G_1} \downarrow & & \downarrow \exp^{G_2} \\ G_1 & \xrightarrow{\chi} & G_2 \end{array}.$$

Dowód: Rozważmy ścieżkę gładką

$$\gamma := \chi \circ \lambda_X : \mathbb{R} \longrightarrow G_2$$

przez

$$\gamma(0) \equiv \chi \circ \lambda_X(0) = \chi(e_1) = e_2.$$

Na podstawie bezpośredniego rachunku (wykorzystującego definicję ścieżki λ_X oraz lewoniezmienniczość L_X , jak również Regułę Łańcuchową)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\gamma(t) &= T_{\lambda_X(t)}\chi\left(\frac{d}{dt}\lambda_X(t)\right) = T_{\lambda_X(t)}\chi(L_X(\lambda_X(t))) = T_{\lambda_X(t)}\chi \circ T_{e_1}\ell_{\lambda_X(t)}^1(X) \\ &= T_{e_1}(\chi \circ \ell_{\lambda_X(t)}^1)(X) = T_{e_1}(\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1 \circ \chi)(X) = T_{\chi(e_1)}\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1(T_{e_1}\chi(X)) \\ &= T_{e_2}\ell_{\chi \circ \lambda_X(t)}^1(T_{e_1}\chi(X)) \equiv T_{e_2}\ell_{\gamma(t)}^1(\text{Lie } \chi(X)) \equiv L_{\text{Lie } \chi(X)}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

i wreszcie

$$\gamma(0) = e_2 \equiv \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(0),$$

konstatujemy na gruncie Twierdzenia o Lokalnej Jednoznaczności Krzywej Całkowej Pola Wektorowego, że dla γ jest spełniona tożsamość

$$\chi \circ \lambda_X \equiv \gamma = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)},$$

co w chwili $t = 1$ daje pożądaną równość

$$\chi \circ \exp^{G_1}(X) \equiv \chi \circ \lambda_X(1) = \lambda_{\text{Lie } \chi(X)}(1) \equiv \exp^{G_2} \circ \text{Lie } \chi(X).$$

□

Stwierdzenie 12. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niech $((T_e \text{Ad.})_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim G}}$ o będzie macierzą o wartościach w $C^\infty(G, \mathbb{R})$ określoną równaniami

$$T_e \text{Ad.}(t_A) =: (T_e \text{Ad.})_A^B \triangleright t_B, \quad A \in \overline{1, \dim G}.$$

Pola wektorowe L_A i R_A , $A \in \overline{1, \dim G}$ spełniają relacje (zapisane dla dowolnych $A, B \in \overline{1, \dim G}$)

$$[L_A, L_B] = f_{ABC} \triangleright L_C, \quad [R_A, R_B] = -f_{ABC} \triangleright R_C, \quad [L_A, R_B] = 0.$$

Ponadto prawdziwe są tożsamości:

$$(9) \quad L_A(\cdot) = (T_e \text{Ad.})_A^B \triangleright R_B(\cdot)$$

oraz

$$\text{Inv}_* L_A = -R_A, \quad \text{Inv}_* R_A = -L_A,$$

a także – dla dowolnego elementu $g \in G$ –

$$\wp_g * L_A = (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright L_B, \quad \ell_g * R_A = (T_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B$$

Dowód: Pierwsza równość wynika wprost z definicji komutatora w $\text{Lie } G$, oto bowiem wobec lewoniezmienniczości komutatora pól lewoniezmiennicznych zachodzi

$$\begin{aligned} f_{ABC} L_C(\cdot) &= f_{ABC} T_e \ell.(L_C(e)) \equiv f_{ABC} T_e \ell.(t_C) = T_e \ell.([t_A, t_B]) \\ &\equiv T_e \ell.([L_A, L_B](e)) = [L_A, L_B](\cdot). \end{aligned}$$

Komutator bazowego pola lewoniezmiennicznego z takimż polem prawoniezmiennicznym obliczamy na dowolnej funkcji $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ w dowolnym punkcie $g \in G$, korzystając przy tym ze Stw. 6,

$$\begin{aligned} [L_A, R_B](f)(g) &\equiv L_A(R_B(f))(g) - R_B(L_A(f))(g) \\ &\equiv L_A\left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B}\right)(g) - R_B\left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A}\right)(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\equiv \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{R}_t^{t_B} \right) \circ \mathcal{L}_s^{t_A}(g) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \circ \mathcal{L}_s^{t_A} \right) \circ \mathcal{R}_t^{t_B}(g) \\
 &= \frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \left(\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot (g \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e)) \right) - \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \upharpoonright_{s=0} f \left((\mathcal{R}_t^{t_B}(e) \cdot g) \cdot \mathcal{L}_s^{t_A}(e) \right) \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wreszcie też wyznaczamy wprost, w dowolnym punkcie $g \in G$,

$$\begin{aligned}
 L_A(g) &= T_e \ell_g(L_A(e)) \equiv T_e \ell_g(t_A) = T_e \wp_g \circ T_g \wp_{g^{-1}} \circ T_e \ell_g(t_A) \\
 &= T_e \wp_g \circ T_e \text{Ad}_g(t_A) \equiv (T_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright T_e \wp_g(t_B) \\
 &\equiv (T_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright T_e \wp_g(R_B(e)) = (T_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(g).
 \end{aligned}$$

Jest też – w świetle Uwagi 1, a dla dowolnego $g \in G$ –

$$\begin{aligned}
 \text{Inv}_* L_A(g) &\equiv T_{g^{-1}} \text{Inv}(L_A(g^{-1})) = T_{g^{-1}} \text{Inv} \circ T_e \ell_{g^{-1}}(t_A) \\
 &= -T_e \wp_g \circ T_{g^{-1}} \ell_g \circ T_e \ell_{g^{-1}}(t_A) = -T_e \wp_g(t_A) \equiv -R_A(g),
 \end{aligned}$$

a stąd już wprost wynika

$$\text{Inv}_* R_A = -\text{Inv}_* \circ \text{Inv}_* L_A = -(\text{Inv} \circ \text{Inv})_* L_A = -L_A.$$

Pierwsza z tych tożsamości pozwala łatwo udowodnić drugą równość wypisaną w tezie stwierdzenia w odwołaniu do podstawowej własności komutatora pól wektorowych, jaką jest jego niezmienniczość względem pchnięć, oraz zweryfikowanej wcześniej równości pierwszej,

$$-f_{ABC} R_C = f_{ABC} \text{Inv}_* L_C = \text{Inv}_*([L_A, L_B]) = [\text{Inv}_* L_A, \text{Inv}_* L_B] \equiv [R_A, R_B].$$

Sprawdzamy także – dla dowolnego $h \in G$ –

$$\begin{aligned}
 (\wp_g * L_A)(h) &\equiv T_{\wp_{g^{-1}}(h)} \wp_g(L_A \circ \wp_{g^{-1}}(h)) = T_{hg^{-1}} \wp_g \circ T_e \ell_{hg^{-1}}(t_A) \\
 &= T_e \ell_h \circ T_e \text{Ad}_{g^{-1}}(t_A) = (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright T_e \ell_h(t_B) \\
 &= (T_e \text{Ad}_{g^{-1}})_A^B \triangleright L_B(h)
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 (\ell_g * R_A)(h) &\equiv T_{\ell_{g^{-1}}(h)} \ell_g(R_A \circ \ell_{g^{-1}}(h)) = T_{g^{-1}h} \ell_g \circ T_e \wp_{g^{-1}h}(t_A) \\
 &= T_e(\ell_g \circ \wp_h \circ \wp_{g^{-1}})(t_A) = T_e(\wp_h \circ \text{Ad}_g)(t_A) \\
 &= (T_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright T_e \wp_h(t_B) = (T_e \text{Ad}_g)_A^B \triangleright R_B(h).
 \end{aligned}$$

□

Uwaga 4. Powyższe stwierdzenie orzeka, że algebry pól lewo- i prawoniezmienniczych są wzajemnie antyizomorficznymi komutującymi podalgebrami Liego w algebrze Liego (gładkich) pól wektorowych na G , przy czym $((T_e \text{Ad}_g)_A^B)_{A, B \in \overline{1, \dim G}}$ w dowolnym punkcie $g \in G$ jest macierzą przejścia pomiędzy lewo- i prawoniezmienniczną bazą styczną do grupy w tym punkcie. Tożsamości, w których pojawia się pchnięcie wzdłuż Inv , stanowią stycznościowy (w e) wariant relacji między lewym i prawym działaniem regularnym w grupie i grupie przeciwnej. Ostatnie dwie tożsamości w tezie stwierdzenia określają własności współzmienniczości względem – odpowiednio – prawych i lewych translacji (pchnięć) pól lewo- i prawoniezmienniczych.

Definicja 6. Przyjmijmy zapis Def. 4 i niechaj $\{\theta_L^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ i $\{\theta_R^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ będą bazami $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\Omega^1(G)$ dualnymi do baz – odpowiednio – $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ i $\{R_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ $C^\infty(G, \mathbb{R})$ -modułu $\Gamma(TG)$,

$$L_A \lrcorner \theta_L^B = \delta_A^B = R_A \lrcorner \theta_R^B, \quad A, B \in \overline{1, \dim G}.$$

Pole 1-form o wartościach w $\mathfrak{g}$ postaci

$$\theta_L := \theta_L^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nosi miano **kanonicznego pola 1-form lewoniezmienicznych** lub **lewoniezmienicznej formy Maurera–Cartana** na G . Analogicznie, pole 1-form

$$\theta_R := \theta_R^A \otimes_{\mathbb{R}} t_A$$

nazywamy **kanonicznym polem 1-form prawoniezmienicznych** lub **prawoniezmieniczną formą Maurera–Cartana** na G .

Uwaga 5. Warto odnotować, że formy Maurera–Cartana wraz z odpowiednimi polami niezmiennicznymi na grupie dają nam do ręki wygodną reprezentację operatora różniczki zewnętrznej (de Rhama), oto bowiem dla dowolnej funkcji $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ i w dowolnym punkcie $g \in G$ zachodzą tożsamości:

$$df(g) = L_A(f)(g) \triangleright \theta_L^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (f \circ \mathcal{L}_t^{t_A})(g) \triangleright \theta_L^A(g)$$

oraz

$$df(g) = R_A(f)(g) \triangleright \theta_R^A(g) \equiv \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (f \circ \mathcal{R}_t^{t_A})(g) \triangleright \theta_R^A(g).$$

Stwierdzenie 13. Przyjmijmy zapis Def. 6 oraz Stw. 12. Formy Maurera–Cartana są – odpowiednio – lewo- i prawoniezmieniczne,

$$(\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L = \theta_L, \quad (\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R = \theta_R,$$

a ponadto spełniają tożsamości:

$$(10) \quad \theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad.}) \circ \theta_L$$

i

$$(11) \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L = -\theta_R, \quad (\text{Inv}^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R = -\theta_L$$

oraz – dla dowolnego elementu $g \in G$ –

$$(\wp_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_L = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{g^{-1}}) \circ \theta_L, \quad (\ell_g^* \otimes \text{id}_{\mathfrak{g}}) \theta_R = (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R.$$

Dowód: W dowodach wszystkich relacji wykorzystujemy bazowy charakter układów $\{\theta_H^A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$, $H \in \{L, R\}$ (w dowolnym punkcie G) oraz ich dualność względem odpowiedniego układu pól niezmiennicznych. I tak z równości, słusznej dla dowolnych $g, h \in G$,

$$(L_A \lrcorner \ell_g^* \theta_L^B)(h) = \theta_L^B(\ell_g(h)) \circ T_h \ell_g(L_A(h)) = \theta_L^B(gh)(L_A(gh)) = \delta_A^B$$

wywdzimy wniosek:

$$\ell_g^* \theta_L^B(h) = \theta_L^B(h),$$

czyli

$$\ell_g^* \theta_L^B = \theta_L^B.$$

Analogicznie dowodzimy prawoniezmieniczności 1-form θ_R^B . W następnej kolejności przywołujemy Równ. (9) i na tej podstawie obliczamy

$$L_A \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \triangleright R_C \lrcorner \theta_R^B = (T_e \text{Ad.})_A^C \delta_C^B = (T_e \text{Ad.})_A^B,$$

skąd odczytujemy Równ. (10). W dowolnym punkcie $g \in G$ jest też na mocy Uwagi 1 spełniona relacja

$$R_A \lrcorner \text{Inv}^* \theta_L^B(g) = \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv}(R_A(g)) = \theta_L^B(g^{-1}) \circ T_g \text{Inv} \circ T_e \wp_g(t_A)$$

$$= -\theta_L^B(g^{-1}) \circ T_{e\ell_{g^{-1}}}(t_A) \equiv -\theta_L^B(g^{-1})(L_A(g^{-1})) = -\delta_A^B,$$

zatem

$$\text{Inv}^* \theta_L^B = -\theta_R^B,$$

czyli także

$$\text{Inv}^* \theta_R^B = -\theta_L^B.$$

Wreszcie na koniec obliczamy – dla dowolnych $g, h \in G$ –

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner (\wp_g^* \theta_L^B)(h) &= \theta_L^B(hg) \circ T_{h\wp_g}(L_A(h)) = \theta_L^B(hg) \circ T_{h\wp_g} \circ T_{e\ell_h}(t_A) \\ &= \theta_L^B(hg) \circ T_{e\ell_{hg}} \circ T_{e\text{Ad}_{g^{-1}}}(t_A) = (T_{e\text{Ad}_{g^{-1}}})_A^C \theta_L^B(hg) \circ T_{e\ell_{hg}}(t_C) \\ &= (T_{e\text{Ad}_{g^{-1}}})_A^C \theta_L^B(hg)(L_C(hg)) = (T_{e\text{Ad}_{g^{-1}}})_A^C \delta_C^B = (T_{e\text{Ad}_{g^{-1}}})_A^B \end{aligned}$$

i na tej podstawie wnioskujemy, że

$$\wp_g^* \theta_L^B = (T_{e\text{Ad}_{g^{-1}}})_A^B \theta_L^A.$$

Dowód ostatniej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. $\square$

Definicja 7. Przyjmijmy zapis Stw. 4 i niechaj $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ będzie rozmaitością gładką, G zaś – grupą Liego. **Pochodna logarytmiczna lewostronna** na $C^\infty(M, G)$ to odwzorowanie

$$\delta_L \log : C^\infty(M, G) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

określone wzorem

$$\delta_L \log f(x)(v_x) := T_{f(x)} \ell_{f(x)^{-1}} \circ T_x f(v_x),$$

słusznym dla dowolnych: punktu $x \in M$, wektora $v_x \in T_x M$ oraz funkcji $f \in C^\infty(M, G)$. Podobnie, **pochozna logarytmiczna prawostronna** na $C^\infty(M, G)$ to odwzorowanie

$$\delta_R \log : C^\infty(M, G) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

zadane w postaci

$$\delta_R \log f(x)(v_x) := T_{f(x)} \wp_{f(x)^{-1}} \circ T_x f(v_x).$$

Stwierdzenie 14. Przyjmijmy zapis Def. 7. Dla dowolnych $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$ (wymnożonych punktowo) i w każdym punkcie $x \in M$ prawdziwe są następujące tożsamości

$$\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_L \log f_2(x) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_{e\text{Ad}_{f_2(x)^{-1}}})(\delta_L \log f_1(x)),$$

$$\delta_R \log(f_1 \cdot f_2)(x) = \delta_R \log f_1(x) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_{e\text{Ad}_{f_1(x)}})(\delta_R \log f_2(x)).$$

Dowód: Dowodzimy pierwszej tożsamości. Dowód drugiej z nich przebiega analogicznie. Wprost na podstawie definicji, a w odwołaniu do Równ. (2), obliczamy

$$\begin{aligned} &\delta_L \log(f_1 \cdot f_2)(x) \\ &= T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1} \cdot f_1(x)^{-1}} \circ T_x(f_1 \cdot f_2) \\ &= T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} (\ell_{f_2(x)^{-1}} \circ \ell_{f_1(x)^{-1}}) \circ T_x(m \circ (f_1, f_2)) \\ &= T_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ T_{(f_1(x), f_2(x))} m \circ T_x(f_1, f_2) \\ &= T_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ T_{f_1(x) \cdot f_2(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ (T_{f_2(x)} \ell_{f_1(x)} \circ T_x f_2 + T_{f_1(x)} \wp_{f_2(x)} \circ T_x f_1) \\ &= T_{f_2(x)} \ell_{f_2(x)^{-1}} \circ T_x f_2 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_{e\text{Ad}_{f_2(x)^{-1}}}) \circ T_{f_1(x)} \ell_{f_1(x)^{-1}} \circ T_x f_1. \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 15. Przyjmijmy zapis Def. 7 i niechaj $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$, a wówczas prawdziwe są zdania:

$$\delta_L \log f_1 = \delta_L \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \ell_g \circ f_1$$

oraz

$$\delta_R \log f_1 = \delta_R \log f_2 \iff \exists_{g \in G} : f_2 = \rho_g \circ f_1.$$

Dowód: Wynikanie $\Leftarrow$ jest oczywiste, a już z pewnością staje się takim po przeanalizowaniu dowodu wynikania przeciwnego. To udowodnimy dla pochodnej lewostronnej. Dowód dla pochodnej prawostronnej jest w pełni analogiczny. Oto więc, stosując pierwszą z tożsamości ze Stw. 14, otrzymujemy

$$\delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2,$$

a ponieważ na podstawie tej samej tożsamości stwierdzamy też równość

$$0 \equiv \delta_L \log(f_1 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = \delta_L \log(\text{Inv} \circ f_1) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1,$$

przeto wobec założonej równości obu pochodnych lewostronnych

$$\begin{aligned} \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) &= -(\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_2 \\ &= -(\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{f_1}) \delta_L \log f_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Przywołując definicję pochodnej logarytmicznej, przepisujemy powyższe w postaci

$$0 = \delta_L \log(f_2 \cdot \text{Inv} \circ f_1) = T_{f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}} \ell_{f_1(\cdot) \cdot f_2(\cdot)^{-1}} \circ T_{(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1})},$$

albo równoważnej

$$T_{(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1})} = 0,$$

która implikuje równość

$$\forall_{x \in M} \forall_{V \in T_x M} : V(f_2(\cdot) \cdot f_1(\cdot)^{-1}) = 0,$$

czyli

$$\forall_{x \in M} : f_2(x) \cdot f_1(x)^{-1} = \text{const} \in G,$$

co jest właśnie postulowaną tezą. □

Stwierdzenie 16. W zapisie Def. 6 i 7 słuszne są tożsamości

$$\theta_L \equiv \delta_L \log \text{id}_G, \quad \theta_R = \delta_R \log \text{id}_G.$$

Dowód: Bez trudu sprawdzamy, dla dowolnego $g \in G$,

$$\begin{aligned} L_A \lrcorner \delta_L \log \text{id}_G(g) &\equiv T_g \ell_{g^{-1}} \circ T_g \text{id}_G(L_A(g)) = T_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{id}_{T_g G}(L_A(g)) \\ &= T_g \ell_{g^{-1}} \circ T_g \ell_g(L_A(e)) = L_A(e) \equiv t_A, \end{aligned}$$

co wobec bazowego charakteru układu $\{L_A\}_{A \in \overline{1, \dim G}}$ kończy dowód pierwszej części tezy stwierdzenia. Dowód w przypadku pochodnej prawostronnej przebiega analogicznie. □

Stwierdzenie 17. Przyjmijmy zapis Def. 6. Formy Maurera–Cartana spełniają – dla dowolnych elementów $g, h \in G$ – tożsamości

$$m^* \theta_L(g, h) = \theta_L(h) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g),$$

$$m^* \theta_R(g, h) = \theta_R(g) + (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_g) \circ \theta_R(h).$$

Dowód: Na mocy Stw. 16 (odczytanego w połączeniu z Def. 7), a w odwołaniu do Równ. (2) stwierdzamy, co następuje:

$$\begin{aligned} \theta_L(g \cdot h) &\equiv m^* \theta_L(g, h) = T_{g \cdot h} \ell_{(g \cdot h)^{-1}} \circ T_{(g, h)} m = T_{gh} (\ell_{h^{-1} \cdot g^{-1}}) \circ (T_g \wp_h \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_g \circ \text{pr}_2) \\ &\equiv T_g (\text{Ad}_{h^{-1}} \circ \ell_{g^{-1}}) \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 = T_e \text{Ad}_{h^{-1}} \circ T_g \ell_{g^{-1}} \circ \text{pr}_1 + T_h \ell_{h^{-1}} \circ \text{pr}_2 \\ &\equiv (\text{id}_{T^*G} \otimes T_e \text{Ad}_{h^{-1}}) \circ \theta_L(g) + \theta_L(h). \end{aligned}$$

Dowód drugiej tożsamości przebiega w pełni analogicznie. □

Lemat 2. Przyjmijmy zapis Stw. 7. Niechaj $H \subset G$ będzie grupą domkniętą grupy Liego G w topologii podprzestrzeni i niech $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{g}$ będzie ciągiem wektorów w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ tejże grupy, o granicy $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathfrak{g}$, a nadto niech $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ będzie ciągiem liczbowym zbieżnym do $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, przy czym $\lambda_{X_n}(t_n) \in H$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in H.$$

Dowód: Dla ustalonego (dowolnie) $t \in \mathbb{R}$ rozważmy ciąg

$$N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto E\left(\frac{t}{t_n}\right),$$

gdzie $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest cechą (funkcją *entier*). Jako że $\frac{t}{t_n} - 1 < N_n \leq \frac{t}{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, przeto – na mocy Twierdzenia o trzech ciągach, a wobec założenia poczynionego w odniesieniu do t . –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n = t,$$

wobec czego także

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n = t \triangleright X.$$

Na podstawie Stw. 6, 7, 9 oraz 10., jak również Stw. 5 i podstawowych właściwości potoku pola wektorowego wyznaczamy

$$\begin{aligned} \lambda_X(t) &= \lambda_{t \triangleright X}(1) \equiv \lambda_{\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot N_n \triangleright X_n}(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \cdot N_n \triangleright X_n}(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(N_n) \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n; 0, e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 1, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 1; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(1; N_n - 2, \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e)) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n \triangleright X_n}(N_n - 2; 0, e) \cdot \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^2 = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1)^{N_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}, \end{aligned}$$

a ponieważ $H \ni \lambda_{X_n}(t_n)^{N_n}$ jest domkniętą, przeto – zgodnie z tezą stwierdzenia – także

$$\lambda_X(t) \in \overline{H} \equiv H.$$

□

Twierdzenie 2 (Cartana o podgrupie domkniętej). Każda podgrupa domknięta grupy Liego jest tej ostatniej podrozmaitością i grupą Liego (a zatem w sumie podgrupą Liego). I odwrotnie, każda podgrupa grupy Liego będąca jej podrozmaitością jest domkniętą podgrupą Liego tejże grupy.

Dowód: Niechaj $H \subset G$ będzie podgrupą domkniętą w topologii podprzestrzeni i niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego G . Skonstruujemy bezpośrednio lokalną mapę podrozmaitości na otoczeniu otwartym punktu $e \in H \subset G$, a następnie utworzymy atlas podrozmaitości przesuwając ową mapę do każdego z punktów podgrupy. W tym celu rozważmy podzbiór

$$\mathfrak{h} := \{ D\gamma(0) \mid \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, H) \subset C^\infty(\mathbb{R}, G) \wedge \gamma(0) = e \} \subset \mathfrak{g}.$$

Dla dowolnej pary ścieżek $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, H)$ spełniających warunki $\gamma_\alpha(0) = e$, $\alpha \in \{1, 2\}$ i dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ definiujemy ścieżkę złożoną

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow H : t \longmapsto \gamma_1(t_1 \cdot t) \cdot \gamma_2(t_2 \cdot t),$$

po czym obliczamy

$$D\gamma(0) = t_1 \triangleright D\gamma_1(0) + t_2 \triangleright D\gamma_2(0).$$

Wektor styczny do γ w $t = 0$ należy do $\mathfrak{h}$ (wprost z definicji), widzimy zatem, że dowolna $\mathbb{R}$ -liniowa kombinacja elementów zbioru $\mathfrak{h}$ jest w nim zawarta, czyli – innymi słowy – $\mathfrak{h}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}$ -liniową przestrzeni $\mathfrak{g}$. W następnej kolejności dowodzimy tożsamości

$$(12) \quad \mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in H \}.$$

Zawieranie $\supseteq$ jest oczywiste, rozważmy przeto dowolny wektor $X := D\gamma(0) \in \mathfrak{h}$ określony przez pewną ścieżkę $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, H)$ i zdefiniujmy, dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ (na tyle, by ścieżka $\gamma(\cdot - \varepsilon, \varepsilon)$ była zawarta w dyfeomorficznym obrazie otoczenia $\mathcal{U}_0$ wektora $0 \in \mathfrak{g}$ względem odwzorowania $\exp$, zgodnie ze Stw. 10), ścieżkę wektorów

$$\xi :] - \varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathfrak{g} : t \longmapsto \exp \upharpoonright_{\mathcal{U}_0}^{-1} \circ \gamma(t).$$

Otrzymujemy, przywoławszy po drodze Równ. (2),

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} \ni X &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \gamma(t) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp \circ \xi(t) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\xi(0) + t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0) + \mathcal{O}(t^2)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\exp(t \triangleright D\xi(0)) \cdot \exp(\mathcal{O}(t^2))) \\ &= T_{e^{\exp(\mathcal{O}(t^2))}} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) \\ &\quad + T_{e^{\exp(t \triangleright D\xi(0))}} \upharpoonright_{t=0} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(\mathcal{O}(t^2)) \right) \\ &= T_{e^e} \left(\frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \right) + T_{e^e} l_e(0_{\mathfrak{g}}) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \exp(t \triangleright D\xi(0)) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{t \triangleright D\xi(0)}(1), \end{aligned}$$

czyli – w świetle Stw. 7 –

$$\mathfrak{h} \ni X = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \lambda_{D\xi(0)}(t) = D\xi(0).$$

Możemy zatem zapisać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \triangleright \xi\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{h}.$$

Zdefiniujmy ciągi

$$X_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{g} : n \longmapsto n \triangleright \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right), \quad t_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \longmapsto \frac{1}{n},$$

Na mocy Stw. 7 zachodzi relacja

$$\lambda_{X_n}(t_n) = \lambda_{t_n \triangleright X_n}(1) \equiv \lambda_{\xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right)}(1) \equiv \exp \circ \xi\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right) = \gamma\left(\frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + n}\right) \in H,$$

możemy więc przywołać Lemat 2, aby stwierdzić, że

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \equiv \lambda_{D\xi(0)}(t) = \lambda_{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n}(t) \in H,$$

co dowodzi inkluzji

$$\mathfrak{h} \subseteq \{ X \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \lambda_X(t) \in H \}.$$

Tym sposobem zidentyfikowaliśmy algebrę Liego podgrupy H . Ta wraz z dowolnym jej dopełnieniem prostym $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$,

$$(13) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}$ -liniowej $\mathfrak{g}$ (dopełnienie to nie jest w ogólności podalgebrą Liego algebry $\mathfrak{g}$) stanowi poszukiwany model lokalnej mapy podrozmaitości na otoczeniu e w $H \subset G$. Ażeby się o tym przekonać, pokażemy najpierw, że istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{M}$ wektora $0_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{m}$ o własności $\exp(\mathcal{M}) \cap H = \{e\}$. Istotnie, gdyby tak nie było, można byłoby wybrać ciąg wektorów $Y_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$ zbieżny do $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0_{\mathfrak{g}}$ i o własności $\exp(Y_n) \in H$, $n \in \mathbb{N}$, wtedy jednak – wybrawszy (dowolnie) normę $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ na $\mathfrak{m}$ ciągłą w topologii na $\mathfrak{g}$ (zatem np. wzięwszy normę euklidesową *indukującą* naturalną topologię na $\mathfrak{g}$) – uzyskalibyśmy ciąg wektorów

$$v_n : \mathbb{N} \rightarrow \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m} : n \mapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}}^{-1} \triangleright Y_n,$$

z którego wobec zwartości sfery $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$ moglibyśmy następnie wybrać podciąg zbieżny v_n o granicy $v := \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} \in \|\cdot\|_{\mathfrak{g}}^{-1}(\{1\}) \cap \mathfrak{m}$, więc też położywszy

$$\tau_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : n \mapsto \|Y_n\|_{\mathfrak{g}},$$

i sprawdziwszy relacje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n\|_{\mathfrak{g}} = \|0_{\mathfrak{g}}\|_{\mathfrak{g}} = 0,$$

$$\lambda_{v_n}(\tau_n) = \lambda_{\|Y_n\|_{\mathfrak{g}} \triangleright v_n}(1) = \lambda_{Y_n}(1) \in \exp(\mathfrak{h}) = H,$$

moglibyśmy ponownie skorzystać z Lematu 2, dostając

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lambda_v(t) \in H,$$

czyli – w świetle równości (12) – $v \in \mathfrak{h}$, a zatem – wobec rozkładu (13) – sprzeczność z wcześniejszym wynikiem $v \in \mathfrak{m} \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$. Mając pożądane otoczenie $\mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$, wybierzmy następnie takie otoczenia otwarte: $\mathcal{O}_{\mathfrak{h}}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{h}$ oraz $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{m}$ wektora $0_{\mathfrak{g}}$ w $\mathfrak{m}$, a także $\mathcal{O}_e$ elementu e w G , iżby odwzorowanie

$$\varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathcal{O}_e : (X, Y) \mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y)$$

było dyfeomorfizmem. O tym, że wybór taki jest możliwy, przesądza analiza rozszerzonego odwzorowania

$$\tilde{\varphi} : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow G : (X, Y) \mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y).$$

Jego styczna w $(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ to

$$D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}}) : T_{(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}) \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \rightarrow T_{\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})}G = T_e G \equiv \mathfrak{g} : (x, y) \mapsto x + y,$$

co w świetle Stw. 7 oraz Równ. (2) wynika wprost z rachunku

$$\begin{aligned} D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})(x, y) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright x) \cdot \exp(0_{\mathfrak{g}} + t \triangleright y)) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\lambda_{t \triangleright x}(1) \cdot \lambda_{t \triangleright y}(1)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\lambda_x(t) \cdot \lambda_y(t)) \\ &= T_e r_{\lambda_y(0)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_x(t) \right) + T_e l_{\lambda_x(0)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_y(t) \right) \\ &= T_e r_e(x) + T_e l_e(y) = x + y \end{aligned}$$

i dowodzi izomorficznego charakteru $D\tilde{\varphi}(0_{\mathfrak{g}}, 0_{\mathfrak{g}})$ (wszak $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$), który pozwala odnieść do $\tilde{\varphi}$ Twierdzenie o Lokalnej Odwracalności Odwzorowań. Niechaj teraz $h \in \mathcal{O}_e \cap H$, a wtedy $h = \exp(X) \cdot \exp(Y)$ dla pewnych $(X, Y) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{h}} \times \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$, ale też $\exp(X) \in \exp(\mathfrak{h}) = H$, więc $\exp(Y) = \exp(X)^{-1} \cdot h \in H \cdot (\mathcal{O}_e \cap H) \subset H$, co wobec założenia $Y \in \mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{M}$ oznacza, że $Y = 0_{\mathfrak{g}}$, czyli

$h = \exp(X) \in \exp(\mathcal{O}_h)$. Jest przeto $\kappa_e \equiv \varphi^{-1}$ mapą na otoczeniu $\mathcal{O}_e$ elementu neutralnego w G , a przy tym

$$H \cap \mathcal{O}_e = \kappa^{-1}(\{ (X, 0_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \mid X \in \mathcal{O}_h \}).$$

Mapę na otoczeniu punktu $h \in H$ definiujemy jako

$$\kappa_h := \kappa \circ l_{h^{-1}} : l_h(\mathcal{O}_e) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_h \times \mathcal{O}_m$$

(podzbiór $l_h(\mathcal{O}_e)$ jest otwarty jako homeomorficzny obraz zbioru otwartego $\mathcal{O}_e$). Uzyskujemy tym sposobem atlas podrozmaitości $\{\kappa_h\}_{h \in H}$ dla $H \subset G$, w którym operacje grupowe są gładkie jako ograniczenia operacji z G .

I odwrotnie, niech $H \subset G$ będzie podgrupą i podrozmaitością grupy Liego G . Operacje grupowe na H są stosownymi złożeniami tychże operacji na G (z założenia gładkich) z kanonicznymi gładkimi włożeniami $\iota_H : H \xrightarrow{\cong} \iota_H(H) \subset G$ i ich odwrotnościami $\iota_H^{-1} : \iota_H(H) \xrightarrow{\cong} H$,

$$m_H \equiv \iota_H^{-1} \circ m_G \circ (\iota_H \times \iota_H), \quad \text{Inv}_H = \iota_H^{-1} \circ \text{Inv}_G \circ \iota_H,$$

i jako takie są gładkie. Jest zatem H podgrupą Liego. Pozostaje pokazać, że jest ona domknięta. W tym celu rozważmy dowolny punkt $g \in \overline{H}$ z domknięcia $\overline{H}$ podgrupy H , wraz z odnośnym ciągiem $h_n : \mathbb{N} \rightarrow H$ doń zbieżnym, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = g$. Niechaj $\mathcal{O}_e \in \mathcal{T}(G)$ będzie dziedziną lokalnej mapy podrozmaitości κ na otoczeniu $e \in \iota_H(H)$, a $\mathcal{U}_e \in \mathcal{T}(G)$ – pewnym podotoczeniem $\mathcal{O}_e \supset \mathcal{U}_e$ o własności $\overline{\mathcal{U}_e} \subset \mathcal{O}_e$ (wystarczy wybrać $\mathcal{U}_e$ jako przeciwobraz względem κ dostatecznie małej kuli w $\mathbb{R}^{\dim G}$ wokół $\kappa(e)$). Przywoławszy Lemat 1, ustalmy (dowolnie) otoczenie otwarte $\mathcal{O}$ elementu neutralnego $e \in G$ o własności $m_G \circ (\text{Inv}_G \times \text{id}_G)(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e$, po czym rozważmy ciąg

$$g_n := g^{-1} \cdot h_n : \mathbb{N} \rightarrow G : n \mapsto g^{-1} \cdot h_n$$

o granicy (obliczonej z wykorzystaniem ciągłości mnożenia)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = e.$$

Prawie wszystkie jego wyrazy są zawarte w $\mathcal{O}$, a zatem – dla dostatecznie dużych $m, n \in \mathbb{N}$ –

$$h_n^{-1} \cdot h_m = g_n^{-1} \cdot g_m \equiv f(g_n, g_m) \in f(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \subset \mathcal{U}_e.$$

Przy tym dla ustalonego n otrzymujemy – wobec ciągłości mnożenia –

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_n^{-1} \cdot h_m = h_n^{-1} \cdot g,$$

a ponieważ granica ciągu punktów z $\mathcal{U}_e$ należy do $\overline{\mathcal{U}_e} \subset \mathcal{O}_e$, przeto także $h_n^{-1} \cdot g \in \mathcal{O}_e$. Przy tym w dziedzinie $\mathcal{O}_e$ mapy podrozmaitości κ przecięcie $H \cap \mathcal{O}_e$ jest homeomorficznym przeciwobrazem względem κ dopełnienia (w $\kappa(\mathcal{O}_e) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim G})$) sumy mnogościowej pary zbiorów otwartych złożonych z punktów o – odpowiednio – ściśle dodatnich i ściśle ujemnych ostatnich $\dim G - \dim H$ współrzędnych (opisujących kierunki transversalne do obrazu $\kappa(H \cap \mathcal{O}_e) = \mathcal{V} \times \{(0, 0, \dots, 0)\}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\dim H})$), co oznacza, że podzbiór $H \cap \mathcal{O}_e$ jest domknięty w $\mathcal{O}_e$. Ilekroć zatem mamy do czynienia z ciągiem punktów w $H \cap \mathcal{O}_e$ zbieżnym w $\mathcal{O}_e$, a takim jest $h_n^{-1} \cdot h_n$, granica jego leży także w $H \cap \mathcal{O}_e$, czyli w szczególności

$$h_n^{-1} \cdot g \in H \cap \mathcal{O}_e \subset H,$$

więc też $g \in H$, to zaś przesądza o postulowanej równości

$$\overline{H} = H.$$

□

- (1) Grupa (pseudo)ortogonalna $O_{\mathbb{R}}(p, q)$ (1) jest (jako zbiór) przeciwbrazem $\tau^{-1}(\{\mathbf{0}_n\})$ podzbioru domkniętego $\{\mathbf{0}_n\} \subset \mathbb{R}(p+q)$ względem odwzorowania (jawnie ciągłego)

$$\tau : GL_{\mathbb{R}}(p+q) \longrightarrow \mathbb{R}(p+q) : A \longmapsto A^T \boxminus \mathbf{1}_{p,q} \boxminus A - \mathbf{1}_{p,q},$$

zapisanego przy użyciu macierzy

$$\mathbf{1}_{p,q} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_q),$$

jest przeto podgrupą domkniętą grupy Liego $GL_{\mathbb{R}}(p+q)$ z Przykł. 1 (4), czyli też (pod)grupą Liego. Grupa ta ma wyróżnioną podgrupę Liego

$$SO_{\mathbb{R}}(p, q) \equiv \det_{(p+q)}^{-1}(\{1\}),$$

zwaną grupą specjalną ortogonalną.

W przypadku $pq = 0$ ta ostatnia podgrupa zadaje rozkład grupy ortogonalnej na składowe spójne

$$O_{\mathbb{R}}(p, q) = SO_{\mathbb{R}}(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}(p, q),$$

w którego zapisie

$$P_{e_1} : \mathbb{R}^{x^p} \curvearrowright (v^1, v^2, \dots, v^p) \longmapsto (-v^1, v^2, \dots, v^p)$$

jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^1 = 0$.

W przypadku $pq \neq 0$ podgrupa $SO_{\mathbb{R}}(p, q)$ rozkłada się na składowe spójne

$$SO_{\mathbb{R}}(p, q) = SO_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot P_{e_{p+1}} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, q),$$

przy czym $P_{e_{p+1}}$ jest odbiciem elementarnym w hiperpłaszczyźnie o równaniu $v^{p+1} = 0$, a (pod)grupę Liego będącą składową spójną jednostki $SO_{\mathbb{R}}^+(p, q)$, zwaną **grupą specjalną ortogonalną ortochroniczną**, tworzą macierze zachowujące zarówno orientację podprzestrzeni $\mathbb{R}^{x^p} \times \{\mathbf{0}_q\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$, jak i orientację podprzestrzeni $\{\mathbf{0}_p\} \times \mathbb{R}^{x^q} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ (należy zwrócić uwagę, że przekształcenia ortogonalne zachowują każdą z tych podprzestrzeni, a to z racji określoności formy kwadratowej $\delta_E^{(p,q)}$ w ograniczeniu do każdej z nich). Ostatecznie otrzymujemy rozkład pełnej grupy ortogonalnej na składowe spójne w postaci

$$O_{\mathbb{R}}(p, q) = SO_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_{p+1}} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, q) \sqcup P_{e_1} \cdot P_{e_{p+1}} \cdot SO_{\mathbb{R}}^+(p, q).$$

2. UZUPEŁNIENIE: ROZMAITOŚCI Z DZIAŁANIEM GRUPY LIEGO

Dotychczasowa dyskusja dostarczyła nam należytych podstaw pojęciowych do omówienia zbioru zagadnień dotyczących działania grup (Liego) na rozmaiłościach, którymi zajmujemy się obecnie.

Zacniemy od pojęć podstawowych opisanych w

Definicja 8. Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Niechaj G będzie grupą² i niech X będzie zbiorem o grupie symetrycznej³. Homomorfizm grup

$$\lambda : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X) : g \longmapsto \lambda_g$$

określamy mianem **działania lewostronnego grupy G na zbiorze X** , na którym jest określone działanie grupy G , nazywamy **zbiorem z działaniem lewostronnym grupy G** . Antyhomomorfizm

$$\varrho : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X) : g \longmapsto \rho_g$$

nazywamy **działaniem prawostronnym grupy G na zbiorze X** , a zbiór w nie wyposażony – **zbiorem z działaniem prawostronnym grupy G** . Lekko przeciążając notację, realizację podgrupy $\lambda_G \subset \mathfrak{S}(X)$ będziemy zapisywać jako

$$\lambda : G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto \lambda_g(x) \equiv g \triangleright x \equiv \lambda(g, x),$$

²Dla skrótu odwołujemy się do grupy poprzez jej nośnik.

³Grupa symetryczna zbioru to grupa permutacji jego elementów. (przyp.)

a podgrupy $\varrho_G \subset \mathfrak{S}(X)$ – jako

$$\varrho : X \times G \longrightarrow X : (x, g) \longmapsto \varrho_g(x) \equiv x \triangleleft g \equiv \varrho(x, g).$$

Niechaj X_A , $A \in \{1, 2\}$ będą zbiorami z działaniami lewostronnymi λ^A grupy G i niech $f : X_1 \longrightarrow X_2$ będzie odwzorowaniem pomiędzy nimi. Powiemy, że f jest **odwzorowaniem lewostronnie G-ekwiwariantnym**, jeśli spełniony jest warunek opisany przez diagram przemienności

$$\begin{array}{ccc} G \times X_1 & \xrightarrow{\lambda^1} & X_1 \\ \text{id}_G \times f \downarrow & & \downarrow f \\ G \times X_2 & \xrightarrow{\lambda^2} & X_2 \end{array}.$$

Analogicznie w przypadku działań prawostronnych ϱ^A , $A \in \{1, 2\}$ na tych zbiorach odwzorowanie $f : X_1 \longrightarrow X_2$ spełniające warunek wyrażony przez diagram przemienności

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times G & \xrightarrow{\varrho^1} & X_1 \\ f \times \text{id}_G \downarrow & & \downarrow f \\ X_2 \times G & \xrightarrow{\varrho^2} & X_2 \end{array}$$

nazwiemy **odwzorowaniem prawostronnie G-ekwiwariantnym**.

Parę $((X, \mathcal{T}(X)), \lambda)$ złożoną z przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}(X))$ oraz działania lewostronnego grupy topologicznej G na X nazywamy **przestrzenią z działaniem topologicznym lewostronnym grupy G** (albo **G-przestrzenią topologiczną lewostronną**), jeśli λ jest odwzorowaniem ciągłym. Analogicznie definiujemy **przestrzeń z działaniem topologicznym prawostronnym** (albo **G-przestrzeń topologiczną prawostronną**) G . Ciągłe odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) G-ekwiwariantne między przestrzeniami z działaniem topologicznym lewostronnym (wzgl. prawostronnym) nosi miano **odwzorowania lewostronnie (wzgl. prawostronnie) topologicznie G-ekwiwariantnego**.

Zastępując w powyższej definicji przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T}(X))$ rozmaitością różniczkowalną $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ klasy C^∞ , grupę topologiczną G – grupą Liego (oznaczaną tym samym symbolem), określenie zaś „topologiczny” – określeniem „gładki” (w rozumieniu: klasy C^∞) otrzymujemy, odpowiednio: **rozmaitość z działaniem gładkim lewostronnym** (albo **G-rozmaitość gładką lewostronną**) wzgl. **prawostronnym** (albo **G-rozmaitość gładką prawostronną**), **odwzorowanie lewostronnie (wzgl. prawostronnie) gładko G-ekwiwariantne**. Zbiór odwzorowań G-ekwiwariantnych między ustalonymi dwiema rozmaitościami X_A , $A \in \{1, 2\}$ z działaniem grupy G będziemy oznaczać symbolem

$$\text{Hom}_G(X_1, X_2).$$

Działanie grupy Liego na rozmaitości indukuje na niej pola wektorowe, o których mówi

Definicja 9. Przyjmijmy zapis Def. 8 (i poprzednich) i niechaj $((M, \widehat{\mathcal{A}}), \lambda)$ będzie rozmaitością z działaniem gładkim (lewostronnym) grupy Liego G o algebrze Liego $\mathfrak{g}$. **Pole wektorowe fundamentalne lewostronne** na M to obraz dowolnego elementu $X \in \mathfrak{g}$ względem odwzorowania

$$\mathcal{K}_1(\cdot_2) \equiv T_{(e, \cdot_2)} \lambda(\cdot_1, \mathbf{0}_{T_2 M}) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M) : X \longmapsto T_{(e, \cdot_2)} \lambda(-X, \mathbf{0}_{T_2 M}) \equiv \mathcal{K}_X(\cdot_2),$$

przy czym wartość otrzymanego tą drogą pola wektorowego w dowolnym punkcie $x \in M$ to

$$\mathcal{K}_X(x) \equiv T_{(e, \cdot_2)} \lambda(-X, \mathbf{0}_{T_2 M})(x) \equiv T_{(e, x)} \lambda(-X, \mathbf{0}_{T_x M}) \in T_x M.$$

Pole wektorowe fundamentalne prawostronne definiujemy analogicznie.

Uwaga 6. Ze względów tak praktycznych, jak i historycznych, warto poświęcić chwilę na wyprowadzenie formuły określającej działanie pola fundamentalnego na przestrzeni funkcji (klasy C^1) na rozmaiłości M . W tym celu ustalmy (dowolnie) taką funkcję $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ i policzmy jej pochodną wzdłuż $\mathcal{K}_X$ w punkcie $x \in M$,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_X(f)(x) &\equiv \mathsf{T}_x f(\mathcal{K}_X(x)) = \mathsf{T}_x f \circ \mathsf{T}_{(e,x)} \lambda(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) = \mathsf{T}_{(e,x)}(f \circ \lambda)(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (f \circ \lambda)(\mathcal{L}_t^{-X}(e), \Phi_0(t, x)) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} f(\mathcal{L}_t^{-X}(e) \triangleright \Phi_0(t, x)) \\ &= \frac{d}{dt} \big|_{t=0} f((e \cdot \exp(t \triangleright (-X))) \triangleright x) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} f(\exp(-t \triangleright X) \triangleright x). \end{aligned}$$

W szczególności odnosząc powyższy rachunek do funkcji współrzędniowych na otoczeniu x , otrzymujemy jawną reprezentację pola fundamentalnego w postaci

$$\mathcal{K}_X(x) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (\mathcal{L}_t^{-X}(e) \triangleright x) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (\exp(-t \triangleright X) \triangleright x).$$

Stwierdzenie 18. Przyjmijmy zapis Def. 9. Odwzorowanie $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ jest G-ekwiwariantnym homomorfizmem algebr Liego, tj. dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ i $g \in G$ zachodzą tożsamości:

$$\lambda_g * \mathcal{K}_X = \mathcal{K}_{\mathsf{T}_e \text{Ad}_g(X)}$$

oraz

$$[\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M = \mathcal{K}_{[X, Y]_{\mathfrak{g}}}.$$

Dowód: Pierwszej z postulowanych tożsamości bronimy w bezpośrednim rachunku, wykorzystującym oczywistą relację

$$\lambda_g \circ \lambda = \lambda \circ (\text{Ad}_g \times \lambda_g),$$

a prowadzonym w dowolnym punkcie $x \in M$,

$$\begin{aligned} \lambda_g * \mathcal{K}_X(x) &\equiv \mathsf{T}_{(\lambda_{g^{-1}}(x))} \lambda_g(\mathcal{K}_X \circ \lambda_{g^{-1}}(x)) \equiv \mathsf{T}_{g^{-1} \triangleright x} \lambda_g \circ \mathsf{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} \lambda(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathsf{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} (\lambda_g \circ \lambda)(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) = \mathsf{T}_{(e, g^{-1} \triangleright x)} (\lambda \circ (\text{Ad}_g \times \lambda_g))(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{g^{-1} \triangleright x} M}) \\ &= \mathsf{T}_{(e, x)} \lambda(\mathsf{T}_e \text{Ad}_g(-X), \mathsf{T}_{g^{-1} \triangleright x} \lambda_g(\mathbf{0}_{\mathsf{T}_{g^{-1} \triangleright x} M})) = \mathsf{T}_{(e, x)} \lambda(-\mathsf{T}_e \text{Ad}_g(X), \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) \\ &\equiv \mathcal{K}_{\mathsf{T}_e \text{Ad}_g(X)}(x). \end{aligned}$$

Celem udowodnienia homomorficznego charakteru odwzorowania $\mathcal{K}$. ustalamy relację między polami wektorowymi $R_X \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M} \in \Gamma(\mathsf{T}G) \oplus \Gamma(\mathsf{T}M) \equiv \Gamma(\mathsf{T}(G \times M))$ (gdzie $\mathbf{0}_{\mathsf{T}M}$ jest ciągiem zerowym $\mathsf{T}M$) i $\mathcal{K}_X$. Przydatną okazuje się przy tym tożsamość

$$\lambda \circ (\wp_g \times \text{id}_M) = \lambda \circ (\text{id}_G \times \lambda_g),$$

słuszna dla dowolnego elementu $g \in G$ (i prawego działania $\wp$. grupy na sobie). Obliczamy – dla dowolnych $(g, x) \in G \times M$ –

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}_{(g,x)} \lambda((R_{-X} \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M})(g, x)) = \mathsf{T}_{(g,x)} \lambda \circ (\mathsf{T}_e \wp_g \times \text{id}_{\mathsf{T}_x M})(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) \\ &= \mathsf{T}_{(e,x)} (\lambda \circ (\wp_g \times \text{id}_M))(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) = \mathsf{T}_{(e,x)} (\lambda \circ (\text{id}_G \times \lambda_g))(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) \\ &= \mathsf{T}_{(e,g \triangleright x)} \lambda \circ \mathsf{T}_{(e,x)} (\text{id}_G \times \lambda_g)(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) = \mathsf{T}_{(e,g \triangleright x)} \lambda(\text{id}_{\mathsf{T}_e G}(-X), \mathsf{T}_x \lambda_g(\mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M})) \\ &= \mathsf{T}_{(e,g \triangleright x)} \lambda(-X, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_{g \triangleright x} M}) \equiv \mathcal{K}_X \circ \lambda(g, x). \end{aligned}$$

Możemy przeto zapisać

$$\begin{aligned} &[\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M(x) \equiv [\mathcal{K}_X, \mathcal{K}_Y]_M \circ \lambda(e, x) = \mathsf{T}_{(e,x)} \lambda([R_{-X} \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M}, R_{-Y} \oplus \mathbf{0}_{\mathsf{T}M}]_{G \times M}(e, x)) \\ &= \mathsf{T}_{(e,x)} \lambda([R_X, R_Y]_G(e), \mathbf{0}_{\mathsf{T}M}(x)) \equiv \mathsf{T}_{(e,x)} \lambda(-[X, Y]_{\mathfrak{g}}, \mathbf{0}_{\mathsf{T}_x M}) \equiv \mathcal{K}_{[X, Y]_{\mathfrak{g}}}(x). \end{aligned}$$

□

DODATEK A. ODZWOROWANIA

Niechaj X_A, Y_A , $A \in \{1, 2\}$ będą zbiorami, $f_A : X_A \rightarrow Y_A$ zaś – odwzorowaniami. Definiujemy wówczas **produkt** odwzorowań f_A jako odwzorowanie

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Mając do dyspozycji zbiory X, Z_1, Z_2 i parę odwzorowań $F_\alpha : X \rightarrow Z_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$, definiujemy także odwzorowanie

$$(F_1, F_2) : X \rightarrow Z_1 \times Z_2 : x \mapsto (F_1(x), F_2(x)).$$

Relację pomiędzy tymi dwoma typami odwzorowań ustalmy wprowadzając odwzorowanie

$$\Delta : X \rightarrow X \times X : x \mapsto (x, x),$$

wkładające zbiór X w jego kwadrat kartezjański w postaci jego przekątnej. Przy jego pomocy możemy zapisać tożsamość

$$(F_1, F_2) = (F_1 \times F_2) \circ \Delta.$$

Jest oczywiste, że ilekroć wszystkie zbiory objęte definicjami są wyposażone w strukturę różniczkowalnej klasy C^∞ , względem której odnośne odwzorowania są gładkie, własność ta jest dziedziczona przez $f_1 \times f_2$ i (F_1, F_2) .

DODATEK B. IŁOZYŃ PÓŁPROSTY GRUP

Niechaj G_A , $A \in \{1, 2\}$ będą grupami i niech

$$\alpha : G_1 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Grp}}(G_2) : g \mapsto \alpha_g$$

będzie homomorfizmem grup przyporządkowującym dowolnemu elementowi G_1 odnośny automorfizm (tj. odwracalny endomorfizm – te tworzą grupę z superpozycją jako operacją binarną, odwrotnością jako operacją unarną i automorfizmem identycznościowym jako elementem neutralnym) G_2 . Wówczas produkt kartezjański $G_1 \times G_2$ nośników struktury grupy możemy wyposażyć w *odmienną od produktowej* strukturę grupy definiując operację binarną

$$(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2 : ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1 \cdot_{G_1} h_1, \alpha_{h_1^{-1}}(g_2) \cdot_{G_2} h_2)$$

oraz odwrotność

$$G_1 \times G_2 \curvearrowright : (g_1, g_2) \mapsto (g_1^{-1}, \alpha_{g_1}(g_2^{-1})),$$

dla których para elementów neutralnych (e_{G_1}, e_{G_2}) jest elementem neutralnym. Tak zadaną strukturę grupy określamy mianem **produktu półprostego grup** i oznaczamy symbolem

$$G_1 \ltimes G_2.$$

Przykładem takiej struktury jest grupa Poincarégo symetrii przestrzeni Minkowskiego $\mathbb{R}^{3,1}$, będąca produktem półprostym grupy Lorentza i przemiennej grupy translacji w $\mathbb{R}^4$,

$$\text{ISO}(3, 1) = \text{SO}(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4,$$

zdefiniowana przez standardową reprezentację wektorową

$$\Lambda : \text{SO}(3, 1) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^{3+1}) \cong \text{GL}(4; \mathbb{R}).$$