Wykłady VIII - XII

Uogólnienia algebr Liego i ich reprezentacje

WYKŁAD IX

2020/21

Mamy ostatnie

(39)

__Stw. 12.__ Dowolna reprezentacja unitarna na skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej jest w pełni przywiedlna.

__D:__ Niech (V,ρ) będzie unitarną reprezentacją rzeczywistej algebry Liego $\mathfrak{g}$. Oznaczmy iloczyn skalarny na V przez $(\cdot|\cdot)$.

Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią $\mathfrak{g}$-niezmienniczą, a $W^\perp$ jej dopełnieniem $(\cdot|\cdot)$-ortogonalnym. Zachodzi

$$V = W ⦹ W^\perp$$

Pokażemy, że $W^\perp$ także jest $\mathfrak{g}$-niezm.

Istotnie, $\forall\, (w,v) \in W \times W^\perp\ \forall\, X \in \mathfrak{g}$:

$$(w|\rho(X)v) \equiv (\rho(X)^\dagger(w)|v) = -(\rho(X)(w)|v)$$

$= 0$, gdyż $\rho(X)(w) \in W$ ($\Leftarrow W$ jest $\mathfrak{g}$-niezm.)

Jeśli (V, ϱ) NIE jest nieprzywiedlna, to istnieje $\{0\} \neq W \subsetneq V$, która jest ϱ-niezm., a wtedy $V = W \oplus W^{\perp}$ i $W^{\perp}$ ϱ-niezm., czyli $(W^{(\perp)}, \varrho|_{W^{(\perp)}})$ to (pod)reprezentacje unitarne.

Przy tym albo $(W, \varrho|_{W})$ nieprzywiedlna, albo rozkłada się na $\widetilde{W} \oplus \widetilde{W}^{\perp}$. Analogicznie wniosek jest słuszny dla $W^\perp$. ㊷

Kontynuacja powyższej procedury prowadzi (w skończonej liczbie kroków) do pełnego rozkładu (V,ρ) na podreprezentacje nieprzywiedlne $\square$

Nader ważnym przykładem reprezentacji unitarnych algebr Liego są reprezentacje zwartych grup Liego. Aby się o tym przekonać, wprowadźmy

Def. 14. Niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$ i niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Nadto niech $R : G \xrightarrow[C^\infty]{} GL(V;\mathbb{K})$ będzie reprezentacją G na V, więc homomorfizmem grup Liego. Wówczas homomorfizm algebr Liego

$dR \equiv T_e R : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ jest określany mianem REPREZENTACJI POCHODNEJ $\mathfrak{g}$ na V.

Mamy

Stw. 13. Przyjmijmy założenia Def. 14, jednocześnie dodatkowo, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i na V jest określona niezdegenerowana struktura hermitowska

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{iloczyn skalarny}).$$

Wówczas ilekroć R jest unitarna, tj.

$$\forall g \in G : \quad (\cdot|\cdot) \circ (R(g) \times R(g)) = (\cdot|\cdot) \Leftrightarrow R(g)^\dagger = R(g)^{-1},$$

własność tę ma także reprezentacja pochodna dR.

<u>D</u>: Jeśli $\forall g \in G : R(g)^\dagger = R(g)^{-1}$,

to w szczególności

$$\forall_{\substack{X \in \mathfrak{g} \\ t \in \mathbb{R}}} : R\left(\exp^G(t \vartriangleright X)\right)^\dagger = R\left(\exp^G(-t \vartriangleright X)\right),$$

ale Stw. 2-3-4-7.11 o naturalności exp pozwala zapisać $R \circ \exp^G = \exp^{GL(V;\mathbb{K})} \circ dR$,

zatem

$$\forall_{\substack{X \in \mathfrak{g} \\ t \in \mathbb{R}}} : \exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(t \triangleright X)\big)^{\dagger} = \exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(-t \triangleright X)\big)$$ ㊻

$\exp^{GL(V;\mathbb{K})}$ to „zwykły" eksponens

$$\big(\exp^{GL(V;\mathbb{K})}(dR(t \triangleright X))\big)^{\dagger} = \exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(t \triangleright X)^{\dagger}\big) \equiv \lambda_{dR(t \triangleright X)^{\dagger}}(1) \overset{\text{liniowość } dR}{=} \lambda_{t \triangleright dR(X)^{\dagger}}(1) \underset{\text{Stw. 2-3-4-7.7}}{=} \lambda_{dR(X)^{\dagger}}(t)$$

$$\exp^{GL(V;\mathbb{K})}\big(dR(-t \triangleright X)\big) \equiv \lambda_{dR(-t \triangleright X)}(1) \overset{\text{liniowość } dR}{=} \lambda_{t \triangleright dR(-X)}(1) \overset{\text{Stw. 2-3-4-7.7}}{=} \lambda_{dR(-X)}(t)$$

Różniczkując powyższą tożsamość obustronnie, $\underset{\text{w } t=0}{}$ otrzymujemy poszukiwaną własność

$$\forall X \in \mathfrak{g} : \quad dR(X)^{\dagger} = dR(-X) = -dR(X).$$

$\square$

Pozostaje jeszcze ustalić naturalne okoliczności, w których mamy do czynienia z reprezentacjami unitarnymi grup Liego. O takich mówi ...

Tw. 1. [Weyla-Schura-Hurwitza o unitarności]

Niech G będzie zwartą grupą Liego. Wtedy dowolna (skończenie wymiarowa) reprezentacja R grupy G na niezwyrodniałej (zespolonej) przestrzeni unitarnej $(V, (\cdot|\cdot))$ jest UNITARYZOWALNA, tj. istnieje na V niezwyrodniała forma hermitowska, wzgl. której R jest unitarna.

D : Niechaj $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. Rozważmy dowolny element $\omega \in \Lambda^{\dim G} \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ i stowarzyszmy z nim formę RI

$$\begin{tikzcd} gh^{-1} \arrow[r, "P_h"] & g \end{tikzcd}$$

$$\Omega \in \Omega^{\dim G}(G) \; : \; \Omega(g) := \omega \circ \left(T_g P_{g^{-1}} \times T_g P_{g^{-1}} \times \ldots \times T_g P_{g^{-1}} \right), \; g \in G$$

Istotnie, $\forall_{g,h \in G} : \; P_h^*\big(\Omega(g)\big) \equiv \Omega(g) \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G}$

$$\equiv \omega \circ T_g P_{g^{-1}}^{\times \dim G} \circ T_{gh^{-1}} P_h^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} \left(P_{g^{-1}} \circ P_h \right)^{\times \dim G}$$

$$= \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{hg^{-1}}^{\times \dim G} = \omega \circ T_{gh^{-1}} P_{(gh^{-1})^{-1}}^{\times \dim G} \equiv \Omega(gh^{-1}).$$

Trywialność TG pozwala nam ustalić orientację o na G jako układ baz $\Gamma(TG)$ odpowiadający $(R_{X_1}, R_{X_2}, \dots, R_{X_{\dim G}})$ dla dowolnego układu bazowego $\{X_A\}_{A\in\overline{1,\dim G}}$ o wartości

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_{\dim G}) > 0 .$$

Mając Ω, możemy zadać całkę z dowolnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(G;\mathbb{R})$ wzorem

$$\int_G f := \int_{(G,O)} f \cdot \Omega \, ,$$ przy czym

$$f > 0 \implies \int_G f > 0$$ (względem zadanej przez Ω).

Bez trudu przekonujemy się, że całka ta jest P-niezmiennicza w rozumieniu tożsamości

$$\forall g \in G : \int_G P_g^* f = \int_G f \quad (\Leftarrow P_g^* \Omega = \Omega).$$

Rozważymy w szczególności uśrednianie przez $V \times V$ zadanej funkcji

$$f_{v,w} : G \longrightarrow \underset{\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}}{\underset{\cap}{\mathbb{K}}} : g \longmapsto (R(g)(v)|R(g)(w)),$$

$v,w \in V$

Dla $w = v \in V$ jest $f_{v,w} \geqslant 0$ $(\text{i } = 0 \iff v = 0)$

zatem $\int_G f_{v,v} \geqslant 0$ i $= 0 \iff v = 0$,

Df. $(\cdot|\cdot)^G : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} : (v,w) \mapsto \int_G f_{v,w}$

zadaje niezdegenerowaną formę hermitowską (o ile tę własność i miała tamta $(\cdot|\cdot)$).

Tak zdefiniowana forma spełnia warunek $\forall g \in G \ \forall v,w \in V$:

$$(R(g)(v)|R(g)(w))^G \equiv \int_G f_{R(g)(v),\,R(g)(w)} \equiv \int_{(G,O)} (R(\cdot)R(g)(v)|R(\cdot)R(g)(w))\,\Omega(\cdot)$$

$$= \int_{(G,O)} (R(\cdot\cdot g)(v)|R(\cdot\cdot g)(w))\,\Omega(\cdot) \equiv \int_{(G,O)} (R\circ p_g(\cdot)(v)|R\circ p_g(\cdot)(w))\,\Omega(\cdot)$$

$$\equiv \int_G p_g^* f_{v,w} = \int_G f_{v,w} \equiv (v|w)^G,$$

który oznacza właśnie, że reprezentacja R jest wzgl. niej unitarna □

Z połączenia dwóch ostatnich wyników (54) wyprowadzimy

Str. 14. Reprezentacje pochodne algebry Liego zwartej grupy Liego są unitaryzowalne.

D: Oczywiste.

Ta cecha algebr Liego grup zwartych sprawia, że wkrótce skupimy uwagę na algebrach Liego z nimi prosto stowarzyszonych.

Tymczasem sformułujemy proste, lecz wielce przydatne

(55)

Tw. 2. (Lemat Schura) Niechaj $\mathfrak{g}$ - algebra Liego.

1° Niech (V_1, ρ_1) i (V_2, ρ_2) - jej reprezentacje

$\chi : (V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$ - splatacz.

Wówczas zachodzi dysjunkcja $\chi = 0 \ \underline{\vee}\ \chi$ izo.

2° Niech (V,ρ) – nieprzywiedlna reprezentacja G na zespolonej! przestrzeni wektorowej V ⑸⑹

$\chi : (V,\rho) \circlearrowleft$ – splatacz

Wtedy $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \chi = \lambda \cdot id_V$.

3° Niech (V_1,ρ_1) i (V_2,ρ_2) – nieprzywiedlne reprezentacje G na zespolonych! przestrzeniach wektorowych V_1 i V_2, odp.

! $\neq 0$

$\chi_1, \chi_2 : (V_1,\rho_1) \to (V_2,\rho_2)$ – splatacze.

Wtedy $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} : \chi_1 = \lambda \cdot \chi_2$.

D: **Ad 1°** Proste ćwiczenie domowe (zbadać niezmienniczość ker X i Im X).

Ad 2° Mamy $\forall X \in \mathfrak{g}$ — $X \circ \rho(X) = \rho(X) \circ X$, a ponieważ $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ma co najmniej jedną wartość własną, $\mathrm{Sp}X \neq \emptyset$. Wówczas $\forall X \in \mathfrak{g}$: $\rho(X)(V_\lambda(X)) \subset V_\lambda(X)$, czyli

$V_\lambda(X) \subseteq V$ jest podprzestrzenią o.-niezm. Przy tym $\lambda \in \operatorname{Sp} X$ oznacza, że $V_\lambda(X) \neq \{0_V\}$, zatem wobec nieprzywiedlności ϱ zachodzi

$$V = V_\lambda(X),$$

to zaś oznacza, że

$$X \equiv X\restriction_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \triangleright \mathrm{id}_{V_\lambda(X)} \equiv \lambda \triangleright \mathrm{id}_V.$$

Ad 3° Skoro $\chi_2 \neq 0$, to na mocy 1° splotacz ten jest izomorfizmem.

Istnieje zatem χ_2^{-1} i $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} : (V_2, \rho_2) \circlearrowleft$ splotacz!

W świetle 2°, $\chi_1 \circ \chi_2^{-1} = \lambda \triangleright \mathrm{id}_{V_2}$ dla pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{C}$, a w takim razie $\chi_1 = \lambda \triangleright \chi_2$. □

III* Wyróżnione reprezentacje $su(2)$.

Reprezentujemy $su(2)$ na

$$V_n := \{ w \in \mathbb{C}_2[z_1, z_2] \mid \deg w = n \}$$

(jednorodne wielomiany stopnia 2)

$$w = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^{k}$$

Niech $X = X_{ij} \cdot E_{ij}$, $(E_{ij})^k_\ell = \delta^k_i \delta_{j\ell}$, a wtedy

$$\rho_n(X)(w) := -\left(X_{11} z_1 + X_{12} z_2\right)\frac{\partial w}{\partial z_1} - \left(X_{21} z_1 + X_{22} z_2\right)\frac{\partial w}{\partial z_2}$$

Zadaje reprezentację sl(2).

Niech $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- baza sl(2).

Wówczas

$$\rho_n(H) = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2$$

$$\rho_n(E_+) = -x_2\partial_1$$

$$\rho_n(E_-) = -x_1\partial_2$$

spełniają algebrę Liego su(2).

i dostajemy

$$\rho_n(H)\left(\overbrace{x_1^{n-k}x_2^k}^{\text{wektor wagowy!}}\right) = (-n+2k)\,x_1^{n-k}x_2^k$$

$$(*)\qquad \rho_n(E_+)(x_1^{n-k}x_2^k) = -(n-k)\,x_1^{n-k-1}x_2^{k+1}$$

$$\rho_n(E_-)(x_1^{n-k}x_2^k) = -k\,x_1^{n-k+1}x_2^{k-1}$$

Str. 15. $\forall n \geq 0$: (V_n, ρ_n) jest nieprzywiedlna.

D: Wystarczy pokazać, że dowolna $su(2)$ - niezm. podprzestrzeń W_n w V_n jest równa V_n. Niech $w \in W_n$ będzie postaci $w = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^{n-k} z_2^{k}$, przy czym $\exists\, k \in \overline{0,n} : a_k \neq 0$.

Niech k_0 : największy indeks o niezerowym $a_{k_0} \neq 0$. Rozważmy

$$\rho_n(E_+)^{n-k_0} w = w_0 .$$

Operator $\rho_n(E_+)$ podnosi potęgę z_2 o 1, zatem $\rho_n(E_+)^{n-k_0}$ anihiluje wszystkie składniki w w oprócz $a_{k_0} z_1^{n-k_0} z_2^{k_0}$, ale $\rho_n(E_+)(z_1^{n-k} z_2^{k}) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $k = n$, zatem

$$\rho_n(E_+)^{n-k_0} W = \lambda_0 \triangleright z_2^n$$

$$\lambda_0 \neq 0$$

Skoro zaś W_n jest $\mathfrak{sl}(2)$-modułem, to musi zawierać z_2^n. Teraz jednak $\rho_n(E_-)^k z_2^n$, $k \in \overline{0,n}$ są – na mocy (*) (str. 50) – niezerowymi skalarnymi krotnościami $z_1^k z_2^{n-k}$, zatem te należą do W. Ponieważ jednak tworzą one bazę V_n, przeto — istotnie — $W_n = V_n$. □

Przejdziemy teraz do dyskusji takiej algebry Liego o reprezentacjach poddających się stosunkowo łatwej klasyfikacji. Ich powszechność w zastosowaniach fizycznych i opracowanie takie zasłużenie wielu rozważań...

IV Elementy teorii algebr półprostych

Def. 15 Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego. Ilekroć istnieje zwarta grupa Liego K o algebrze Liego $\mathfrak{k}$ takiej, że $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, algebrę $\mathfrak{g}$ nazywamy **REDUKTYWNĄ**. Jeśli ponadto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, to mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest **PÓŁPROSTA**.

Dla dowolnej półprostej algebry Lieg ⑥⑧ g algebry K wyznaczymy ZWARTĄ FORMĄ RZECZYWISTĄ g.

×

NB: W literaturze występują także inne (równoważne) definicje półprostoty, np.

* nieistnienie niezerowych ideałów przemiennych
** — " — " — " — rozwiązalnych
*** zerowość radykału (maksymalnego ideału rozwiązalnego)

**** niezwyrodnienie FORMY KILLINGA ⑥⑨

$$\kappa : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$: (X,Y) \longmapsto \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\left[X,\left[Y,\cdot\right]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}}\right).$$

Wykazanie równoważności powyższych definicji jest wysoce nietrywialne – w szczególności wykracza poza ramy niniejszego wykładu, w którym wybieramy definicję topologiczną na najszybsze dotarcie do fizykalnie istotnych rezultatów...

Przykłady : (1) $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$

(2) $\mathfrak{so}(n;\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$

(3) $\mathfrak{sp}(n;\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$

są półproste.

(1') $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$

(2') $\mathfrak{so}(2;\mathbb{C})$

są reduktywne, lecz nie półproste.

(ćw. ĆWICZENIA!)

Ażeby móc postąpić dalej, musimy przyjrzeć się bliżej szczególnej reprezentacji pochodnej, którą wprowadzimy w

Def. 16 Niechaj G będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{g}$. **REPREZENTACJA DOŁĄCZONA** $\mathfrak{g}$ na sobie to reprezentacja pochodna $(\mathrm{ad} \equiv dT_e\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$ stowarzyszona z **REPREZENTACJĄ DOŁĄCZONĄ** $(T_e\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$.

Z powyższym pojęciem, o fundamentalnym znaczeniu w dalszej części kursu, oswaja nas

Str. 16 przypomnijmy zapis Def. 16.

$$\forall X\in\mathfrak{g} : \mathrm{ad}_X \equiv \mathrm{ad}(X) = [X,\cdot]_{\mathfrak{g}}.$$

D: Rozważmy działanie dołączone G na $\mathfrak{g}$:

$$T_e\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g}\equiv T_eG \circlearrowleft \quad \text{dla} \quad \mathrm{Ad}_g : G\circlearrowleft : h\mapsto g\cdot h\cdot g^{-1}$$

o punkcie stałym $\mathrm{Ad}_g(e)=e$.

Zachodzi $\forall X\in\mathfrak{g} : T_e\mathrm{Ad}_g(X) \equiv T_{g^{-1}}\ell_g\circ T_e\wp_{g^{-1}}(X)$.

Przypomnijmy z dowodu Stw. 2-3-4-7.1 postać operacji binarnej w grupie stycznej $Tm : TG \times TG \to TG$,

$$T_{(g,h)} m = T_g P_h \circ pr_1 + T_h \ell_g \circ pr_2 \,,$$

z której wyprowadzamy tożsamości

$$T_e P_{g^{-1}}(X) = T_{(e,g^{-1})} m \left(X, 0_{T_{g^{-1}}G}\right), \qquad \forall \begin{array}{l} g \in G \\ X \in \mathfrak{g} \\ v \in T_{g^{-1}}G \end{array}$$

$$T_{g^{-1}} \ell_g (v) = T_{(g,g^{-1})} m \left(0_{T_g G}, v\right).$$

Tę pochodną wyrazić

$$T_e \mathrm{Ad}_g(X) = 0_{TG}(g) \cdot X \cdot 0_{TG}(g^{-1})$$

co wobec gładkości Tm oraz cięcia zerowego $0_{TG} \in \Gamma(TG)$ dowodzi gładkości działania $T_e \mathrm{Ad}$, niezbędnej dla zdefiniowania działania ad jako działania pochodnego.

W następnym kroku wykorzystujemy Stw. 2-3-4-7. 6 i 12.
(oraz 7.)

aby zapisać – dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ –

$$[L_X, L_Y]_{\Gamma(TG)} \equiv \mathcal{L}_{L_X} L_Y \equiv \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{L_X}(-t;\cdot)_* L_Y$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P_{\exp^G(-t \triangleright X)*} L_Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(-t \triangleright X)^{-1}}(Y)}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t \triangleright X)}(Y)}$$, a stąd

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} \equiv [L_X, L_Y]_{\Gamma(TG)}(e) \overset{\downarrow}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t \triangleright X)}(Y)}(e)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} T_e \mathrm{Ad}_{\exp^G(t \triangleright X)}(Y) \equiv d\, T_e \mathrm{Ad}(X)(Y) . \quad \square$$

Nasze rozumowanie prowadzi też do

Stw. 17. W dotychczasowej notacji zachodzi tożsamość $T_e\mathrm{Ad} \circ \exp^G = \exp^{GL(\mathfrak{g})} \circ \mathrm{ad}$.

D: Wystarczy skorzystać ze Stw. 2-3-4-7.11 i Stw. 16. □

Powyższe stanowi punkt wyjścia do fundamentalnego

Stw. 18. Niechaj $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego o zwartej formie rzeczywistej $\mathfrak{k}$. Istnieje niezwyrodniała forma hermitowska

$$(\cdot|\cdot) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

o własności $(\cdot|\cdot)\restriction_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} : \mathfrak{k}\times\mathfrak{k} \longrightarrow \mathbb{R}\ (\subset\mathbb{C})$ (dla $\mathfrak{k} \equiv \mathfrak{k}\otimes 1 \subset \mathfrak{g}$) i taka, że działanie dołączone $\underset{\equiv\, \mathrm{ad}.\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}}}{\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{.}} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ jest unitarne w sensie wyrażonym przez

$$\forall X\in\underset{(\overset{\cap}{\mathfrak{g}})}{\mathfrak{k}},\ Y,Z\in\mathfrak{g} : \ (\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Y)|Z) = -(Y|\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Z)).$$

Zdefiniujmy anty-$\mathbb{C}$-liniową inwolucję:

$$* : \mathfrak{g}\circlearrowleft : X\otimes 1 + Y\otimes i \longmapsto -X\otimes 1 + Y\otimes i\,,$$
$$(X, Y \in \mathfrak{k})$$

a wówczas przyjęta forma hermitowska spełnia

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : \left(\mathrm{ad}_X^{(\mathfrak{g})}(Y) \middle| Z\right) = \left(Y \middle| \mathrm{ad}_{X^*}^{(\mathfrak{g})}(Z)\right), \quad (*)$$

czyli $\mathrm{ad}_X^{(\mathfrak{g})\dagger} = \mathrm{ad}_{X^*}^{(\mathfrak{g})}$.

D: Rozważmy rzeczywistą strukturę hermitowską na $\mathfrak{k}$ otrzymaną z konstruktywnego dowodu Tw. 1. dla $(V, R) \equiv (\mathfrak{g}, T_e\mathrm{Ad}.)$, względem której $dR \equiv \mathrm{ad}$ jest unitarna. Strukturę tę możemy rozszerzyć na $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ w naturalny sposób:

$$(\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$: (X_1 \otimes 1 + Y_1 \otimes i, X_2 \otimes 1 + Y_2 \otimes i) \longmapsto (X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i\left((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\right)$$

Bez trudu przekonujemy się, że $(\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}}$ jest niezwyrodniałą formą hermitowską na $\mathfrak{g}$. W rzeczy samej,

$$\forall \lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\ :\ \left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\lambda\triangleright(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,(\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2)\otimes 1+(\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2)\otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\,\middle|\,\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^G+\left(Y_1\,\middle|\,\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^G$$

$$+i\left(\left(X_1\,\middle|\,\alpha\triangleright Y_2+\beta\triangleright X_2\right)^G-\left(Y_1\,\middle|\,\alpha\triangleright X_2-\beta\triangleright Y_2\right)^G\right)$$

$$= \alpha\Big((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G + i\big((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\big)\Big)$$

$$+ \beta\Big((Y_1|X_2)^G - (X_1|Y_2)^G + i\big((X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G\big)\Big)$$

$$= (\alpha + i\beta)\cdot(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i)^G_{\mathbb{C}}$$, a [illegible]

$$(X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i \,|\, X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i)^G_{\mathbb{C}} = (X_2|X_1)^G + (Y_2|Y_1)^G + i\big((X_2|Y_1)^G - (Y_2|X_1)^G\big)$$

$$= (X_1|X_2)^G + (Y_1|Y_2)^G - i\big((X_1|Y_2)^G - (Y_1|X_2)^G\big)$$

$$= \overline{(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,|\, X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i)}^G_{\mathbb{C}} \; .$$

W kolejnym kroku sprawdzimy też, że kompleksyfikacja ad., dana jawnym wzorem

$$\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(Y\otimes 1+Z\otimes i):=\mathrm{ad}_X(Y)\otimes 1+\mathrm{ad}_X(Z)\otimes i\,,\quad X,Y,Z\in\mathfrak{k},$$

spełnia pożądany warunek:

$$\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$=\left(\mathrm{ad}_X(X_1)\otimes 1+\mathrm{ad}_X(Y_1)\otimes i\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(\mathrm{ad}_X(X_1)\middle|X_2\right)^G+\left(\mathrm{ad}_X(Y_1)\middle|Y_2\right)^G+i\Big(\left(\mathrm{ad}_X(X_1)\middle|Y_2\right)^G-\left(\mathrm{ad}_X(Y_1)\middle|X_2\right)^G\Big)$$

$$= -(X_1|ad_X(X_2))^G - (Y_1|ad_X(Y_2))^G$$

$$-i\left((X_1|ad_X(Y_2))^G - (Y_1|ad_X(X_2))^G\right)$$

$$= -\left(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,\middle|\, ad_X(X_2)\otimes 1 + ad_X(Y_2)\otimes i\right)^G_{\mathbb{C}}$$

$$= -\left(X_1\otimes 1 + Y_1\otimes i \,\middle|\, ad^{\mathbb{C}}_X(X_2\otimes 1 + Y_2\otimes i)\right)^G_{\mathbb{C}} ,$$

co pozwala nam zapostulować (w odniesieniu do tego dowolnego str.)

$$(\cdot|\cdot) \equiv (\cdot|\cdot)^G_{\mathbb{C}} .$$

Pozostaje sprawdzić tożsamość (*) (str. 78).

W tym celu liczymy – dla jedynego ⑭

$\mathbb{C}$-liniowego rozszerzenia $\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{\cdot}$ z $\mathfrak{k}$ do $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$, danego wzorem

$$\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i} \equiv \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X + i \triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_Y \quad -$$

słuszność postulowanej tezy :

$$\left(\mathrm{ad}^{(\mathfrak{g})}_{X\otimes 1+Y\otimes i}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)+i\triangleright \mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_Y(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$= -\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_X(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$-i\left(\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i)\,\middle|\,X_2\otimes 1+Y_2\otimes i\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$=\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\left(-\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{X}+i\,\mathrm{ad}^{\mathbb{C}}_{Y}\right)(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{G}_{\mathbb{C}}$$

$$\equiv\left(X_1\otimes 1+Y_1\otimes i\,\middle|\,\mathrm{ad}^{(\sigma)}_{(X\otimes 1+Y\otimes i)^*}(X_2\otimes 1+Y_2\otimes i)\right)^{G}_{\mathbb{C}},$$

co kończy dowód. □

Nim wyciągniemy z powyższego daleko idące wnioski, wyostrzymy pojęcie...