

**TEORIA GRUP II W CZASACH ZARAŻY**  
**0. NIEZBĘDNIK RÓŻNICZKOWO-GEOMETRYCZNY**

SPIS TREŚCI

1. Danie główne	1
Dodatek A. Niezbędnik topologiczny	42
Dodatek B. Fundamentalne struktury i twierdzenia analizy	50
Literatura	96

Swobodna nawigacja w uniwersum bytów, konstrukcji i metod z pogranicza algebry i geometrii, które składają się na arsenał formalny wykorzystywany w modelowaniu klasycznych zjawisk fizycznych (w powszechnie przyjętym paradygmacie „gładkim”), wymaga biegłej znajomości podstaw rachunku różniczkowego na rozmaitościach, budowanego systematycznie na fundamencie topologii i analizy matematycznej. Niniejszy Niezbędnik zawiera względnie szczegółową dyskusję korpusu zagadnień, wybranych na gruncie doświadczenia Autora, które definiują rozsądny punkt wyjścia do pogłębionych studiów specjalistycznych z zakresu wyższej algebry i geometrii na usługach fizyki.

1. DANIE GŁÓWNE

Zacniemy od zupełnie podstawowych pojęć i konstrukcji geometrii różniczkowej.

**Definicja 1. Rozmaitość różniczkowalna klasy  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  (zwana też  $C^k$ -rozmaitością) wymiaru  $\dim M = n$  to czwórka**

$$((M, \mathcal{T}(M)), \mathcal{O}, \mathcal{U}, \kappa.)$$

złożona z przestrzeni Hausdorffa  $(M, \mathcal{T}(M))$ , jej pokrycia otwartego  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(M)$ , rodziny podzbiorów  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}_E(\mathbb{R}^{x^n})$  oraz homeomorfizmów

$$\kappa_i : \mathcal{O}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i, \quad i \in I,$$

zwanych **mapami** lub (**lokalnymi**) **układami współrzędnych**, o odwzorowaniach odwrotnych

$$\pi_i \equiv \kappa_i^{-1} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i, \quad i \in I,$$

zwanych **lokalnymi parametryzacjami**, i takich, że dla wszystkich par indeksów  $(i, j) \in \langle I^{x2} \rangle_{\mathcal{O}}$ , zapisanych w terminach

$$(1) \quad \langle I^{x2} \rangle_{\mathcal{O}} := \{ (i, j) \in I^{x2} \mid \mathcal{O}_{ij} \equiv \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset \},$$

homeomorfizmy

$$(2) \quad t_{ji} := \kappa_j \circ \kappa_i^{-1} \upharpoonright_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij})} : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \xrightarrow{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}),$$

określane mianem (**lokalnych**) **transformacji współrzędniowych**, są dyfeomorfizmami klasy  $C^k$ . Kolekcja map  $\{\kappa_i\}_{i \in I} =: \mathcal{A}$  jest określana mianem **atlasu** klasy  $C^k$ . Najczęściej przyjmuje się, że definicja rozmaitości różniczkowalnej klasy  $C^k$  obejmuje także atlas  $\widehat{\mathcal{A}}$  klasy  $C^k$  **maksymalny** w tym sensie, że dla każdego atlasu  $\mathcal{A}$  na  $M$  klasy  $C^k$  zachodzi tożsamość<sup>1</sup>

$$\mathcal{A} \cup \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}.$$

<sup>1</sup>Każdy atlas klasy  $C^k$  można rozszerzyć do atlasu maksymalnego klasy  $C^k$  uzupełniając go o wszystkie mapy o transformacjach współrzędniowych z mapami wyjściowymi będących klasy  $C^k$ .

W przypadku  $k = 0$  mówimy o **rozmaitościach topologicznych**. Odtąd będziemy zatem często zapisywać rozmaitość różniczkowalną klasy  $C^k$  wymiaru  $n$  jako parę  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$ , złożoną z przestrzeni Hausdorffa  $(M, \mathcal{T}(M))$  j/w oraz atlasu maksymalnego  $\widehat{\mathcal{A}}$ , lub wręcz – jeśli nie będzie to prowadzić do nieporozumień – jako parę  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ . Strukturę tę będziemy wymiennie określać mianem **struktury rozmaitości różniczkowalnej (klasy  $C^k$ )**, **struktury  $C^k$ -rozmaitości** lub po prostu **struktury różniczkowej (klasy  $C^k$ )**.

**Podrozmaitość** wymiaru  $l \leq \dim M$  to podprzestrzeń topologiczna  $S \subseteq M$  rozmaitości różniczkowalnej  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$  klasy  $C^k$  o strukturze różniczkowalnej określonej przez atlas

$$\widehat{\mathcal{A}} \cap S := \{\varphi_i^S := \varphi_i \upharpoonright_{\mathcal{O}_i \cap S}\}_{i \in I_S}, \quad I_S := \{i \in I \mid \mathcal{O}_i \cap S \neq \emptyset\},$$

którego mapy spełniają warunek

$$\mathcal{O}_i \cap S = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^n), \quad i \in I.$$

W tym przypadku liczbę naturalną

$$\text{codim}_M S := n - l$$

określamy mianem **kowymiaru** podrozmaitości  $((S, \mathcal{T}_M(S)), \widehat{\mathcal{A}} \cap S)$  w rozmaitości  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$ .

Niechaj  $((M_\alpha, \mathcal{T}(M_\alpha)), \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą dwiema rozmaitościami różniczkowalnymi klasy  $C^k$  i niech  $f : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem ciągłym między nimi, przy czym zakładamy, że ustalone (dowolnie) pokrycia  $\mathcal{O}_\alpha = \{\mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha\}_{i_\alpha \in I_\alpha} \subset \mathcal{T}(M_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  zostały wybrane tak, że istnieje odwzorowanie  $\phi : I_1 \rightarrow I_2$  pokrywające  $f$  w sensie relacji

$$f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2, \quad i_1 \in I_1,$$

co nie stanowi ograniczenia ogólności naszych rozważań<sup>2</sup>. Odwzorowanie  $f$  nazywamy **odwzorowaniem różniczkowalnym klasy  $C^p$** ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , lub po prostu  **$C^p$ -odwzorowaniem**, jeśli ma ono **prezentację lokalną**

$$f_{i_1} := \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1} : \kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1) \rightarrow \kappa_{\phi(i_1)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2), \quad i_1 \in I_1$$

teżże klasy, czyli ilekroć

$$\forall_{i_1 \in I_1} : f_{i_1} \in C^p(\kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1), \kappa_{\phi(i_1)}^2(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2)).$$

Biorąc pod uwagę stopień ciągłej różniczkowalności transformacji współrzędniowych (2), zasadnym jest ograniczenie rozważań do  $p \leq k$ .

**Kategoria rozmaitości różniczkowalnych klasy  $C^k$** , którą będziemy oznaczać symbolem

$$\mathbf{Man}^{(k)},$$

to podkategoria kategorii **Top**, której obiektami są rozmaitości różniczkowalne klasy  $C^k$ , morfizmami zaś – odwzorowania różniczkowalne klasy  $C^k$  między nimi, oznaczane symbolami

$$C^k(M_1, M_2) \equiv \text{Hom}_{\mathbf{Man}^{(k)}}(((M_1, \mathcal{T}(M_1)), \widehat{\mathcal{A}}_1), ((M_2, \mathcal{T}(M_2)), \widehat{\mathcal{A}}_2)).$$

Izomorfizmy w tej kategorii (tj. bijekcje klasy  $C^k$  o odwzorowaniach odwrotnych także klasy  $C^k$ ) określamy mianem **dyfeomorfizmów klasy  $C^k$**  lub po prostu  **$C^k$ -dyfeomorfizmów** i oznaczamy symbolami  $\text{Diff}^k(M_1, M_2)$ . W szczególności automorfizmy rozmaitości różniczkowalnej klasy  $C^k$  na  $((M, \mathcal{T}(M)), \widehat{\mathcal{A}})$  oznaczamy symbolem  $\text{Diff}^k(M)$ . W przypadku  $k = 0$  mamy do czynienia z kategorią rozmaitości topologicznych

$$\mathbf{Man}^{(0)} \equiv \mathbf{TopMan},$$

w której dyfeomorfizmami są homeomorfizmy.

<sup>2</sup>Warunek ten można zawsze spełnić, wychodząc od dowolnej pary pokryć otwartych  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ . Wystarczy dokonać rozdrobnienia  $\mathcal{O}_1$  względem  $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$  (z racji ciągłości  $f$  ta ostatnia rodzina także jest pokryciem otwartym  $M_1$ ), tj. zastąpić  $\mathcal{O}_1$  pokryciem  $\mathcal{O}_1^{(f)} := \{\mathcal{O}_{i_1}^1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{i_2}^2)\}_{(i_1, i_2) \in I_1^{(f)}}$  o indeksach z podzbioru  $I_1^{(f)} := \{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2 \mid \mathcal{O}_{i_1}^1 \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{i_2}^2) \neq \emptyset\}$ . Na tak zdefiniowanym nowym zbiorze indeksującym możemy już określić pożądane odwzorowanie  $\phi : I_1^{(f)} \rightarrow I_2 : (i_1, i_2) \mapsto i_2$ .

**Uwaga 1.** Należy podkreślić, że klasa gładkości odwzorowania między rozmaitościami różniczkowalnymi klasy  $C^k$  jest dobrze określona – ilekroć odwzorowanie takie ma prezentację lokalną klasy  $C^p$ , każda inna jego prezentacja lokalna stowarzyszona z tym samym atlasem maksymalnym jest także klasy  $C^p$ . Istotnie, superpozycja odwzorowań klas  $C^k$  i  $C^p$ ,  $p \leq k$  jest klasy  $C^p$ , tymczasem dla dowolnego  $j_1 \in I_1$  o własności  $\mathcal{O}_{i_1 j_1}^1 \neq \emptyset$  zachodzi

$$f_{j_1} \equiv \tau_{\phi(j_1)\phi(i_1)}^2 \circ f_{i_1} \circ (\tau_{j_1 i_1}^1)^{-1}.$$

**Przykład 1.**

- (1) **Struktura produktowa rozmaitości** dla pary  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  rozmaitości różniczkowalnej klasy  $C^k$  o atlasach  $\widehat{\mathcal{A}}_\alpha = \{\varphi_{i_\alpha}^\alpha\}_{i_\alpha \in I_\alpha}$  to struktura różniczkowalna klasy  $C^k$  na iloczynie kartezjańskim  $M_1 \times M_2$  (wyposażonym w standardową topologię produktową z Przykł. 2 (5)) określona przez atlas

$$\widehat{\mathcal{A}}_1 \times \widehat{\mathcal{A}}_2 := \{\varphi_{i_1}^1 \times \varphi_{i_2}^2\}_{(i_1, i_2) \in I_1 \times I_2}$$

złożony z map

$$\varphi_{i_1}^1 \times \varphi_{i_2}^2 : \mathcal{O}_{i_1}^1 \times \mathcal{O}_{i_2}^2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i_1}^1 \times \mathcal{U}_{i_2}^2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \equiv \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

- (2) **Struktura cofnięta rozmaitości** na przestrzeni topologicznej  $M$  wzdłuż odwzorowania  $f : M \rightarrow N$ , będącego homeomorfizmem  $M$  na obraz  $f(M) \subset N$ , z rozmaitości różniczkowalnej  $(N, \widehat{\mathcal{A}})$  o atlasie  $\widehat{\mathcal{A}} = \{\varphi_i\}_{i \in I}$  to struktura różniczkowalna klasy  $C^p$  na  $M$  określona przez atlas

$$f^* \widehat{\mathcal{A}} := \{f^* \varphi_i\}_{i \in I}$$

złożony z map

$$f^* \varphi_i : f^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad i \in I.$$

Istnienie topologicznie trywialnego lokalnego modelu ma swoje dalekosiężne konsekwencje, spośród których wymienimy tutaj tylko przydatne w dalszej części wykładu

**Stwierdzenie 1.** Każda rozmaitość spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności i jest lokalnie zwarta, więc też lokalnie przewarta.

*Dowód:* Dowolny punkt  $x \in M$  rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n$  należy do dziedziny  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$  pewnej lokalnej mapy  $\kappa : \mathcal{O} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_E(\mathbb{R}^n)$ , przy czym  $\kappa(x)$  zawiera się w  $\mathcal{U}$  wraz z pewną domkniętą kulą  $\overline{B^n(\kappa(x); \varepsilon)}$ ,  $\varepsilon > 0$ , która w świetle Stw. 52 jest zwarta. Na mocy Stw. 39 homeomorficzny przeciwobraz tejże kuli w  $\mathcal{O}$ , który wprost z konstrukcji zawiera  $x$ , także jest zwarty. To rozumowanie przesądza o lokalnej zwartości przestrzeni  $M$ , a ponieważ ta ostatnia jest przestrzenią Hausdorffa, przeto wskazany uprzednio jej zwarty podzbiór zawierający  $x$  jest zarazem przewarty jako zbiór domknięty, co implikuje lokalną przewartość  $M$ . Spełnianie przez  $M$  pierwszego aksjomatu przeliczalności jest trywialną konsekwencją tej samej własności lokalnego modelu  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Dużo mniej oczywistą, a zarazem nader istotną z homologicznego, więc także fizycznego punktu widzenia konsekwencją użycia w definicji rozmaitości lokalnego modelu o trywialnej topologii i naturalnej strukturze liniowej jest istnienie szczególnie prostych topologicznie pokryć otwartych tejże rozmaitości, które opisuje

**Definicja 2.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i dla dowolnego pokrycia otwartego  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  rozmaitości różniczkowalnej (klasy  $C^k$ )  $M$  oznaczmy, uogólniając, dla dowolnego  $N \in \mathbb{N}^\times$ , zapis (1),

$$\langle I^{\times N} \rangle_{\mathcal{O}} := \{ (i_1, i_2, \dots, i_N) \in I^{\times N} \mid \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} \equiv \mathcal{O}_{i_1} \cap \mathcal{O}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{i_N} \neq \emptyset \}.$$

Pokrycie  $\mathcal{O}$  nazywamy **dobrym klasy  $C^k$** , jeśli jest ono lokalnie skończone, jego elementy są przewarte, a nadto każde niepuste ich przecięcie,

$$\mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \langle I^{\times N} \rangle_{\mathcal{O}}, \quad N \in \mathbb{N}^\times,$$

jest  $C^k$ -**ściągalne**, co oznacza, że istnieje dyfeomorfizm klasy  $C^k$

$$\rho : [0, 1] \times \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$$

o własnościach

$$\forall x \in \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N} : \rho(0, x) = x_* \quad \wedge \quad \rho(1, x) = x$$

dla pewnego punktu  $x_* \in \mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$ . Dyfeomorfizm taki określamy mianem **retrakcji różniczkowalnej** (klasy  $C^k$ ) zbioru  $\mathcal{O}_{i_1 i_2 \dots i_N}$ .

Mamy fundamentalne

**Twierdzenie 1** (de Rhama–Weila o istnieniu pokrycia dobrego). Na każdej rozmaiłości różniczkowalnej klasy  $C^k$  o  $k \geq 2$  istnieje pokrycie dobre klasy  $C^k$ .

*Dowód:* Patrz: [Wei52]. □

Obok wymienionych powyżej, istnienie wiele innych jeszcze naturalnych schematów indukcji struktury różniczkowej – niektóre z nich napotkamy w dalszej części kursu. Szczególne miejsce pośród nich zajmuje kanoniczna i zarazem naturalna (tj. funktorialna) konstrukcja, która z dowolną rozmaiłością  $(M, \mathcal{A})$  klasy  $C^k$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^x$  stowarzysza rozmaiłość klasy  $C^k$  dwukrotnie większego wymiaru, kodującą – jak się okaże – informację o klasach (współ)styczności krzywych w  $M$  i tym samym otwierającą możliwość przetransportowania naturalnej struktury liniowej z przestrzeni modelowej  $\mathbb{R}^{xn}$ . Jej wprowadzenie do naszych rozważań pozwoli uporządkować dyskusję głównych typów odwzorowań różniczkowalnych, niezbędną dla naszych przyszłych celów, a zarazem da nam do ręki potężne narzędzie lokalnej (zlinearyzowanej) analizy automorfizmów (czyli symetrii) struktur różniczkowych, o oczywistych i nader istotnych konotacjach fizykalnych. Istnieje kilka (równoważnych) definicji rzeczzonej konstrukcji, kładących nacisk na jej różne aspekty geometryczne (struktura rozmaiłości, struktura wiązki wektorowej, związek z różniczkowaniami algebry funkcji na  $M$ ). Poniżej wybierzemy tę z nich, która wydaje się być najbardziej elementarną (choć niekoniecznie najbardziej „intuicyjną”), a zarazem dostarczy prostej i czytelnej ilustracji ogólnego schematu budowania obiektów geometrycznych o analogicznej (produktowej) strukturze lokalnej, który sformalizujemy i wykorzystamy już wkrótce. Punktem wyjścia jest tutaj dekonstrukcja rozmaiłości  $M$  w terminach lokalnych map (czyli też parametryzacji), tj. spojrzenie na  $M$  jako sumę rozłączną swych lokalnych modeli,

$$(3) \quad M \cong \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) / \sim,$$

w których punkty zostały utożsamione wedle reguły

$$(x, i) \sim (y, j) \quad \iff \quad \pi_i(x) = \pi_j(y) \in \mathcal{O}_{ij}.$$

Lokalnie rozmaiłość można zatem traktować jako podzbiór (otwarty)  $\mathbb{R}^{xn}$ , co pozwala modelować przestrzeń styczną do  $M$  w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O}_i$  tej rozmaiłości na stycznej do odnośnego obrazu w  $\kappa_i(x) \in \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{xn}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^{xn}$ . Ten sposób myślenia o wyjściowej rozmaiłości  $M$  prowadzi nas wprost do

**Definicja 3.** Przyjmijmy zapis Def. 1 oraz Przykł. 2 (4) i (5). **Wiązka styczna**  $C^{k+1}$ -rozmaiłości  $(M, \mathcal{A})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^x$ , o atlasie  $\mathcal{A} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$  stowarzyszonym z pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , to  $C^k$ -rozmaiłość  $(TM, T\mathcal{A})$  utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$TM := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} \right) / \sim_{Dt.}$$

relacji

$$(x, i, v) \sim (y, j, w) \quad \iff \quad \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ w = Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$T_x M := \pi_{TM}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru  $TM$  jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} \longrightarrow \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} \right) / \sim_{Dt..} : (x, i, v) \longmapsto [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni  $\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn}$ , o injekcjach kanonicznych

$$J_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{R}^{xn} : (x, v) \longmapsto (x, i, v), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{T}(TM) := \left\{ \mathcal{O} \subset TM \mid \forall_{i \in I} : J_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn}) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej  $TM$  definiują (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$T\kappa_i : \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto (\kappa_i(x), v), \quad i \in I,$$

zwane **mapami naturalnymi**, które określają transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} Tt_{ji} := T\kappa_j \circ (T\kappa_i)^{-1} \upharpoonright_{\kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{xn}} & : \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{xn} \xrightarrow{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{R}^{xn} \\ & : (\kappa_i(x), v) \longmapsto (\kappa_j(x), Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v)), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy  $C^r$ .

Klasę abstrakcji

$$(4) \quad V(x) := [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \in T_x M$$

określamy mianem **wektora stycznego** do  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  (zaczepionego) w punkcie  $x \in M$ .

Odwzorowanie (różniczkowalne klasy  $C^k$ )

$$\mathbf{0}_{TM} : M \longrightarrow TM : x \longmapsto [(x, i, \mathbf{0}^n)]_{\sim_{Dt..}}$$

nosi miano **cięcia zerowego** wiązki stycznej  $TM$ .

**Uwaga 2.** Homeomorficzny charakter map naturalnych wymaga skromnego komentarza. Po pierwsze zauważmy, że dowolna klasa  $[(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \in \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \subset TM$  zawiera dokładnie jednego reprezentanta  $(x, i, v) \in \mathcal{O}_i \times \{i\} \times \mathbb{R}^{xn}$  (o *ustalonym* indeksie pokrycia), oto bowiem – wprost z definicji –

$$(y, i, w) \in [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \implies (y, w) = (x, Dt_{ii}(\kappa_i(x))(v)) \equiv (x, v),$$

a ponieważ także

$$\forall_{(x,v) \in \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn}} : (x, i, v) \in [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}},$$

przeto otrzymujemy homeomorfizm

$$\tau_i : \pi_{TM}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto (x, v).$$

Jego złożenie z produktem homeomorfizmów

$$\kappa_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{xn}} : \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{xn} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{xn} : (x, v) \longmapsto (\kappa_i(x), v)$$

odtworza mapę naturalną

$$T\kappa_i \equiv (\kappa_i \times \text{id}_{\mathbb{R}^{xn}}) \circ \tau_i.$$

Należy ponadto podkreślić, że w opisanej topologii także rzut kanoniczny jest odwzorowaniem ciągłym.

Wreszcie pojawienie się liniowych odwzorowań  $Dt_{ji}$  zarówno w definicji ilorazu (por. Równ. (3)), jak i w definicji transformacji współrzędniowych dla map naturalnych, jest całkowicie naturalne, jeśli myśleć o wektorach stycznych do  $M$  w punkcie  $x$  jako o klasach współstyczności ścieżek przechodzących przez ten punkt, te zaś – wyreprezentować przy użyciu linii prostych przecinających się w obrazie  $x$  względem lokalnej mapy  $\kappa_i$  (wzgl.  $\kappa_j$ ). Oczywiście przywołany argument opiera się na założeniu, że myślenie takie jest usprawiedliwione, co zbadamy poniżej.

Jakkolwiek w tworzeniu terminologii matematycznej powszechnie dochodzi do głosu zasada „świnki morskiej”, wedle której „wektor styczny” nie musi być ani wektorem w rozumieniu algebraicznym, ani obiektem stycznym do  $M$  w żadnym sensie podpowiadany przez intuicję wyrobioną w geometrii euklidesowej, to jednak pojawia się naturalne pytanie o ewentualną równoważność powyższej definicji z inną naturalną geometryczną definicją wektora stycznego jako klasy (współ)styczności ścieżek przechodzących przez punkt  $x \in M$ , reprezentujących możliwe trajektorie ucieczki (z określoną „prędkością”) z punktu  $x$ , i tym samym – elementu pewnej wyróżnionej przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej przypisanej do tego punktu. Nasza odpowiedź na to pytanie będzie dwuczłonowa: najpierw wykażemy istnienie naturalnej struktury  $\mathbb{R}$ -liniowej na włóknie wiązki stycznej nad dowolnym punktem, następnie zaś udowodnimy strukturalną (w kategorii  $\mathbb{R}$ -liniowej) równoważność obu definicji wektora stycznego. Oto więc zacznijmy od oczywistego

**Stwierdzenie 2.** Przyjmijmy zapis Def. 3. Wybierzmy dowolny punkt  $x \in \mathcal{O}_i \subset M$   $C^k$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^\times$ , a wówczas odwzorowanie

$$\begin{aligned} T_x \kappa_i & : T_x M \xrightarrow{T\kappa_i} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^{\times n} \xrightarrow{\text{Pr}_2} \mathbb{R}^{\times n} \\ & : [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}} \longmapsto (\kappa_i(x), v) \longmapsto v, \end{aligned}$$

będące złożeniem lokalnej mapy naturalnej na  $TM$  z kanonicznym rzutem na drugą składową iloczynu kartezjańskiego, jest bijekcją i jako takie w kanoniczny sposób indukuje na  $T_x M$  strukturę przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowej,

$$T_x M \underset{\mathbb{R}\text{-lin.}}{\cong} \mathbb{R}^{\times n},$$

określaną mianem **przestrzeni stycznej do rozmaitości  $M$**  w punkcie  $x$ .

Dowód: Strukturę  $\mathbb{R}$ -liniowa, o której mowa w tezie stwierdzenia, określa formuła

$$\lambda_1 \triangleright [(x, i, v_1)]_{\sim_{Dt..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{Dt..}} := [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{Dt..}},$$

zapisana dla dowolnych  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Wobec  $\mathbb{R}$ -liniowego charakteru relacji z Def. 3, struktura ta jest dobrze określona. Istotnie, niechaj  $x \in \mathcal{O}_{ji}$  i niech  $w_\alpha := Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , a wtedy

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{Dt..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, j, w_2)]_{\sim_{Dt..}} = [(x, j, \lambda_1 \triangleright w_1 + \lambda_2 \triangleright w_2)]_{\sim_{Dt..}} \\ & = [(x, j, \lambda_1 \triangleright Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v_1) + \lambda_2 \triangleright Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v_2))]_{\sim_{Dt..}} \\ & = [(x, j, Dt_{ji}(\kappa_i(x))(\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2))]_{\sim} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_{Dt..}} \\ & \equiv \lambda_1 \triangleright [(x, j, w_1)]_{\sim_{Dt..}} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, v_2)]_{\sim_{Dt..}}. \end{aligned}$$

□

Powyższe pozwala nam wysłowić porządkujące

**Stwierdzenie 3.** Przyjmijmy zapis Stw. 2. Rozważmy relację równoważności na zbiorze **ścieżek** klasy  $C^1$  w  $C^k$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^\times$  przechodzących przez jej punkt  $x$ ,

$$\gamma : ]-\varepsilon_\gamma, \varepsilon_\gamma[ \longrightarrow M, \quad \varepsilon_\gamma > 0, \quad \gamma(0) = x,$$

określaną przez warunek (współ)styczności w  $x$ ,

$$\tilde{\gamma} \sim_x \gamma \iff \begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = x = \gamma(0) \\ D(\kappa \circ \tilde{\gamma})(0) = D(\kappa \circ \gamma)(0) \end{cases},$$

wypowiedziany w terminach dowolnej mapy  $\kappa : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{x_n}$  określonej na otoczeniu otwartym  $\mathcal{O} \ni x$ . Oznaczywszy  $v_\gamma := D(\kappa \circ \gamma)(0) \in \mathbb{R}^{x_n}$  dla skrótu, na zbiorze  $P_x$  klas abstrakcji ścieżek względem powyższej relacji określamy strukturę grupy przemiennej z działaniem

$$\begin{aligned} P_x \times P_x &\longrightarrow P_x \\ : \quad ([\gamma_1]_{\sim_x}, [\gamma_2]_{\sim_x}) &\longmapsto [ ] - \varepsilon, \varepsilon [ \exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (v_{\gamma_1} + v_{\gamma_2})) \in \mathcal{O} ]_{\sim_x} \\ &=: [\gamma_1]_{\sim_x} + [\gamma_2]_{\sim_x} \end{aligned}$$

i elementem neutralnym danym w postaci klasy  $[\gamma_x]_{\sim_x}$  ścieżki stałej

$$x : \mathbb{R} \rightarrow M : t \mapsto x,$$

a następnie działanie ciała  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times P_x \longrightarrow P_x : (\lambda, [\gamma]_{\sim_x}) \longmapsto [ ] - \varepsilon, \varepsilon [ \exists t \mapsto \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \cdot \lambda \triangleright v_\gamma) \in \mathcal{O} ]_{\sim_x},$$

przy czym w obu przypadkach  $\varepsilon > 0$  jest dobrane tak, ażeby ścieżka będąca wynikiem działania leżała w całości w  $\mathcal{O}$ . Tak zdefiniowana przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa jest izomorficzna z przestrzenią  $\mathbb{R}$ -liniową o nośniku  $T_x M$  opisaną w Stw. 2.

*Dowód:* Zaczniemy od spostrzeżenia, że relacja współstyczności nie zależy od wyboru lokalnej mapy – istotnie, jeśli  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{x_n}$  jest lokalną mapą na otoczeniu otwartym  $\mathcal{U} \ni x$ , to dla ścieżek  $\gamma$  i  $\tilde{\gamma}$  z treści stwierdzenia zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned} D(\psi \circ \tilde{\gamma})(0) &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \tilde{\gamma}(0)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \tilde{\gamma})(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma(0)) \circ D(\varphi \circ \gamma)(0) = D(\psi \circ \gamma)(0). \end{aligned}$$

Bez trudu sprawdzamy też analogiczną własność definicji struktury  $\mathbb{R}$ -liniowej na zbiorze ścieżek, a to za sprawą tożsamości

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0} &= \psi^{-1} \circ \psi(x) = x \\ \equiv \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) \upharpoonright_{t=0} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \psi^{-1}(\psi(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)) &= \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2 \\ = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa^{-1}(\kappa(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)). \end{aligned}$$

Możemy następnie przystąpić do konstrukcji pożądanego izomorfizmu przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych. Oto więc klasie współstyczności ścieżek przez  $x \in \mathcal{O}_i$  przyporządkowujemy punkty we włóknie  $T_x M$  wedle formuły (w oczywisty sposób dobrze określonej)

$$(5) \quad V_x : [\gamma]_{\sim_x} \longmapsto [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{D_{t..}}},$$

i odwrotnie – punktowi  $[(x, i, v)]_{\sim_{D_{t..}}}$  w tymże włóknie przypisujemy klasę ścieżki (trajektorii) „ruchu jednostajnego prostoliniowego” wedle formuły

$$\Gamma_x : [(x, i, v)]_{\sim_{D_{t..}}} \longmapsto [ ] - \varepsilon, \varepsilon [ \exists t \mapsto \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x) + t \triangleright v) \in \mathcal{O}_i ]_{\sim_x},$$

przy czym liczba  $\varepsilon > 0$  w ostatnim wzorze jest dobrana tak, by warunek  $\kappa_i(x) + t \triangleright v \in \kappa_i(\mathcal{O}_i)$  był spełniony dla dowolnego  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  (jej istnienie jest konsekwencją otwartości  $\kappa_i(\mathcal{O}_i)$ ). Za-uważmy, że oba przyporządkowania są dobrze określone, oto bowiem dla  $x \in \mathcal{O}_{ij}$  dostajemy z jednej strony

$$\begin{aligned} [(\gamma(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma)(0))]_{\sim} &= [(\gamma(0), j, Dt_{ji}(\kappa_i \circ \gamma(0)) \circ D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}} \\ &\equiv [(\gamma(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma)(0))]_{\sim_{Dt..}}, \end{aligned}$$

a z drugiej, dla  $w := Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v)$ ,

$$\Gamma_x([(x, j, w)]_{\sim_{Dt..}}) = [\gamma_j^w : ] - \varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + t \triangleright w) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

więc też

$$\gamma_j^w(0) = \kappa_j^{-1}(\kappa_j(x) + 0 \triangleright w) \equiv \kappa_j^{-1} \circ \kappa_j(x) = x = \gamma_i^v(0)$$

oraz

$$\begin{aligned} D(\kappa_i \circ \gamma_j^w)(0) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (t_{ij}(\kappa_j(x) + t \triangleright w)) = Dt_{ij}(\kappa_j(x))(w) \\ &\equiv Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \circ Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) = \text{Did}_{\kappa_i(\mathcal{O}_i)}(\kappa_i(x))(v) \\ &= \text{id}_{\Gamma_{\kappa_i(x)} \mathbb{R}^n}(v) = v = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\kappa_i(x) + t \triangleright v) = D(\kappa_i \circ \gamma_i^v)(0), \end{aligned}$$

co implikuje pożądaną równoważność

$$\gamma_j^w \sim \gamma_i^v.$$

Bez trudu sprawdzamy, że odwzorowania te są wzajem odwrotne. Istotnie, jak pokazuje powyższy rachunek,

$$V_x \circ \Gamma_x([(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}}) = V_x([\gamma_i^v]_{\sim_x}) = [(\gamma_i^v(0), j, D(\kappa_j \circ \gamma_i^v)(0))]_{\sim_{Dt..}} = [(x, i, v)]_{\sim_{Dt..}},$$

a ponadto

$$\Gamma_x \circ V_x([\gamma]_{\sim_x}) = [\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)} : ] - \varepsilon, \varepsilon[\exists t \mapsto \kappa_i^{-1}(\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) \in \mathcal{O}_i]_{\sim_x},$$

przy czym

$$\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}(0) = \kappa_i^{-1} \circ \kappa_i \circ \gamma(0) = \gamma(0)$$

oraz

$$D(\kappa_i \circ \gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)})(0) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (\kappa_i \circ \gamma(0) + t \triangleright D(\kappa_i \circ \gamma)(0)) = D(\kappa_i \circ \gamma)(0)$$

więc też

$$[\gamma_i^{D(\kappa_i \circ \gamma)(0)}]_{\sim_x} = [\gamma]_{\sim_x},$$

zgodnie z wysłownym wcześniej stwierdzeniem.

Na zakończenie dowodzimy liniowości obu przyporządkowań. W tym celu w definicji kombinacji liniowej klas ścieżek współstycznych w  $x$  wybierzmy lokalną mapę  $\kappa \equiv \kappa_i$  i oznaczmy

$$\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(t) := \kappa_i^{-1}(\kappa_i(x) + t \triangleright (\lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)),$$

a wtedy

$$\begin{aligned} V_x(\lambda_1 \triangleright [\gamma_1]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [\gamma_2]_{\sim_x}) &\equiv [(\gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i}(0), i, D(\kappa_i \circ \gamma_{v_1, v_2; \lambda_1, \lambda_2; i})(0))]_{\sim_x} \\ &= [(\kappa_i^{-1} \circ \kappa_i(x), i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} = [(x, i, \lambda_1 \triangleright v_1 + \lambda_2 \triangleright v_2)]_{\sim_x} \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_1)(0))]_{\sim_x} + \lambda_2 \triangleright [(x, i, D(\kappa_i \circ \gamma_2)(0))]_{\sim_x} \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright V_x([\gamma_1]_{\sim_x}) + \lambda_2 \triangleright V_x([\gamma_2]_{\sim_x}). \end{aligned}$$

Jako odwrotność  $\mathbb{R}$ -liniowej bijekcji odwzorowanie  $\Gamma_x$  jest automatycznie  $\mathbb{R}$ -liniowe.  $\square$



Jak zapowiadaliśmy na wstępie, przyporządkowanie rozmaitości jej wiązki stycznej ma charakter naturalny, co precyzuje poniższe

**Stwierdzenie 4.** Odwzorowanie

$$\mathbb{T} : \text{Ob } \mathbf{Man}^{(k+1)} \longrightarrow \text{Ob } \mathbf{Man}^{(k)} : (M, \widehat{\mathcal{A}}) \longmapsto (\mathbb{T}M, \mathbb{T}\widehat{\mathcal{A}})$$

opisane w Def. 3 rozszerza się kanonicznie do funktora kowariantnego

$$\mathbb{T} : \mathbf{Man}^{(k+1)} \rightarrow \mathbf{Man}^{(k)},$$

zwanego **funktorem stycznym**.

*Dowód:* Mając dane  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$   $\alpha \in \{1, 2\}$  wymiaru  $\dim M_\alpha = n_\alpha$ , a na nich lokalne mapy  $\kappa_{i_\alpha}^\alpha : \mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i_\alpha}^\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $i_\alpha \in I_\alpha$  o dyskutowanej wcześniej własności  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$  (zapisanej dla pewnego odwzorowania  $\phi : I_1 \rightarrow I_2$ ) oraz stowarzyszone z nimi mapy naturalne  $\mathbb{T}\kappa_{i_\alpha}^\alpha : \pi_{\mathbb{T}M_\alpha}^{-1}(\mathcal{O}_{i_\alpha}^\alpha) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_{i_\alpha}^\alpha \times \mathbb{R}^{n_\alpha}$ , zdefiniujemy dla dowolnego  $C^{k+1}$ -odwzorowania

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

o prezentacjach lokalnych  $f_{i_1} = \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1}$  lokalne odwzorowania

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{i_1} f & : \pi_{\mathbb{T}M_1}^{-1}(\mathcal{O}_{i_1}^1) \longrightarrow \pi_{\mathbb{T}M_2}^{-1}(\mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2) \\ & : [(x, i_1, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \longmapsto [(f(x), \phi(i_1), \text{D}f_{i_1}(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} . \end{aligned}$$

Powyższa definicja nie zależy od wyboru reprezentanta klasy równoważności, o czym przekonuje krótki rachunek

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_{j_1} f([(x, i_1, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}}) \equiv \mathbb{T}_{j_1} f([(x, j_1, \text{Dt}_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}}) \\ & = [(f(x), \phi(j_1), \text{D}f_{j_1}(\kappa_{j_1}^1(x)) \circ \text{Dt}_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & \equiv [(f(x), \phi(i_1), \text{Dt}_{\phi(i_1)\phi(j_1)}^2(\kappa_{\phi(j_1)}^2 \circ f(x)) \circ \text{D}f_{j_1}(\kappa_{j_1}^1(x)) \circ \text{Dt}_{j_1 i_1}^1(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & = [(f(x), \phi(i_1), \text{D}(t_{\phi(i_1)\phi(j_1)}^2 \circ f_{j_1} \circ t_{j_1 i_1}^1)(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & = [(f(x), \phi(i_1), \text{D}f_{i_1}(\kappa_{i_1}^1(x))(v))]_{\sim_{\text{Dt.}}} \\ & \equiv \mathbb{T}_{i_1} f([(x, i_1, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}}) , \end{aligned}$$

przeprowadzony dla dowolnego  $x \in \mathcal{O}_{i_1 j_1}^1$ , a wykorzystujący jedynie definicje występujących weń klas abstrakcji oraz Stw. 56. Z tej to przyczyny mamy do czynienia z zadaniem globalnie  $C^k$ -odwzorowaniem

$$\mathbb{T}f : \mathbb{T}M_1 \longrightarrow \mathbb{T}M_2$$

o lokalnej postaci

$$\mathbb{T}f \upharpoonright_{\pi_{\mathbb{T}M_1}^{-1}(\mathcal{O}_{i_1}^1)} = \mathbb{T}_{i_1} f ,$$

zwanym **odwzorowaniem stycznym** do  $f$ . Odwzorowanie to pokrywa  $f$  w sensie, jaki wyraża diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}M_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}f} & \mathbb{T}M_2 \\ \pi_{\mathbb{T}M_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbb{T}M_2} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array} .$$

Teza Stw. 56 gwarantuje także przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{T}M_2 & & \\
 & \nearrow \mathbb{T}f_{12} & \uparrow & \nwarrow \mathbb{T}f_{23} & \\
 \mathbb{T}M_1 & \xrightarrow{\mathbb{T}(f_{23} \circ f_{12})} & & \mathbb{T}M_3 & \\
 \downarrow \pi_{\mathbb{T}M_1} & & \downarrow \pi_{\mathbb{T}M_2} & & \downarrow \pi_{\mathbb{T}M_3} \\
 & \nearrow f_{12} & M_2 & \nwarrow f_{23} & \\
 M_1 & \xrightarrow{f_{23} \circ f_{12}} & & M_3 & 
 \end{array}$$

dla dowolnej trójki  $C^{k+1}$ -rozmaitości  $(M_\beta, \widehat{\mathcal{A}}_\beta)$ ,  $\beta \in \{1, 2, 3\}$  i pary  $C^{k+1}$ -odwzorowań  $f_{\gamma\gamma+1} : M_\gamma \rightarrow M_{\gamma+1}$ ,  $\gamma \in \{1, 2\}$ . Mamy też oczywistą tożsamość

$$\mathbb{T}\text{id}_M = \text{id}_{\mathbb{T}M},$$

wynikającą wprost z definicji (lokalnej postaci)  $\mathbb{T}f$ .  $\square$

**Uwaga 3.** Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że odwzorowanie styczne  $\mathbb{T}f$  respektuje wprowadzoną wcześniej strukturę  $\mathbb{R}$ -liniową na (włóknie)  $\mathbb{T}M_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , gdyż obcięcia jego lokalnych prezentacji do punktu,

$$(6) \quad \mathbb{T}_x f := \mathbb{T}f \upharpoonright_{\mathbb{T}_x M_1}, \quad x \in M_1,$$

są  $\mathbb{R}$ -liniowe – w rzeczy samej, wprowadziwszy w  $\mathbb{T}_x M_1 \cong \mathbb{R}^{\times n_1}$  oraz  $\mathbb{T}_{f(x)} M_2 \cong \mathbb{R}^{\times n_2}$  odnośne bazy:

$$(7) \quad \tau_a^1(x) := [(x, i, e_a)]_{\sim_{\text{Dt.}}}, \quad a \in \overline{1, n_1}, \quad \tau_A^2(x) := [(x, i, e_A)]_{\sim_{\text{Dt.}}}, \quad A \in \overline{1, n_2},$$

określone przy użyciu baz standardowych  $\{e_a\}_{a \in \overline{1, n_1}}$  w  $\mathbb{R}^{\times n_1}$  i  $\{e_A\}_{A \in \overline{1, n_2}}$  w  $\mathbb{R}^{\times n_2}$ , a względem pierwszej z nich – rozkład dowolnego wektora stycznego ze wzoru (4) w postaci

$$V(x) = [(x, i, v^a \triangleright e_a)]_{\sim_{\text{Dt.}}} \equiv v^a \triangleright \tau_a^1(x),$$

obliczamy

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}_x f(V(x)) &\equiv \mathbb{T}f_i([(x, i, v)]_{\sim_{\text{Dt.}}}) = [(f(x), \phi(i), \text{D}f_i(\kappa_i^1(x))(v))]_{\sim} \\
 &\equiv \text{D}f_i(\kappa_i^1(x))_a^A v^a \triangleright \tau_A^2(x),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\text{D}f_i(\kappa_i^1(x))(e_a) =: \text{D}f_i(\kappa_i^1(x))_a^A \triangleright e_A.$$

Na zakończenie wstępnej dyskusji struktur stycznościowych warto wysłowić jeszcze nader pomocne w dalszych naszych rozważaniach

**Stwierdzenie 5.** Przyjmijmy zapis Def. 3 oraz Przykł. 1 (1) i niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą rozmaitościami różniczkowalnymi klasy  $C^{k+1}$ . Istnieje kanoniczny dyfeomorfizm

$$\mathbb{T}(M_1 \times M_2) \cong \mathbb{T}M_1 \times \mathbb{T}M_2.$$

*Dowód:* Niechaj  $\text{pr}_\alpha : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą rzutami kanonicznymi. Gładkość odwzorowania

$$\tau_{M_1, M_2} \equiv (\text{Tpr}_1, \text{Tpr}_2) : \text{T}(M_1 \times M_2) \longrightarrow \text{T}M_1 \times \text{T}M_2$$

(jako jedyne gładkiego o własnościach  $\text{pr}_\alpha \circ \tau_{M_1, M_2} = \text{Tpr}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ ) wynika wprost z uniwersalnego charakteru produktu rozmaiłości  $\text{T}M_1 \times \text{T}M_2$ . Wykorzystując odwzorowania jawnie gładkie

$$J_{m_2} : M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2 : m \longmapsto (m, m_2),$$

$$J_{m_1} : M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2 : \tilde{m} \longmapsto (m_1, \tilde{m}),$$

określone dla dowolnych  $m_\alpha \in M_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , konstruujemy odwzorowanie (gładkie, co bez trudu sprawdzamy w dowolnej mapie lokalnej)

$$J_x : \text{T}M_1 \times \text{T}M_2 \longrightarrow \text{T}(M_1 \times M_2) : (v_1, v_2) \longmapsto \text{T}J_{\pi_{\text{T}M_2}(v_2)}(v_1) + \text{T}J_{\pi_{\text{T}M_2}(v_1)}(v_2).$$

Odwzorowania te są w oczywisty sposób wzajem odwrotne.  $\square$

Zanim przejdziemy do zastosowań funktora stycznego w opisie odwzorowań różniczkowalnych, poczynimy dygresję skromną, a przy tym o tyle naturalną, że sprowokowaną wcześniejszymi uwagami o strukturze  $\mathbb{R}$ -liniowej na włóknie wiązki stycznnej, które rodzą pytanie o strukturę dualną oraz wielo-dualną, czyli o przestrzeń form wieloliniowych, w szczególności zaś – form alternujących. Wnioski ze zwięzłej dyskusji tego zagadnienia znajdują zastosowanie w rozdziałach późniejszych. Przedstawiony poniżej schemat indukcji struktury różniczkowej jest zdeterminowany przez konstrukcję wiązki stycznnej i jako taki stanowi kolejny przykład geometryzacji obiektu algebraicznego. Mamy zatem

**Definicja 4.** Przyjmijmy zapis 3. **Wiązka kostyczna**  $C^{k+1}$ -rozmaiłości  $(M, \mathcal{A})$  wymiaru  $n \in \mathbb{N}^x$ , o atlasie  $\mathcal{A} = \{\kappa_i\}_{i \in I}$  stowarzyszonym z pokryciem otwartym  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ , to  $C^k$ -rozmaiłość  $(\text{T}^*M, \text{T}^*\mathcal{A})$  utworzona, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$\text{T}^*M := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{x_n})^* \right) / \sim_{\text{Dt}^{-1}}$$

relacji

$$(x, i, \Phi) \sim (y, j, \Psi) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ \Psi = \Phi \circ \text{D}t_{ij}(\kappa_j(x)) \equiv \Phi \circ \text{D}(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{\text{T}^*M} : \text{T}^*M \longrightarrow M : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{-1}}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$\text{T}_x^*M := \pi_{\text{T}^*M}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru  $\text{T}^*M$  jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\pi_{\sim} : \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{x_n})^* \longrightarrow \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{x_n})^* \right) / \sim_{\text{Dt}^{-1}} : (x, i, \Phi) \longmapsto [(x, i, \Phi)]_{\sim_{\text{Dt}^{-1}}}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni  $\mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{x_n})^* \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{x_n}$ , o iniekcjach kanonicznych

$$j_i : \mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{x_n})^* \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times (\mathbb{R}^{x_n})^* : (x, \Phi) \longmapsto (x, i, \Phi), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{S}(\text{T}^*M) := \left\{ \mathcal{O} \subset \text{T}^*M \mid \forall i \in I : j_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_i \times (\mathbb{R}^{x_n})^*) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej  $\Gamma^*M$  określają (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$\Gamma^* \kappa_i : \pi_{\Gamma^*M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times (\mathbb{R}^n)^* : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{-1}}} \mapsto (\kappa_i(x), \Phi),$$

zwane **mapami naturalnymi**, które definiują transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \Gamma^* t_{ji} := \Gamma^* \kappa_j \circ (\Gamma^* \kappa_i)^{-1} & : \quad \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times (\mathbb{R}^n)^* \\ & : \quad (\kappa_i(x), \Phi) \mapsto (\kappa_j(x), \Phi \circ Dt_{ij}(\kappa_j(x))), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy  $C^k$ .

Klasę abstrakcji

$$\phi(x) := [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{-1}}} \in \Gamma_x^* M$$

określamy mianem **kowektora** zaczepionego w punkcie  $x \in M$ .

Analogicznie definiujemy – dla dowolnego  $p \in \overline{1, \dim M}$  – **wiązkę  $p$ -form różniczkowych** na  $(M, \mathcal{A})$   $C^k$ -rozmaitość  $(\wedge^p \Gamma^* M, \wedge^p \Gamma^* \mathcal{A})$  utworzoną, jak następuje:

- nośnikiem struktury jest zbiór klas abstrakcji

$$\wedge^p \Gamma^* M := \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) \right) / \sim_{Dt_{-p}}$$

relacji

$$(x, i, \Phi) \sim (y, j, \Psi) \iff \begin{cases} y = x \in \mathcal{O}_{ij} \\ \Psi = \Phi \circ \times_{i=1}^p Dt_{ij}(\kappa_j(x)) \end{cases},$$

wyposażony w odwzorowanie

$$\pi_{\wedge^p \Gamma^* M} : \wedge^p \Gamma^* M \longrightarrow M : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{-1}}} \longmapsto x,$$

zwane **rzutem kanonicznym (na bazę wiązki)**, którego poziomice

$$\wedge^p \Gamma_x^* M := \pi_{\wedge^p \Gamma^* M}^{-1}(\{x\})$$

noszą miano **włókien**;

- topologia zbioru  $\wedge^p \Gamma^* M$  jest topologią ilorazową indukowaną wzdłuż surjektywnego rzutu

$$\begin{aligned} \pi_{\sim} & : \quad \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) \longrightarrow \left( \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) \right) / \sim_{Dt_{-p}} \\ & : \quad (x, i, \Phi) \longmapsto [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{-1}}} \end{aligned}$$

z topologii sumy rozłącznej przestrzeni  $\mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) \cong \mathcal{O}_i \times \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$ , o injekcjach kanonicznych

$$j_i : \mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) \longrightarrow \bigsqcup_{j \in I} \mathcal{O}_j \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) : (x, \Phi) \longmapsto (x, i, \Phi), \quad i \in I,$$

z których każda jest nośnikiem topologii produktowej,

$$\mathcal{S}(\wedge^p \Gamma^* M) := \left\{ \mathcal{O} \subset \wedge^p \Gamma^* M \mid \forall i \in I : j_i^{-1}(\pi_{\sim}^{-1}(\mathcal{O})) \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn})) \right\};$$

- strukturę różniczkową na przestrzeni topologicznej  $\wedge^p \Gamma^* M$  określają (jawnie homeomorficzne) odwzorowania

$$\wedge^p \Gamma^* \kappa_i : \pi_{\wedge^p \Gamma^* M}^{-1}(\mathcal{O}_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_i \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) : [(x, i, \Phi)]_{\sim_{Dt_{-1}}} \mapsto (\kappa_i(x), \Phi),$$

zwane **mapami naturalnymi**, które definiują transformacje współrzędniowe

$$\begin{aligned} \wedge^p \Gamma^* t_{ji} := \wedge^p \Gamma^* \kappa_j \circ (\wedge^p \Gamma^* \kappa_i)^{-1} & : \quad \kappa_i(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) \xrightarrow{\cong} \kappa_j(\mathcal{O}_{ij}) \times \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^{p, \text{alt}}(\mathbb{R}^{xn}) \\ & : \quad (\kappa_i(x), \Phi) \mapsto (\kappa_j(x), \Phi \circ \times_{i=1}^p Dt_{ij}(\kappa_j(x))), \end{aligned}$$

w oczywisty sposób należące do klasy  $C^k$ .

Klasę abstrakcji

$$\phi(x) := [(x, i, \Phi)]_{\sim_{D_{t^{-1}}}} \in \bigwedge^p T_x^* M$$

określamy mianem  **$p$ -formy** zaczepionej w punkcie  $x \in M$ .

**Uwaga 4.** Struktura różniczkowa wiązki kostycznej (a więc także wiązek  $p$ -form różniczkowych) jest w pełni zdeterminowana przez strukturę różniczkową wiązki stycznej i wymóg dwoistości. Oto bowiem żądanie, iżby ewaluacja kowektora na wektorze stycznym wykorzystująca kanoniczną dwoistość  $(\mathbb{R}^{\times n})^* \times \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\langle \phi(x), V(x) \rangle := \langle \text{pr}_2 \circ T^* \kappa_i(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ T \kappa_i(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}},$$

była dobrze określona, tj. niezależna od wyboru lokalnego układu współrzędnych w  $x \in \mathcal{O}_{ij}$ , implikuje wypisaną wyżej postać mapy naturalnej na  $\pi_{T^*M}^{-1}(\mathcal{O}_i)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \text{pr}_2 \circ T^* \kappa_j(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ T \kappa_j(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}} &= \langle \Phi \circ D(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)), Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}} \\ &\equiv \Phi \circ D(t_{ji}^{-1})(\kappa_j(x)) \circ Dt_{ji}(\kappa_i(x))(v) \\ &= \Phi(v) \equiv \langle \Phi, v \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}} \\ &\equiv \langle \text{pr}_2 \circ T^* \kappa_i(\phi(x)), \text{pr}_2 \circ T \kappa_i(V(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{\times n}}. \end{aligned}$$

I wreszcie na koniec końców wprowadzenia do geometrii stycznej słowo o globalizacji ( $\Lambda\pi\alpha\gamma\epsilon$   $\Sigma\alpha\tau\alpha\nu\alpha\varsigma$ ?!). Pojęć z natury swej lokalnych, jakimi są wektory i kowektory zaczepione w punkcie różności. Rzecz idzie o nadanie sensu postulatowi gładkości lokalnego, czy wręcz globalnego rozkładu takowych obiektów w pewnym rozciąglym nośniku zawartym w  $M$ , czyli w istocie – o geometryzację pojęcia wektora i formy liniowej zgodną z zaproponowanym powyżej schematem geometryzacji pojęcia przestrzeni wektorowej i dualnej do niej. Ogólną metodę postępowania w przypadku przestrzeni topologicznych lokalnie modelowanych na (szczególnych) iloczynach kartezjańskich różniczkowalnych (zw. wiązkami włóknistymi) Autor wykład na kursie „Elementy algebry i geometrii wyższej fizyce” (na który Autor zaprasza), tymczasem jednak okazuje się, że aby Słowu temu odpowiednią dać Rzecz w obecnym kontekście, wystarczy przejść – w odwołaniu do konkretnej interpretacji geometrycznej rozpatrywanych tu struktur – od dotychczasowych definicji wektora stycznego (algebraicznej z Def. 3 i 4 oraz geometrycznej ze Stw. 3) do jego definicji analitycznej, niezwykle wygodnej z punktu widzenia późniejszych zastosowań pojęcia pierwotnego. Zaczniemy od

**Definicja 5.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 1. Niechaj  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  będzie  $C^{k \geq 1}$ -rozmaitością. **Różniczkowanie w punkcie**  $x \in M$  to odwzorowanie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$V : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

spełniające **warunek Leibniza**

$$\forall_{f, g \in C^1(M, \mathbb{R})} : V(f \cdot g) = V(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot V(g).$$

Zbiór różniczkowań w  $x$  wyposażony w punktową strukturę  $\mathbb{R}$ -liniową określamy mianem **przestrzeni różniczkowań w  $x$**  i oznaczamy jako

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}).$$

Przerzucenie pomostu logicznego pomiędzy wprowadzonym tu nowym pojęciem a wcześniejszymi definicjami wektora stycznego, otwierające drogę do szeregu istotnych zastosowań, wymaga wzbogacenia naszego arsenału narzędzi różniczkowo-geometrycznych o prostą, acz przydatną konstrukcję funkcjonalną stanowiącą podstawę powszechnej w rozważaniach strukturalnych redukcji zagadnień globalnych do postaci lokalnej, pozwalającej na wykorzystanie lokalnego opisu współrzędnego. Zaczniemy więc od

**Definicja 6.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 1. Niechaj  $(M, \mathcal{A})$  będzie  $C^k$ -rozmaitością i niech  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  będzie dowolnym pokryciem otwartym  $M$ . **Rozkład jedności klasy  $C^k$  podporządkowany  $\mathcal{O}$**  to rodzina  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  odwzorowań  $\lambda_i \in C^k(M, [0, 1])$  spełniających następujące warunki:

- $\forall_{i \in I} : \text{supp } \lambda_i \subset \mathcal{O}_i$ , przy czym – przypomnijmy – dla dowolnej funkcji ciągłej  $f \in C(M, \mathbb{R})$  zbiór  $\text{supp } f$ , zwany **nośnikiem**  $f$ , jest określony jako domknięcie przeciwobrazu  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tj.

$$\text{supp } f := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})};$$

- rodzina  $\{\text{supp } \lambda_i\}_{i \in I}$  jest **lokalnie skończona**, tj. każdy punkt  $M$  ma otoczenie otwarte, na którym prawie wszystkie<sup>3</sup> funkcje  $\lambda_i$  przybierają wartość 0;
- $\forall_{x \in M} : \sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1$ , przy czym wypisana tu suma ma sens (jest skończona) wobec poprzedniego założenia.

Ostatni z warunków oznacza, że rodzina  $\{\text{Int supp } \lambda_i\}_{i \in I}$  stanowi lokalnie skończone podpokrycie  $\mathcal{O}$ .

Powyższa definicja byłaby bezużyteczna, gdyby nie

**Twierdzenie 2** (O istnieniu rozkładu jedności). Przyjmijmy oznaczenia Def. 1. Z dowolnym pokryciem otwartym  $C^k$ -rozmaitości parazwartej można stowarzyszyć rozkład jedności klasy  $C^k$  podporządkowany temu pokryciu.

*Dowód:* Zauważmy przede wszystkim, że w świetle Def. 26 *dowolne* otwarte pokrycie  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  rozmaitości  $(M, \mathcal{A})$  ma lokalnie skończone (otwarte) rozdrobnienie, możemy zatem zacząć od skonstruowania rozkładu jedności dla takiego lokalnie skończonego rozdrobnienia  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$  pokrycia  $\mathcal{O}$ . Pokażemy najpierw, że pokrycie  $\mathcal{U}$  można zastąpić jego lokalnie skończonym (otwartym) rozdrobnieniem  $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$  o własności

$$\forall_{i \in I} : \overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i.$$

W tym celu każdemu punktowi  $x \in M$  przyporządkujemy otwarte otoczenie  $\mathcal{W}_x \ni x$  spełniające warunek

$$\exists_{i \in I} : \mathcal{U}_i \supset \overline{\mathcal{W}_x}.$$

Rodzina  $\{\mathcal{W}_x\}_{x \in M}$  jest otwartym rozdrobnieniem  $\mathcal{U}$ , dla którego z racji parazwartości  $M$  możemy wybrać lokalnie skończone otwarte rozdrobnienie  $\mathcal{W}' \equiv \{\mathcal{W}'_j\}_{j \in J}$ . Dla dowolnego  $i \in I$  definiujemy następnie podzbiór  $J_i := \{k \in J \mid \overline{\mathcal{W}'_k} \subset \mathcal{U}_i\}$  zbioru indeksów pokrycia oraz zbiór otwarty

$$\mathcal{V}_i := \bigcup_{j \in J_i} \mathcal{W}'_j.$$

Załóżmy, że  $\overline{\mathcal{V}_i} \setminus \mathcal{U}_i \ni x$ , a wtedy wobec lokalnej skończoności  $\mathcal{W}'$  istnieje otwarte otoczenie  $\mathcal{U}_x \ni x$  o własności

$$|\{k \in J_i \mid \mathcal{U}_x \cap \mathcal{W}'_k \neq \emptyset\}| < \infty.$$

Wybrawszy tak określone otoczenie, oznaczmy

$$K_{\mathcal{U}_x; i} := \{k \in J_i \mid \mathcal{U}_x \cap \mathcal{W}'_k \neq \emptyset\},$$

a następnie rozważmy zbiór otwarty

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i} := \mathcal{U}_x \setminus \bigcup_{k \in K_{\mathcal{U}_x; i}} \overline{\mathcal{W}'_k},$$

który wprost z definicji spełnia warunek

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i} \cap \mathcal{V}_i = \emptyset.$$

Skoro też  $x \notin \mathcal{U}_i$ , to wobec inkluzji  $\overline{\mathcal{W}'_k} \subset \mathcal{U}_i$  słusznej dla dowolnego  $k \in K_{\mathcal{U}_x; i} \subset J_i$  stwierdzamy, że  $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i}$ . Wtedy jednak zbiór  $M \setminus \mathcal{V}_{\mathcal{U}_x; i}$  nie zawiera  $x$ , a zawiera  $\mathcal{V}_i$ , zatem – jako zbiór domknięty

<sup>3</sup>Tj. wszystkie prócz skończonej liczby.

– zawiera także  $\overline{\mathcal{V}_i}$ . Wnioskujemy przeto, że  $x \notin \overline{\mathcal{V}_i}$ , co jest sprzeczne z początkowym założeniem. Stąd nieodzownie  $\overline{\mathcal{V}_i} \setminus \mathcal{U}_i = \emptyset$ , czyli – innymi słowy –

$$\overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i,$$

co jest postulowaną relacją.

W następnej kolejności dowodzimy, że dla dowolnego podzbioru domkniętego  $\mathcal{C} \subset M$  i dowolnego otwartego otoczenia  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$  istnieje funkcja  $f \in C^k(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$  spełniająca warunki

$$(8) \quad f \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{U}_{\mathcal{C}}} = 0 \quad \wedge \quad \forall_{x \in \mathcal{C}} : f(x) > 0.$$

W tym celu przekonujemy się najpierw, że dla dowolnego  $x \in M$  i dowolnego jego otwartego otoczenia  $\mathcal{U}_x \ni x$  istnieje funkcja  $f_{\mathcal{U}_x} \in C^k(M, [0, 1])$  o własnościach

$$f_{\mathcal{U}_x}(x) = 1 \quad \wedge \quad f_{\mathcal{U}_x} \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{U}_x} = 0.$$

Istotnie, niechaj  $\kappa : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{x_n}$ ,  $n = \dim M$  będzie dowolną mapą atlasu  $\widehat{\mathcal{A}}$ , której dziedzina  $\mathcal{U}$  zawiera  $x$ , przy czym założymy (dokonując – jeśli zachodzi taka potrzeba – stosownej liniowej transformacji lokalnych współrzędnych, a mianowicie: translacji i jednorodnego przeskalowania), że  $\kappa(x) = 0$  oraz  $\kappa(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}) \supset B^n(0; 2)$ . Wówczas przykładem odwzorowania, o którym mowa powyżej, jest superpozycja  $\lambda \circ \kappa =: f_{\mathcal{U}_x}$  mapy  $\kappa$  z **funkcją typu Uluru** określoną, jak następuje:

$$\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \gamma(\|x\|),$$

gdzie

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \frac{\int_x^2 dt \beta(t)}{\int_1^2 ds \beta(s)}, \quad \beta(t) := \alpha(t-1) \cdot \alpha(2-t)$$

jest zdefiniowane przy użyciu

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

Wybermy teraz w każdym punkcie  $x \in \mathcal{C}$  takie jego otoczenie  $\mathcal{U}_x$ , które jest zawarte w zadanym zbiorze  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ , po czym z każdego  $\mathcal{U}_x$  wydzielmy podotoczenie  $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ , na którym znaleziona wcześniej funkcja  $f_{\mathcal{U}_x}$  spełnia nierówność

$$\forall_{y \in \mathcal{V}_x} : f_{\mathcal{U}_x}(y) > 0,$$

co jest możliwe, gdyż  $x$  należy do otwartego zbioru  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$  wraz z pewnym swoim otwartym otoczeniem, a wobec swej ciągłości funkcja  $f_{\mathcal{U}_x}$  przyjmuje w otoczeniu  $x$  wartości bliskie 1. W konsekwencji domkniętości  $\mathcal{C}$  z jego otwartego pokrycia  $\{\mathcal{V}_x\}_{x \in \mathcal{C}}$  możemy – na mocy Stw. 37 – wybrać lokalnie skończone podpokrycie  $\{\mathcal{V}_y\}_{y \in A \subset \mathcal{C}}$ ,

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{y \in A} \mathcal{V}_y,$$

a następnie zdefiniować funkcję

$$f := \sum_{y \in A} f_{\mathcal{U}_y},$$

która w każdym punkcie  $M$  jest dobrze określona, gdyż suma jest lokalnie skończona, a nadto spełnia warunki (8).

Z połączenia dotychczasowych obserwacji wyciągamy następujący wniosek: Stosując dwukrotnie procedurę rozdrabniania lokalnie skończonego pokrycia otwartego rozmaitości  $M$ , możemy uzyskać parę lokalnie skończonych otwartych rozdrobnień  $\mathcal{V} \equiv \{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ ,  $\mathcal{W} \equiv \{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$  pokrycia  $\mathcal{U}$  spełniających relacje

$$\forall_{i \in I} : \mathcal{W}_i \subset \overline{\mathcal{W}_i} \subset \mathcal{V}_i \subset \overline{\mathcal{V}_i} \subset \mathcal{U}_i,$$

a następnie dla każdego  $i \in I$  wskazać funkcję  $g_i \in C^k(M, \mathbb{R}_{\geq 0})$  o własnościach

$$g_i \upharpoonright_{M \setminus \mathcal{V}_i} = 0 \quad \wedge \quad \forall_{x \in \overline{\mathcal{W}_i}} : g_i(x) > 0.$$

Jako że  $\overline{W_i} \subset \text{supp } g_i \subset \mathcal{U}_i$ , a  $\mathcal{W}$  jest lokalnie skończone, suma  $g := \sum_{i \in I} g_i$  jest wszędzie dobrze określona (skończona) jako funkcja klasy  $C^k$ , a ponieważ  $\mathcal{W}$  jest pokryciem  $M$ , przeto

$$\forall_{x \in M} : g(x) > 0.$$

Możemy zatem zdefiniować funkcje

$$\lambda_i := \frac{g_i}{g} \in C^k(M, [0, 1]),$$

które spełniają wszystkie warunki z Def. 6.

Na koniec wykorzystamy  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  do skonstruowania rozkładu jedności dla wyjściowego pokrycia  $\mathcal{O}$ . W tym celu dla każdego  $i \in I$  ustalamy – przywoławszy warunek (19) – indeks  $\phi(i) \in A$  o własności  $\mathcal{O}_{\phi(i)} \supset \mathcal{U}_i$ , co określa odwzorowanie  $\phi : I \rightarrow A : i \mapsto \phi(i)$ . Następnie definiujemy funkcję

$$\rho_\alpha := \sum_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \lambda_i \in C^k(M; \mathbb{R}),$$

przy czym przyjmujemy konwencję, w której  $\phi^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$  oznacza  $\rho_\alpha = 0$ . Wprost z konstrukcji

$$\text{supp } \rho_\alpha \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \text{supp } \lambda_i \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \mathcal{U}_i \subset \bigcup_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \mathcal{O}_{\phi(i)} = \mathcal{O}_\alpha$$

oraz

$$\forall_{x \in \mathcal{O}_\alpha} : \rho_\alpha(x) \in [0, 1],$$

a nadto

$$\forall_{x \in M} : \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x) \equiv \sum_{\alpha \in A} \sum_{i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})} \lambda_i(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1.$$

Wreszcie też stwierdzamy, że rodzina  $\{\text{supp } \rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  jest lokalnie skończona. Istotnie, założmy, przeciwnie, że  $x \in M$  jest punktem, na którego dowolnym otoczeniu nieskończenie wiele funkcji  $\rho_\alpha$  przyjmuje wartość większą od 0. Każdej z nich odpowiada przynajmniej jedna funkcja  $\lambda_i$ ,  $i \in \phi^{-1}(\{\alpha\})$ , która nie znika w  $x$ , otrzymujemy zatem nieskończenie wiele funkcji  $\lambda_i$  o własności  $\lambda_i(x) > 0$ , co przeczy lokalnej skończoności rodziny  $\{\text{supp } \lambda_i\}_{i \in I}$ . Konstatujemy więc na koniec, że  $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$  jest pożądanym rozkładem jedności stowarzyszonym z (dowolnym) pokryciem otwartym  $\mathcal{O}$ .  $\square$

Odwracając logikę powyższego dowodu, bez trudu otrzymujemy przydatne

**Stwierdzenie 6.** Przyjmijmy zapis Def. 6. Niechaj  $\mathcal{C} \subset M$  będzie zbiorem domkniętym. Dla dowolnego otwartego otoczenia  $\mathcal{O} \supset \mathcal{C}$  istnieje funkcja  $f \in C^k(M; \mathbb{R})$  o własnościach

$$\forall_{x \in \mathcal{C}} : f(x) = 1 \quad \wedge \quad \text{supp } f \subset \mathcal{O}.$$

Co więcej, jeśli dany jest dowolny punkt  $p \in M \setminus \mathcal{C}$ , to otoczenie  $\mathcal{O}$  oraz funkcję  $f$  można dobrać tak, ażeby był spełniony dodatkowy warunek

$$f(p) = 0.$$

*Dowód:* Rozważmy rozkład jedności  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  klasy  $C^k$  stowarzyszony z (lokalnie skończonym) pokryciem otwartym  $\{\mathcal{O}_1 := \mathcal{O}, \mathcal{O}_2 := M \setminus \mathcal{C}\}$  rozmaitości  $M$ , którego istnienie gwarantuje Tw. 2. Kładąc  $f := \lambda_1$ , otrzymujemy  $\text{supp } f \equiv \text{supp } \lambda_1 \subset \mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O}$ , a nadto – wobec oczywistej tożsamości  $\lambda_2 \upharpoonright_{\mathcal{C}} = 0$  –

$$f \upharpoonright_{\mathcal{C}} \equiv \lambda_1 \upharpoonright_{\mathcal{C}} = \left( \sum_{i \in \{1,2\}} \lambda_i \right) \upharpoonright_{\mathcal{C}} = 1 \upharpoonright_{\mathcal{C}} = 1.$$

Jako  $\mathcal{O}$  można wybrać sumę mnogościową otwartych otoczeń  $\mathcal{O}_x$  punktów  $x \in \mathcal{C}$  niezawierających  $p$  (ich istnienie zapewnia hausdorffowskość  $M$ ),

$$\mathcal{O} := \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{O}_x, \quad \forall_{x \in \mathcal{C}} : \mathcal{O}_x \not\ni p,$$

a wtedy

$$\text{supp } f \equiv \text{supp } \lambda_1 \subset \mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O} \subset M \setminus \{p\}.$$



□

Prostej ilustracji przydatności rozkładu jedności, z której przyjdzie nam skorzystać już niebawem, dostarcza

**Stwierdzenie 7** (O rozszerzaniu funkcji). Przyjmijmy oznaczenia Def. 6. Niechaj  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  będzie rozkładem jedności klasy  $C^k$  podporządkowanym pokryciu otwartemu  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$   $C^k$ -rozmaitości  $(M, \mathcal{T})$  i niech  $\{f_i\}_{i \in I}$  będzie rodziną funkcji  $f_i \in C^k(\mathcal{O}_i, \mathbb{R})$ . Wówczas funkcja

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{i \in \{j \in I \mid \mathcal{O}_j \ni x\}} \lambda_i(x) \cdot f_i(x)$$

jest klasy  $C^k$ . W szczególności dla dowolnego podzbioru  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$  oraz dowolnych: domkniętego  $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$  oraz otwartego  $\mathcal{U} \supset \mathcal{C}$  każda funkcja  $f \in C^k(\mathcal{O}; \mathbb{R})$  ma rozszerzenie  $\tilde{f} \in C^k(M; \mathbb{R})$  o własnościach

$$\tilde{f}|_{\mathcal{C}} = f|_{\mathcal{C}} \quad \wedge \quad \text{supp } \tilde{f} \subset \mathcal{U}.$$

*Dowód:* Celem wykazania pierwszej części tezy wystarczy zauważyć, że dowolną funkcję  $\lambda_i \cdot f_i$  możemy rozszerzyć przez 0 na  $M \setminus \text{supp } \lambda_i$ , otrzymując tym sposobem funkcję klasy  $C^k$ , a następnie – wysumować wszystkie takie rozszerzenia, przy czym tak otrzymana suma  $f$  odwzorowań klasy  $C^k$  jest lokalnie skończona, więc dobrze określona.

Dla ustalonych  $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$  oraz  $\mathcal{U} \supset \mathcal{C}$  rozważmy indeksowaną przez  $\mathcal{C} \ni x$  rodzinę otoczeń otwartych  $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{U}$  oraz odnośnych funkcji (dowolnych)  $f_x \in C^k(\mathcal{O}_x; \mathbb{R})$  o własności

$$f_x|_{\mathcal{O}_x \cap \mathcal{C}} = f|_{\mathcal{O}_x \cap \mathcal{C}}.$$

Rodzina  $\{\mathcal{O}_x\}_{x \in \mathcal{C}} \cup \{\mathcal{O}_* := M \setminus \mathcal{C}\}$  jest pokryciem otwartym  $M$ , z którym w świetle Tw. 2 możemy stowarzyszyć rozkład jedności  $\{\lambda_x\}_{x \in \mathcal{C}} \cup \{\lambda_*\}$  o własności  $\text{supp } \lambda_i \subset \mathcal{O}_i$ ,  $i \in \mathcal{C} \cup \{*\}$ . Każdą z funkcji  $f_x \cdot \lambda_x|_{\mathcal{O}_x} \in C^k(\mathcal{O}_x; \mathbb{R})$ ,  $x \in \mathcal{C}$  możemy następnie rozszerzyć przez 0 do funkcji tej samej klasy  $C^k$ , kładąc jednocześnie  $f_* := 0$ , co pozwala określić – w odwołaniu do udowodnionej już pierwszej części tezy – zdefiniować funkcję

$$\begin{aligned} \tilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R} : y \longmapsto \sum_{z \in \{x \in \mathcal{C} \mid \mathcal{O}_x \ni y\}} \lambda_z(y) \cdot f_z(y) &\equiv \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \cdot f_x(y) \\ &\equiv \sum_{i \in \mathcal{C} \cup \{*\}} \lambda_i(y) \cdot f_i(y), \end{aligned}$$

przy czym pierwsza z wypisanych równości wynika wprost z implikacji

$$y \notin \mathcal{O}_x \supset \text{supp } \lambda_x \quad \implies \quad \lambda_x(y) = 0.$$

Biorąc  $y \in \mathcal{C}$ , wprost z konstrukcji funkcji  $f_x$  dostajemy  $f_x(y) = f(y)$  dla wszystkich  $x$  o własności  $\mathcal{O}_x \ni y$ , a nadto  $\lambda_*(y) = 0$  (wszak  $y \in M \setminus \mathcal{O}_*$ ), co pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= \sum_{z \in \{x \in \mathcal{C} \mid \mathcal{O}_x \ni y\}} \lambda_z(y) \cdot f(y) \equiv \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \cdot f(y) = f(y) \cdot \sum_{x \in \mathcal{C}} \lambda_x(y) \\ &\equiv f(y) \cdot \sum_{i \in \mathcal{C} \cup \{*\}} \lambda_i(y) = f(y), \end{aligned}$$

czyli w istocie

$$\tilde{f}|_{\mathcal{C}} = f|_{\mathcal{C}}.$$

Zarazem jest oczywiste, że funkcja  $\tilde{f}$  jest tożsamościowo równa zeru na dopełnieniu sumy mnogościowej nośników funkcji  $\lambda_x$ ,  $x \in \mathcal{C}$ , czyli (tym bardziej) na dopełnieniu sumy mnogościowej zbiorów  $\mathcal{O}_x$ , te jednak zawierają się w  $\mathcal{U}$ , przeto niechybnie

$$\text{supp } \tilde{f} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{O}_x \subset \mathcal{U}.$$

□

Jako proste, acz pożyteczne corollarium do Stw. 6 i 7 dostajemy

**Stwierdzenie 8.** Przyjmijmy zapis Def. 5. Ilekroć istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_x \ni x$ , na którym dwie funkcje  $f_1, f_2 \in C^1(M; \mathbb{R})$  pokrywają się,

$$\forall_{y \in \mathcal{O}_x} : f_1(y) = f_2(y),$$

zachodzi

$$\forall_{V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})} : V(f_1) = V(f_2).$$

*Dowód:* Wobec addytywności różniczkowań wystarczy sprawdzić słuszność implikacji

$$\forall_{y \in \mathcal{O}_x} : f(y) = 0 \quad \implies \quad \forall_{V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})} : V(f) = 0.$$

Odniosłszy tezę Stw. 6 do zbioru domkniętego  $\mathcal{C} := \text{supp } f$  oraz punktu  $p := x \in M \setminus \text{supp } f$ , stwierdzamy istnienie otoczenia otwartego  $\mathcal{O} \supset \text{supp } f$  oraz funkcji  $\chi \in C^1(M; \mathbb{R})$  o własnościach

$$\forall_{y \in \text{supp } f} : \chi(y) = 1 \quad \wedge \quad \text{supp } \chi \subset \mathcal{O} \quad \wedge \quad \chi(x) = 0,$$

a zatem także

$$f \equiv f \cdot \chi.$$

Postulowana tożsamość staje się teraz prostą konsekwencją warunku Leibniza,

$$V(f) \equiv V(f \cdot \chi) = V(f) \cdot \chi(x) + f(x) \cdot V(\chi) = V(f) \cdot 0 + 0 \cdot V(\chi) = 0.$$

□

Mamy także oczekiwane

**Stwierdzenie 9.** Przyjmijmy zapis Def. 5. Dowolna funkcja  $f \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R})$  stała na pewnym otoczeniu otwartym  $x \in M$  spełnia tożsamość

$$\forall_{V \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})} : V(f) = 0.$$

*Dowód:* Warunek Leibniza daje nam tożsamość (1 jest tutaj funkcją stałą przyjmującą wartość 1 na otoczeniu  $x$ )

$$V(1) \equiv V(1 \cdot 1) = V(1) \cdot 1 + 1 \cdot V(1) = 2V(1) \quad \implies \quad V(1) = 0,$$

która w połączeniu z  $\mathbb{R}$ -liniowością  $V$  daje – dla dowolnej (funkcji) stałej  $c \in \mathbb{R}$  – równość

$$V(c) \equiv V(c \triangleright 1) = c \cdot V(1) = 0.$$

□

Możemy już teraz bez lęku w sercu powrócić do zasadniczego wątku naszych rozważań, jakim jest relacja między różniczkowaniami w punkcie rozmaitości i zaczepionymi w tymże punkcie wektorami do niej stycznymi. Relację tę określa

**Twierdzenie 3.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 5 i Stw. 2. Istnieje izomorfizm przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}_x M.$$

Wynika zeń strukturalne utożsamienie (punkt po punkcie)

$$\text{Der } C^1(M, \mathbb{R}) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \text{TM}.$$

*Dowód:* Zaczniemy od określenia wygodnej bazy w  $\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R})$ . W tym celu wprowadźmy **pchnięcie różniczkowania wzdłuż odwzorowania**  $F \in C^1(M, N)$  (określonego dla pary  $C^{k \geq 1}$ -rozmaitości  $M \ni x$  i  $N$ ) jako odwzorowanie, jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe,

$$F_*^x : \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Der}_{F(x)} C^1(N, \mathbb{R}) : V \longmapsto V \circ F^*,$$

zapisane w terminach operacji **cofnięcia funkcji wzdłuż  $F$**

$$F^* : C^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(M, \mathbb{R}) : f \longmapsto f \circ F.$$

Jest oczywistym, że ilekroć  $F$  jest dyfeomorfizmem (klasy  $C^1$ ), odnośne pchnięcie  $F_*^x$  jest izomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych, oto bowiem pchnięcie wzdłuż  $F^{-1}$  w  $x$  jest obustronną odwrotnością  $F_*^x$ .

W następnej kolejności wykorzystamy wprowadzoną wcześniej technikę rozkładu jedności celem skonstruowania lokalnego modelu (analitycznej) stycznej w punkcie. Oto więc rozważmy włożenie  $\iota_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \hookrightarrow M$  dowolnego podzbioru otwartego  $\mathcal{O}$  i wybierzmy (dowolnie) punkt  $x \in \mathcal{O}$ . Bez trudu przekonujemy się, iż pchnięcie wzdłuż odwzorowania  $\iota_{\mathcal{O}}$  jest izomorfizmem przestrzeni różniczkowań

$$\iota_{\mathcal{O}*}^x : \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)} C^1(M, \mathbb{R}).$$

W rzeczy samej, odwzorowanie to jest injektywne, a to na mocy Stw. 7, jeśli bowiem  $V \in \ker \iota_{\mathcal{O}*}$ , to rozszerzając dowolną funkcję  $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  do funkcji  $\tilde{f} \in C^1(M, \mathbb{R})$  pokrywającej się z  $f$  na domknięciu  $\overline{\mathcal{O}_x}$  pewnego otoczenia otwartego  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x$ , które wybieramy na tyle małym, aby był spełniony konieczny warunek  $\overline{\mathcal{O}_x} \subset \mathcal{O}$  (co zawsze możemy osiągnąć, choćby wybierając jako  $\mathcal{O}_x$  przeciwobraz dostatecznie małej kuli otwartej względem lokalnej mapy na otoczeniu  $x$ ), stwierdzamy, przywoławszy Stw. 8, że

$$V(f) = V(\tilde{f} \circ \iota_{\mathcal{O}}) \equiv \iota_{\mathcal{O}*}^x V(\tilde{f}) = 0,$$

czyli  $V = 0$ . Jest ono również surjektywne. Istotnie, rozważmy dowolne różniczkowanie  $W \in \text{Der}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)} C^1(M, \mathbb{R})$ . Możemy z nim stowarzyszyć odwzorowanie

$$\underline{W} : C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto W(\tilde{f}),$$

w którego definicji wykorzystujemy *dowolne* rozszerzenie  $f$ , tj. dowolną funkcję  $\tilde{f} \in C^1(M, \mathbb{R})$  pokrywającą się z  $f$  na domknięciu  $\overline{\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}}$  pewnego otoczenia otwartego  $\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}$  punktu  $\iota_{\mathcal{O}}(x)$ , które wybieramy na tyle małym, aby był spełniony konieczny warunek  $\overline{\mathcal{O}_{\iota_{\mathcal{O}}(x)}} \subset \mathcal{O}$ . Odwzorowanie to jest dobrze określone, tzn. nie zależy od wyboru rozszerzenia, jeśli bowiem  $\tilde{f}'$  jest innym rozszerzeniem, to różnica  $\Delta := \tilde{f}' - \tilde{f}$  jest tożsamościowo równa zeru na (otwartym) przecięciu odnośnych otoczeń  $\iota_{\mathcal{O}}(x)$ , a zatem raz jeszcze na mocy Stw. 8

$$W(\tilde{f}') = W(\tilde{f}).$$

Wynik ten automatycznie implikuje liniowość  $\underline{W}$ , gdyż jako rozszerzenie kombinacji  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\lambda_1 \triangleright f_1 + \lambda_2 \triangleright f_2$  funkcji  $f_1, f_2 \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  o współczynnikach  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  możemy zawsze wybrać kombinację liniową  $\lambda_1 \triangleright \tilde{f}_1 + \lambda_2 \triangleright \tilde{f}_2$  odnośnych rozszerzeń, a następnie wykorzystać  $\mathbb{R}$ -liniowość  $W$ . Jest więc  $\underline{W} \in \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ , a przy tym dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$  zachodzi równość

$$(\iota_{\mathcal{O}*}^x \underline{W})(f) \equiv W(\widetilde{f \circ \iota_{\mathcal{O}}}) = W(f),$$

co daje nam pożądaną równość

$$\iota_{\mathcal{O}*}^x \underline{W} = W.$$

Łącząc dotychczasowe obserwacje, konstatujemy istnienie  $\mathbb{R}$ -liniowego izomorfizmu

$$\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_x C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R})$$

indukowanego przez dowolną mapę  $\kappa : \mathcal{O} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}$  atlasu  $\mathcal{A}$  na (dowolnym) otwartym otoczeniu  $\mathcal{O}$  punktu  $x$  – ta jest wszakże (tautologicznie) dyfeomorfizmem klasy  $C^k$  swej dziedziny na homeomorficzny z nią podzbiór  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\times n}$ . Na obecnym etapie wystarczy zatem wykazać istnienie izomorfizmu (czy – co na jedno wychodzi – równość wymiarów  $\mathbb{R}$ -liniowych) przestrzeni  $\text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R})$  i  $T_x M$ . W tym celu wyznaczmy naturalną bazę pierwszej z nich. Oznaczmy  $\kappa(x) =: u_*$ , wprowadźmy na  $\mathbb{R}^{\times n}$  standardowe współrzędne kartezjańskie (czyli funkcje współrzędniowe)  $y^i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , w których  $y \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n)$ , i przywołajmy treść Tw. 13 dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(\mathbb{R}^{\times n}, \mathbb{R})$ ,

$$f(u_* + y) = f(u_*) + y^i \int_{[0,1];\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + \cdot \triangleright y).$$

Ewaluacja różniczkowania  $V \in \text{Der}_{u_*} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$  na funkcji  $f$  daje zatem – wobec  $\mathbb{R}$ -liniowości  $V$  i spełnianego przezeń warunku Leibniza – wynik

$$\begin{aligned} V(f) &= V(f(u_*)) + V(y^i) \int_0^1 dt \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + t \triangleright y) + 0 \cdot \int_0^1 dt V\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}(u_* + t \triangleright y)\right) \Big|_{y=0} \\ &= V(f(u_*)) + V(y^i) \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_*). \end{aligned}$$

Ten na gruncie Stw. 9 redukujemy do postaci

$$V(f) = V(y^i) \frac{\partial f}{\partial y^i}(u_*),$$

która pokazuje dowodnie, iż różniczkowania

$$D_i : C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(u_*)$$

stanowią układ generujący dla przestrzeni  $\text{Der}_{u_*} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R})$ . O tym, że jest to układ liniowo niezależny, przekonujemy się natychmiast dokonując ewaluacji kombinacji  $\mathbb{R}$ -liniowej  $\lambda^i \triangleright D_i = 0$  na funkcjach współrzędniowych i dostając tym sposobem oczekiwany wynik  $\lambda^i = 0$ ,  $i \in \overline{1, n}$ . Mamy zatem antycypowaną równość

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Der}_{\kappa(x)} C^1(\mathbb{R}^{x^n}, \mathbb{R}) = n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M,$$

ta zaś implikuje istnienie izomorfizmu (oraz globalnego utożsamienia), o którym mowa w treści dowodzonego twierdzenia.  $\square$

Powyższe przeformułowanie opisu przestrzeni stycznej do rozmaitości w jej dowolnym punkcie otwiera drogę do dyskusji odwzorowań  $M \longrightarrow \mathbb{T}M$  o dowolnym stopniu gładkości, określonym lokalnie lub globalnie i ograniczonym w naturalny sposób przez stopień gładkości samej rozmaitości. Odwzorowania te stanowią poszukiwaną przez nas geometryzację algebraicznego pojęcia wektora. Możemy więc wprowadzić

**Definicja 7.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 3 i 5. **Pole wektorowe** na  $C^k$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  to przyporządkowanie

$$\mathcal{V} : M \longrightarrow \text{Der } C^1(M, \mathbb{R}) (\equiv \mathbb{T}M) : x \longmapsto \mathcal{V}(x) \in \text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}),$$

które kanonicznie określa  $\mathbb{R}$ -liniowe odwzorowanie

$$D_{\mathcal{V}} : C^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^M : f \longmapsto (M \ni x \longmapsto \mathcal{V}(x)(f) \in \mathbb{R}),$$

zwane **różniczkowaniem wzdłuż** (lub **w kierunku**)  $\mathcal{V}$ . Dla dowolnego  $l < k$  pole wektorowe  $\mathcal{V}$  nazywamy **różniczkowalnym klasy  $C^l$  na zbiorze** (otwartym)  $S \subseteq M$ , jeśli dla dowolnej lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{x^n}$  na otoczeniu  $\mathcal{O}$  dowolnego punktu  $x \in S$  odwzorowania  $D_{\mathcal{V}} x^i$ ,  $i \in \overline{1, n}$  są funkcjami różniczkowalnymi klasy  $C^l$  na  $\mathcal{O} \cap S$ . Zbiór pól wektorowych klasy  $C^l$  na  $M$ , wyposażony w naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem  $C^l(M, \mathbb{R})$ , oznaczamy symbolami

$$\mathfrak{X}^l(M) \equiv \Gamma^l(\mathbb{T}M),$$

dla przypadku<sup>4</sup>  $l = k$  rezerwując symbole

$$\mathfrak{X}(M) \equiv \Gamma(\mathbb{T}M).$$

Jedną z fundamentalnych operacji na polach wektorowych, z jakich przyjdzie nam korzystać w dalszej części kursu, jest ich transport stycznościowy wzdłuż dyfeomorfizmów. Opisujemy go w

**Definicja 8.** Przyjmijmy zapis Def. 7 oraz dowodu Tw. 3 i niechaj  $F : M_1 \longrightarrow M_2$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^{r+1}$  między  $C^k$ -rozmaitościami ( $k > r$ )  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . **Pchnięcie (stycznościowe) pola wektorowego** na  $M_1$  wzdłuż dyfeomorfizmu  $F$  to odwzorowanie

$$F_* : \mathfrak{X}^l(M_1) \longrightarrow \mathfrak{X}^{\min(l, r)}(M_2) : \mathcal{V} \longmapsto F_*^{F^{-1}(\cdot)}(\mathcal{V} \circ F^{-1}(\cdot)).$$

<sup>4</sup>Nie ma sensu rozważać pól wektorowych o klasie gładkości  $C^l$ ,  $l > k$  na rozmaitości klasy  $C^k$ .

**Uwaga 5.** Warto wypisać jawną postać lokalną pola pchniętego, używając do tego lokalnych map:  $\kappa_2 \equiv (y^1, y^2, \dots, y^{n_2}) : \mathcal{O}_2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_2})$ ,  $n_2 = \dim M_2$  na otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_2 \ni F(m)$  oraz  $\kappa_1 \equiv (x^1, x^2, \dots, x^{n_1}) : \mathcal{O}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_1})$ ,  $n_1 = \dim M_1$  na otoczeniu otwartym  $\mathcal{O}_1 \ni m$ . Przywoławszy definicję pchnięcia różniczkowania (w punkcie) z dowodu Tw. 3, otrzymujemy – dla dowolnych  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(M_1)$  oraz  $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$  –

$$\begin{aligned} (F_*\mathcal{V})(F(m))(f) &\equiv F_*^m(\mathcal{V}(m))(f) = \mathcal{V}(m)(f \circ F) \\ &= \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(f \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)) \\ &= \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(f \circ \kappa_2^{-1})}{\partial y^a}(\kappa_2(m)) \frac{\partial(y^a \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)), \end{aligned}$$

czyli

$$(F_*\mathcal{V})(F(m))(y^a) = \mathcal{V}(m)(x^i) \frac{\partial(y^a \circ F \circ \kappa_1^{-1})}{\partial x^i}(\kappa_1(m)),$$

co dowodnie pokazuje, że pchnięcie pola wektorowego stanowi naturalną adaptację odwzorowania stycznego (którego elementy macierzowe w naturalnej bazie współrzędniowej odnajdujemy po prawej stronie powyższej formuły). Odtąd będziemy (często) wymiennie stosować oba zapisy, dokonując *implicite* utożsamienia  $\text{Der}_x C^1(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{T}_x M$ . Wymóg bijektywności  $F$  staje się oczywisty, kiedy przypomnimy sobie, że obrazem pola wektorowego ma być gładki rozkład nad *całą* przeciwdziedziną  $F$  (stąd potrzeba surjektywności) *jednoznacznie* określonych w każdym punkcie (stąd potrzeba injektywności) różniczkowań  $C^1(M_2; \mathbb{R})$ .

Jedną z podstawowych, a nader użytecznych własności operacji pchnięcia pola wektorowego opisuje

**Stwierdzenie 10.** Przyjmijmy zapis Def. 8 i i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  oraz  $G : M_2 \rightarrow M_3$  będą odwzorowaniami klasy  $C^1$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Zachodzi tożsamość

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

*Dowód:* Wynika wprost z definicji pchnięcia pola wektorowego. □

Przedstawiony tu analityczny schemat konstrukcji pól wektorowych na rozmaitości pozwala bez trudu zidentyfikować nader istotną dodatkową strukturę na  $\mathfrak{X}(M)$ , o której mówi

**Definicja 9.** Przyjmijmy zapis Def. 7. **Komutator pól wektorowych** to odwzorowanie dwuliniowe skońcnie symetryczne

$$[\cdot, \cdot]_M : \mathfrak{X}^1(M) \times \mathfrak{X}^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}^0(M)$$

określone (jednoznacznie) przez warunek

$$\forall \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}^1(M) : D_{[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M} = D_{\mathcal{V}_1} \circ D_{\mathcal{V}_2} - D_{\mathcal{V}_2} \circ D_{\mathcal{V}_1}.$$

Parę

$$(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]_M)$$

określamy mianem **algebry pól wektorowych na  $M$** .

**Uwaga 6.** O sensowności powyższej definicji najłatwiej przekonać się w bezpośrednim rachunku przeprowadzonym na dziedzinie  $\mathcal{O} \ni m$  lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = \dim M$ , w której to nawias pól  $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^1(M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o odnośnych wartościach  $\mathcal{V}_\alpha(m) = \mathcal{V}_\alpha^i(m) \frac{\partial}{\partial x^i}(m)$ ,  $\mathcal{V}_\alpha^i(m) \equiv \mathcal{V}_\alpha(m)(x^i)$  przybiera postać

$$(9) \quad [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M(m) = \left( \mathcal{V}_1^j \circ \kappa^{-1} \frac{\partial(\mathcal{V}_2^i \circ \kappa^{-1})}{\partial x^j} - \mathcal{V}_2^j \circ \kappa^{-1} \frac{\partial(\mathcal{V}_1^i \circ \kappa^{-1})}{\partial x^j} \right) (\kappa(m)) \frac{\partial}{\partial x^i}(m).$$

Podstawową własność tej struktury, która obsadza ją w roli obiektu modelowego dla kategorii algebr Liego, nazywa

**Stwierdzenie 11.** Przyjmijmy zapis Def. 9. Odwzorowanie trójliniowe

$$\begin{aligned} \text{Jac}_M & : \mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}^2(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^0(M) \\ & : (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3) \longmapsto [[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_M, \mathcal{V}_3]_M + [[\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_1]_M, \mathcal{V}_2]_M + [[\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3]_M, \mathcal{V}_1]_M, \end{aligned}$$

zwane **jakobiatorom pól wektorowych** na  $M$ , jest tożsamościowo równe zeru.

*Dowód:* Trywialny rachunek bezpośredni w (dowolnej) prezentacji lokalnej. □

O naturalności wskazanej przez nas dodatkowej struktury algebraicznej w kategorii różniczkowalnych zaświadczają

**Stwierdzenie 12.** Przyjmijmy zapis Def. 8 oraz 9 i niechaj  $F : M_1 \longrightarrow M_2$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^{r+1}$  między  $C^k$ -rozmaitościami ( $k > r > 0$ )  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Wówczas zachodzi tożsamość

$$[\cdot, \cdot]_{M_2} \circ (F_* \times F_*) = F_* \circ [\cdot, \cdot]_{M_1}.$$

*Dowód:* Sprawdzamy prawdziwość postulowanej formuły lokalnie w otoczeniu punktów  $F(m) \in M_2$  i  $m \in M_1$ , stosując notację jak w treści Uwagi 5, oznaczając  $F_1 \equiv F \circ \kappa_1^{-1}$  oraz  $f_2 \equiv f \circ \kappa_2^{-1}$  dla skrótu i przywołując po drodze Równ. 9. Niechaj  $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$  i  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathfrak{X}^1(M_1)$ , a wtedy

$$\begin{aligned} & [F_* \mathcal{V}_1, F_* \mathcal{V}_2]_{M_2}(F(m))(f) \\ &= [\mathcal{V}_1^k(m) \frac{\partial(y^j \circ F_1)}{\partial x^k}(\kappa_1(m)) \frac{\partial}{\partial y^j}(\mathcal{V}_2^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m)) \\ & \quad - \mathcal{V}_2^k(m) \frac{\partial(y^j \circ F_1)}{\partial x^k}(\kappa_1(m)) \frac{\partial}{\partial y^j}(\mathcal{V}_1^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m))] \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\ &= [\mathcal{V}_1^k(m) \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{V}_2^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m)) \\ & \quad - \mathcal{V}_2^k(m) \frac{\partial}{\partial x^k}(\mathcal{V}_1^l \circ \kappa_1^{-1}(\cdot) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\cdot))(\kappa_1(m))] \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\ &= [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1}(m)(x^l) \frac{\partial(y^i \circ F_1)}{\partial x^i}(\kappa_1(m)) \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \\ &\equiv (F_*[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1})(F(m))(y^i) \frac{\partial f_2}{\partial y^i}(\kappa_2 \circ F(m)) \equiv (F_*[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_{M_1})(F(m))(f) \end{aligned}$$

□

**Uwaga 7.** W antycypacji dyskusji geometrii grup Liego, możemy zwięźle zreasumować powyższą dyskusję, jak następuje: przypisanie rozmaitościom różniczkowalnym przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych pól wektorowych na nich, wraz z komutatorem pól wektorowych, a dyfeomorfizmom pomiędzy rozmaitościami – odnośnych pchnięć stycznościowych pól wektorowych to składowe – odpowiednio – obiektowa i morfizmowa funktora (kowariantnego) z (ograniczonej) kategorii rozmaitości różniczkowalnych z dyfeomorfizmami jako morfizmami w kategorię rzeczywistych algebr Liego z izomorfizmami jako morfizmami.

Okazuje się, że transport nawiasu pól wektorowych jest możliwy w dużo ogólniejszej sytuacji, z którą będziemy mieli do czynienia w dalszej części kursu, a którą opisuje poniższa

**Definicja 10.** Przyjmijmy zapis Def. 7 oraz dowodu Tw. 3 i niechaj  $F : M_1 \longrightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^1$  między rozmaitościami  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  klasy  $C^{k_\alpha}$ ,  $k_\alpha \geq 1$ . Powiemy, że **para  $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$  pól wektorowych**  $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^{l_\alpha}(M_\alpha)$ ,  $l_\alpha \leq k_\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  jest w **relacji określonej przez odwzorowanie różniczkowalne**  $F$ , jeśli zachodzi tożsamość

$$F_*^{(\cdot)} \mathcal{V}_1(\cdot) = \mathcal{V}_2 \circ F.$$

W opisanej tu sytuacji słusznym jest

**Stwierdzenie 13.** Przyjmijmy zapis Def.9 oraz 10. Dla dowolnych dwóch par:  $(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_2)$  i  $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$  pól wektorowych (klasy  $C^1$ ) w relacji określonej przez odwzorowanie  $F \in C^2(M_1, M_2)$  między  $C^2$ -rozmaitościami para pól wektorowych  $([\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}, [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2})$  również jest w takowej relacji, tj. zachodzi tożsamość

$$F_*^{(\cdot)}[\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(\cdot) = [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2} \circ F.$$

*Dowód:* Zaczniemy od wyprowadzenia, w dowolnym punkcie  $x \in M_1$  i dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(M_2; \mathbb{R})$ , równości

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F)(x) &\equiv \mathcal{V}_1(x)(f \circ F) = F_*^x \mathcal{V}_1(x)(f) = (\mathcal{V}_2 \circ F)(x)(f) \equiv D_{\mathcal{V}_2}f(F(x)) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}f) \circ F(x), \end{aligned}$$

czyli tożsamości funkcjonalnej

$$D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F) = (D_{\mathcal{V}_2}f) \circ F,$$

i analogicznej tożsamości dla drugiej pary pól w relacji,

$$D_{\mathcal{W}_1}(f \circ F) = (D_{\mathcal{W}_2}f) \circ F.$$

Na ich podstawie obliczamy (rekursywnie), tym razem dla  $f \in C^2(M_2; \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} F_*^x[\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(x)(f) &\equiv [\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1]_{M_1}(x)(f \circ F) \\ &= D_{\mathcal{V}_1}(D_{\mathcal{W}_1}(f \circ F))(x) - D_{\mathcal{W}_1}(D_{\mathcal{V}_1}(f \circ F))(x) \\ &= D_{\mathcal{V}_1}((D_{\mathcal{W}_2}f) \circ F)(x) - D_{\mathcal{W}_1}((D_{\mathcal{V}_2}f) \circ F)(x) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}(D_{\mathcal{W}_2}f)) \circ F(x) - (D_{\mathcal{W}_2}(D_{\mathcal{V}_2}f)) \circ F(x) \\ &= (D_{\mathcal{V}_2}(D_{\mathcal{W}_2}f) - D_{\mathcal{W}_2}(D_{\mathcal{V}_2}f))(F(x)) \\ &\equiv [\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2}(F(x))(f) \equiv ([\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2]_{M_2} \circ F)(x)(f), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Z polami wektorowymi możemy w naturalny sposób stowarzyszać 1-wymiarowe podrozmaitości w ich nośniku, o czym mówi

**Definicja 11.** Przyjmijmy oznaczenia Def.7 oraz Przykł.3 (1). Ustalmy (dowolnie)  $l \leq k \in \mathbb{N}^*$  oraz  $a < b \in \mathbb{R}$  i niechaj  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  będzie **zwartą ścieżką różniczkowalną klasy  $C^l$  w  $M$** , tj. ograniczeniem pewnego  $C^l$ -odwzorowania  $\tilde{\gamma} : \mathcal{U} \rightarrow M$  określonego na otwartym podziorze  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R})$  zawierającym  $[a, b]$ . **Wektorem stycznym do  $\gamma$  (klasy  $C^1$ ) w  $\gamma(t_*)$ ,  $t_* \in ]a, b[$  nazywamy różniczkowanie w  $\gamma(t_*)$  dane wzorem**

$$\dot{\gamma}(t_*) : C^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_*).$$

Niechaj teraz  $\mathcal{V} \in \text{Der } C^1(M, \mathbb{R})$  będzie polem wektorowym na  $M$ . Ścieżkę  $\gamma$  określimy mianem **krzywej całkowej** (lub **trajektorii**)  $\mathcal{V}$ , jeśli spełnia warunek

$$(10) \quad \forall t \in ]a, b[ : \dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)).$$

Mamy proste, acz istotne

**Stwierdzenie 14.** Przyjmijmy oznaczenia Def.11 i niechaj  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^1(M)$ . Przez dowolny punkt  $x_* \in M$  przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa  $\gamma_{x_*} : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ , zdefiniowana dla pewnego  $\varepsilon > 0$ , spełniająca warunek początkowy  $\gamma_{x_*}(0) = x_*$ . Przy tym jeśli  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(M)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , to krzywa ta jest klasy  $C^{\min(l+1, k)}$ .

*Dowód:* W lokalnym układzie współrzędnych  $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ ,  $n = \dim M$  na pewnym otoczeniu  $\mathcal{O} \ni x_*$  krzywa całkowa pola  $\mathcal{V}$  przechodząca przez  $x_*$  jest (lokalnie) prezentowana przez odwzorowanie  $(\gamma_{x_*}^i \equiv x^i \circ \gamma_{x_*}) \in C([- \varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^{\times n})$  będące rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{x_*}^i}{dt}(t) &\equiv \frac{d(x^i \circ \gamma_{x_*})}{dt}(t) \equiv \dot{\gamma}_{x_*}(t)(x^i) = \mathcal{V}(\gamma_{x_*}(t))(x^i) \equiv D_{\mathcal{V}}(x^i)(\gamma_{x_*}(t)), \\ \gamma_{x_*}^i(0) &= x^i(x_*), \quad i \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Wobec lokalnej lipschitzowskości odwzorowań  $D_{\mathcal{V}}(x^i)$  (tj. ich lipschitzowskości na zwartych podzbiórach dziedziny, wynikającej z ich ciągłej różniczkowalności, por. Stw.61), Tw.18 przesądza o lokalnym istnieniu jedynego rozwiązania powyższego zagadnienia, co wobec homeomorficzności lokalnego układu współrzędnych kończy dowód stwierdzenia. Stwierdzenie dotyczące klasy różniczkowalności  $\gamma_{x_*}$  jest oczywistą konsekwencją Tw.23 oraz struktury zagadnienia początkowego. Istotnie, w dowodzie rzeczonego twierdzenia, w którym stopień gładkości  $l$  zależności potoku (zagadnienia autonomicznego, z jakim mamy tutaj do czynienia) od *obu* zmiennych został wyznaczony w jednym kroku, bez rozdzielania tych zmiennych. Przywoławszy rekursywny argument z tegoż dowodu do definiującego potok Równ. (10), stwierdzamy, że gładkość klasy  $C^l$  zależności krzywej całkowej od czasu  $t$  oznacza (wobec tego samego stopnia gładkości pola wektorowego), że  $\dot{\gamma}_{x_*}$  jest klasy  $C^l$ , zatem ostatecznie  $\gamma_{x_*}$  jest klasy  $C^{\min(l+1, k)}$  (ograniczenie górne  $k$  na stopień gładkości ścieżek w  $M$  wynika z założenia o stopniu gładkości transformacji współrzędniowych na  $M$ ). Jest przy tym oczywistym, że stopień gładkości  $\mathcal{V}$  nie pozwala poprowadzić przedstawionego tu argumentu dalej.  $\square$

Ostatnie stwierdzenie pozwala nam wprowadzić przydatne pojęcie globalne:

**Definicja 12.** Przyjmijmy oznaczenia Def.11 oraz Tw.21 i niechaj dla dowolnego  $x \in M$  przedział otwarty  $I_{\mathcal{V}}(x) \subset \mathbb{R}$  będzie maksymalnym, w rozumieniu Stw.20, dla którego jest określone jednoznacznie rozwiązanie  $\gamma_x$  zagadnienia początkowego dla pola wektorowego  $\mathcal{V}$  (klasy  $C^l$ ,  $l \leq k$ ) zdefiniowanego w treści Stw.14. Zdefiniujmy **dziedzinę całkowalności pola wektorowego  $\mathcal{V}$**

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}} := \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_{\mathcal{V}}(x) \} \equiv \bigsqcup_{x \in M} I_{\mathcal{V}}(x),$$

por. Równ. (41). **Potok pola wektorowego  $\mathcal{V}$**  to odwzorowanie

$$\Phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \longrightarrow M : (t, x) \longmapsto \gamma_x(t) \equiv \Phi_{\mathcal{V}}(t, x),$$

które w zgodzie z Tw.23 i Stw.14 jest klasy  $C^{\min(l+1, k)}$  w pierwszym i klasy  $C^l$  w drugim argumentcie.

Pole wektorowe o dziedzinie całkowalności  $\mathcal{D}_{\mathcal{V}} = \mathbb{R} \times M$  nazywamy **zupelnym**.

Zwieńczeniem naszych dotychczasowych wysiłków zmierzających do możliwie precyzyjnego zrozumienia zależności między stopniem gładkości pola wektorowego i stopniem gładkości jego potoku, dokumentującym – *a posteriori* – zapowiadaną wcześniej fundamentalną rolę pól wektorowych w (lokalnym) opisie symetrii struktur różniczkowych i tym samym wskazującym kontekst ich przyszłego zastosowania w dyskusji problemów umotywowanych fizykalnie, jest relacja między polami wektorowymi a (lokalnymi) grupami (lokalnych) dyfeomorfizmów na rozmaitościach różniczkowalnych, którą bez trudu wywiedziemy z wcześniejszych dociekań w odwołaniu do poniższej

**Definicja 13.** Przyjmijmy zapis Def.1 i ustalmy  $l \leq k \in \mathbb{N}^{\times}$  oraz  $\varepsilon > 0$ , a następnie oznaczmy  $I_{\varepsilon} := ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R}$ . **Lokalna jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  na zbiorze  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M)$**  o skali  $\varepsilon$  to rodzina

$$\text{Diff}_{\mathcal{O}; \varepsilon}^l(M) := \{ \mathcal{G} : I_{\varepsilon} \times \mathcal{O} \longrightarrow M \} \subset C^l(I_{\varepsilon} \times \mathcal{O}; M),$$

indeksowana przez przedział otwarty  $I_{\varepsilon}$ , odwzorowań spełniających następujące aksjomaty

- (LD1)  $\forall t \in I_{\varepsilon} : \mathcal{G}_t \in \text{Diff}^l(\mathcal{O}, \mathcal{G}_t(\mathcal{O}))$ ;
- (LD2)  $\mathcal{G}_0 = \text{id}_{\mathcal{O}}$ ;



$$(LD3) \quad \forall_{t_1, t_2 \in I_\varepsilon, x \in \mathcal{O}} : \left( (t_1 + t_2 \in I_\varepsilon \wedge \mathcal{G}_{t_1}(x) \in \mathcal{O}) \implies \mathcal{G}_{t_2+t_1}(x) = \mathcal{G}_{t_2} \circ \mathcal{G}_{t_1}(x) \right).$$

W przypadku  $\varepsilon \rightarrow \infty$  mówimy o **jednoparametrowej grupie lokalnych dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  na zbiorze  $\mathcal{O}$** , a w przypadku  $\mathcal{O} = M$  – o **lokalnej jednoparametrowej grupie dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  rozmaitości  $M$** . Wreszcie ilekroć  $\varepsilon \rightarrow \infty$  i  $\mathcal{O} = M$ , używamy określenia **jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów klasy  $C^l$** .

**Uwaga 8.** Powyższa definicja wymaga kilku słów komentarza. Po pierwsze zauważmy, że aksjomat (LD3) ma charakter konstruktywny (tj. zawsze istnieją nietrywialne dyfeomorfizmy  $\mathcal{G}_{t_2}, \mathcal{G}_{t_1}$ ,  $t_1, t_2 \neq 0$ , które można składać), gdyż wobec założonej ciągłości  $\mathcal{G}$  istnieją nietrywialne dyfeomorfizmy dowolnie bliskie  $\text{id}_{\mathcal{O}}$ , a przy tym wobec otwartości  $\mathcal{O}$  każdy punkt poddawany przekształceniu należy do  $\mathcal{O}$  wraz z pewnym swoim otwartym otoczeniem, można więc zawsze tak dobrać  $t \in I_\varepsilon$ , aby obraz tego punktu pozostawał w rzeczonym otoczeniu. Po drugie godzi się podkreślić, że mamy tu do czynienia ze wspomnianą wcześniej „świniką morską”, gdyż poza przypadkiem  $\varepsilon \rightarrow \infty$  i  $\mathcal{O} = M$  superpozycja odwzorowań nie zadaje na  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$  struktury grupy (z odwrotnością  $\mathcal{G}_t \mapsto \mathcal{G}_{-t}$  i jednością  $\mathcal{G}_0$ ). Napotkaną tu strukturę określa się czasem mianem **grupy częściowej**. I wreszcie w przypadku  $\mathcal{O} = M$  aksjomat (LD1) jest konsekwencją dwóch pozostałych, oto bowiem  $t \in I_\varepsilon$  implikuje  $-t \in I_\varepsilon$  oraz  $\mathcal{G}_t(\mathcal{O}), \mathcal{G}_{-t}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ , możemy przeto obliczyć

$$\mathcal{G}_t \circ \mathcal{G}_{-t} = \mathcal{G}_{t+(-t)} = \mathcal{G}_0 = \text{id}_M$$

oraz

$$\mathcal{G}_{-t} \circ \mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{-t+t} = \mathcal{G}_0 = \text{id}_M,$$

skąd wniosek, że

$$\mathcal{G}_{-t} = \mathcal{G}_t^{-1}.$$

Możemy już teraz wypowiedzieć kluczowe

**Twierdzenie 4.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 7 i 13 oraz dowodu Tw. 3. Każda lokalna jednoparametrowa grupa lokalnych dyfeomorfizmów  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$  klasy  $C^l$  na dowolnym podzbiorze otwartym  $\mathcal{O} \subseteq M$   $C^k$ -rozmaitości ( $k \geq l$ )  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  indukuje pole wektorowe klasy  $C^{l-1}$  na  $\mathcal{O}$ , którego krzywymi całkowymi są orbity grupy, przy czym zaindukowane pole jest **lokalnie  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$ -niezmiennicze**, tj. spełnia warunek

$$(11) \quad \forall_{s \in I_\varepsilon, x \in \mathcal{O}} : \left( \mathcal{G}_s(x) \in \mathcal{O} \implies \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_s(x)) = \mathcal{G}_{s*}(\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)) \right).$$

I odwrotnie, niechaj  $\mathcal{V}$  będzie dowolnym (lokalnym) polem wektorowym klasy  $C^l$  na dowolnym podzbiorze otwartym  $\mathcal{U} \subseteq M$ . W dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{U}$  z polem  $\mathcal{V}$  można stowarzyszyć lokalną jednoparametrową grupę lokalnych dyfeomorfizmów  $\text{Diff}_{\mathcal{O}_x;\varepsilon_x}^l(M)$  na pewnym otwartym otoczeniu  $\mathcal{O}_x \ni x$ , która indukuje to pole.

*Dowód:* Rozważmy lokalną jednoparametrową grupę  $\text{Diff}_{\mathcal{O};\varepsilon}^l(M)$  lokalnych dyfeomorfizmów klasy  $C^l$  na zbiorze otwartym  $\mathcal{O} \subset M$ . Określa ona (lokalne) pole wektorowe

$$\mathcal{V}_{\mathcal{G}} : \mathcal{O} \longrightarrow \text{Der } C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) : x \longmapsto \left( C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(x) \in \mathbb{R} \right).$$

Istotnie, przyporządkowanie

$$C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(x) \in \mathbb{R}$$

jest jawnie  $\mathbb{R}$ -liniowe, a nadto dla dowolnych  $f, g \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(f \cdot g) &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{G}_t(x) \cdot g \circ \mathcal{G}_t(x)) \\ &= \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (f \circ \mathcal{G}_t(x)) \cdot g \circ \mathcal{G}_0(x) + f \circ \mathcal{G}_0(x) \cdot \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} (g \circ \mathcal{G}_t(x)) \\ &= \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(g), \end{aligned}$$

czyli spełniony jest warunek Leibniza. W celu wyznaczenia klasy gładkości  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  różniczkujemy w jego kierunku składową  $\kappa^i$  dowolnej lokalnej mapy  $\kappa : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n}$  na otoczeniu  $\mathcal{U}$  punktu  $x$ ,

$$D_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}} \kappa^i \equiv \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(\kappa^i) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} \kappa^i \circ \mathcal{G}_t(x).$$

Zależność argumentu odwzorowania  $\kappa^i$  klasy  $C^k$  od pary  $(t, x)$  jest na mocy założenia klasy  $C^l$ ,  $l \leq k$ , przeto  $D_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}}\kappa^i$ , czyli także (wprost z definicji)  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ , jest klasy  $C^{l-1}$ . W następnej kolejności przekonujemy się, że dla dowolnego punktu  $x \in \mathcal{O}$  przechodząca przez  $x$  ścieżka  $\gamma_x : I_\varepsilon \rightarrow M : t \mapsto \mathcal{G}_t(x)$  jest krzywą całkową  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ . Istotnie, dla dowolnej funkcji  $f \in C^1(\mathcal{O}; \mathbb{R})$  obliczamy (na gruncie Def. 11 i 13)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x(s)(f) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=s} f \circ \gamma_x(t) \equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=s} f \circ \mathcal{G}_t(x) = \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_{u+s}(x) \\ &= \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_u(\mathcal{G}_s(x)) \equiv \frac{d}{du} \upharpoonright_{u=0} f \circ \mathcal{G}_u(\gamma_x(s)) \equiv \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\gamma_x(s))(f), \end{aligned}$$

a stąd – wobec dowolności  $f$  – wynika już pożądana relacja

$$\dot{\gamma}_x(s) = \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\gamma_x(s)).$$

Na koniec sprawdzamy słuszność relacji (11). Poczynione założenia pozwalają skorzystać z aksjomatu (LD3), co daje

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_s(x))(f) &\equiv \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_t(\mathcal{G}_s(x)) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_{t+s}(x) = \frac{d}{dt} \upharpoonright_{t=0} f \circ \mathcal{G}_s \circ \mathcal{G}_t(x) \\ &= \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(f \circ \mathcal{G}_s) \equiv \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)(\mathcal{G}_s^* f) \equiv (\mathcal{G}_s^* (\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(x)))(f). \end{aligned}$$

Odwracając tok poprzedniego rozumowania, rozważmy dowolne lokalne pole wektorowe  $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}^l(\mathcal{O})$ . Wybrawszy (dowolnie) punkt  $x \in \mathcal{O}$  oraz lokalną mapę  $\kappa = (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  na pewnym jego otoczeniu  $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$ , wnioskujemy na gruncie Tw. 18, że na dowolnym zwartym podzbiorniku  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_x$  zawierającym  $x$  możemy globalnie określić stałą  $\varepsilon_{\mathcal{K}} > 0$  o tej własności, że dla dowolnego  $y \in \mathcal{K}$  zagadnienie początkowe

$$\dot{\gamma}_y(t) = \mathcal{V}(\gamma_y(t)), \quad \gamma_y(0) = y$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, o ile  $t \in ]-\varepsilon_{\mathcal{K}}, \varepsilon_{\mathcal{K}}[ =: I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}}$ , przy czym zależność owego rozwiązania od danej początkowej  $y \in \mathcal{K}$  jest klasy  $C^l$ . Tym samym otrzymujemy (ograniczony) potok  $\Phi_{\mathcal{V}} \upharpoonright_{I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}} \times \mathcal{K}}$  pola  $\mathcal{V}$  na  $I_{\varepsilon_{\mathcal{K}}} \times \mathcal{K}$  klasy  $C^l$ . Ponadto wobec ciągłości potoku oraz jego (współdefiniującej) własności

$$\Phi_{\mathcal{V}}(0, \cdot) = \text{id}_{\mathcal{K}}$$

możemy zawsze dobrać  $\varepsilon_x \leq \varepsilon_{\mathcal{K}}$  oraz podzbiór otwarty  $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{K}$  będący otoczeniem punktu  $x$  tak, by był spełniony warunek

$$(12) \quad \forall (t, y) \in I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x : \Phi_{\mathcal{V}}(t, y) \in \mathcal{K}.$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$\mathcal{G}^{\mathcal{V}} := \Phi_{\mathcal{V}} \upharpoonright_{I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x} : I_{\varepsilon_x} \times \mathcal{O}_x \rightarrow M : (t, y) \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t, y) \equiv \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}(y).$$

Warunek (12) pozwala rozważać złożenia  $\mathcal{G}_s^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}$  dla  $s, t \in I_{\varepsilon_x}$ . Zdefiniujmy ścieżkę (różniczkowalną klasy  $C^l$ )

$$\Gamma_{y;s} : I_{\varepsilon_x} \rightarrow M : t \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t + s, y).$$

Bez trudu sprawdzamy w bezpośrednim rachunku

$$\dot{\Gamma}_{y;s}(t) \equiv \frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{V}}(t + s, y) = \frac{d}{d\xi} \upharpoonright_{\xi=t+s} \Phi_{\mathcal{V}}(\xi, y) = \mathcal{V}(\Phi(t + s, y)) \equiv \mathcal{V}(\Gamma_{y;s}(t)),$$

że ścieżka ta jest krzywą całkową  $\mathcal{V}$  wychodzącą z punktu

$$\Gamma_{y;s}(0) = \Psi(s, y).$$

Ale krzywą taką jest także – wprost z definicji –

$$\gamma_{\Psi(s, y)} : I_{\varepsilon_x} \rightarrow M : t \mapsto \Phi_{\mathcal{V}}(t, \Phi_{\mathcal{V}}(s, y)),$$

co w świetle jednoznaczności rozwiązania rozważanego tu zagadnienia początkowego oznacza równość

$$(13) \quad \forall t \in I_{\varepsilon_x} : \Phi_{\mathcal{V}}(t + s, y) \equiv \Gamma_{y;s}(t) = \gamma_{\Psi(s, y)}(t) \equiv \Phi_{\mathcal{V}}(t, \Phi_{\mathcal{V}}(s, y)),$$

którą możemy przepisać w terminach odwzorowań  $\mathcal{G}^{\mathcal{V}}$  w znajomej postaci

$$\forall t \in I_{\varepsilon_x} : \mathcal{G}_{t+s}^{\mathcal{V}}(y) = \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_s^{\mathcal{V}}(y).$$

W szczególności dla  $s = -t$  (co jest wyborem dozwolonym wobec symetryczności  $I_{\varepsilon_x}$  względem 0) zachodzi

$$\forall t \in I_{\varepsilon_x} : \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_{-t}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{t+(-t)}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_0^{\mathcal{V}} = \text{id}_{\mathcal{O}_x} \equiv \mathcal{G}_0^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{-t+t}^{\mathcal{V}} = \mathcal{G}_{-t}^{\mathcal{V}} \circ \mathcal{G}_t^{\mathcal{V}},$$

to zaś każe nam skonstatować, że każde z odwzorowań  $\mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}$ ,  $t \in I_{\varepsilon_x}$  jest dyfeomorfizmem  $\mathcal{O}_x$  na odnośny obraz  $\mathcal{G}_t^{\mathcal{V}}(\mathcal{O}_x) \subset \mathcal{K}$ . Na koniec zauważamy, że  $\mathcal{G}^{\mathcal{V}}$  w oczywisty sposób indukuje pole  $\mathcal{V}$  według opisanego wcześniej schematu, i tym samym kończymy dowód.  $\square$

Powyższe twierdzenie, które nadaje głębszy geometryczny sens założeniu o gładkości rozkładu wektorów w wiązce stycznej nad rozmaitością, znajduje istotne zastosowania w analizie geometrii grup Liego, jak również w studiach nad symetrami modeli fizykalnych.

Tymczasem teraz dokonamy przetransponowania przedstawionego tu punktu widzenia na pojęcie gładkości (równoważnego innym, nierzadko wymagającym dostrzeżenia wyższej struktury różniczkowo-geometrycznej na rozmaitości  $\text{T}M$ ) na odwzorowania z  $M$  w wiązki  $p$ -form różniczkowych, wprowadzone w Def. 4. Podążając tym tropem napotykamy

**Definicja 14.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 4 i 5. **Pole  $p$ -form** na  $C^k$ -rozmaitości  $(M, \widehat{\mathcal{A}})$  wymiaru  $n := \dim M \geq p$  to przyporządkowanie

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge^p \text{T}^*M : x \longmapsto \omega(x) \in \left( \bigwedge^p \text{T}^*M \right)_x,$$

które kanonicznie określa  $p$ -liniowe odwzorowanie alternujące

$$\begin{aligned} \langle \omega, \rangle & : \times_{i=1}^p \mathfrak{X}^l(M) \longrightarrow \mathbb{R}^M \\ & : (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_p) \longmapsto \left( M \ni x \longmapsto \omega(x)(\mathcal{V}_1(x), \mathcal{V}_2(x), \dots, \mathcal{V}_p(x)) \in \mathbb{R} \right), \end{aligned}$$

zwane **ewaluacją pola  $p$ -form** na polach wektorowych  $\mathcal{V}_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$ . Na oznaczenie ewaluacji, także w punkcie, będziemy także (wymienne) używać symboli

$$\langle \omega, (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle \equiv \mathcal{V}_p \lrcorner \mathcal{V}_{p-1} \lrcorner \dots \lrcorner \mathcal{V}_1 \lrcorner \omega \equiv \iota_{\mathcal{V}_p} \iota_{\mathcal{V}_{p-1}} \dots \iota_{\mathcal{V}_1} \omega.$$

Dla dowolnego  $l < k$  pole  $p$ -form  $\omega$  nazywamy **różniczkowalnym klasy  $C^l$  na zbiorze** (otwartym)  $S \subseteq M$ , jeśli dla dowolnej lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  na otoczeniu  $\mathcal{O}$  dowolnego punktu  $x \in S$  zdefiniowane powyżej odwzorowania  $\langle \omega, (\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}) \rangle$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$  są funkcjami różniczkowalnymi klasy  $C^l$  na  $\mathcal{O} \cap S$ . Zbiór pól  $p$ -form klasy  $C^l$  na  $M$ , wyposażony w naturalną (punktową) strukturę modułu nad pierścieniem  $C^l(M, \mathbb{R})$ , oznaczamy symbolami

$$\Omega_{(l)}^p(M) \equiv \Gamma^l(\bigwedge^p \text{T}^*M),$$

dla przypadku  $l = k$  rezerwując symbole

$$\Omega^p(M) \equiv \Gamma(\bigwedge^p \text{T}^*M).$$

Na potrzeby przyszłych naszych rozważań wprowadzamy także oznaczenia

$$\Omega_{(l)}^0(M) \equiv C^l(M, \mathbb{R}),$$

oraz

$$\Omega^0(M) \equiv C^k(M, \mathbb{R}).$$

Moduł

$$\Omega_{(l)}^{\bullet}(M) := \bigoplus_{p=0}^n \Omega_{(l)}^p(M)$$

nad pierścieniem  $C^l(M, \mathbb{R})$  nazywamy **modułem form różniczkowych** klasy  $C^l$  na  $M$ . W przypadku  $l = \infty$  stosujemy zapis

$$\Omega^{\bullet}(M) \equiv \Omega_{(\infty)}^{\bullet}(M).$$

Moduł form różniczkowych na rozmaitości jest wyposażony w naturalną dodatkową strukturę algebraiczną. Poniżej przypominamy ją w sposób dopasowany do jej konkretnych standardowych zastosowań praktycznych. Już niebawem poddamy ją formalizacji, która pozwoli na rozszerzenie zakresu zastosowań i zarazem umieści formy różniczkowe w szerszym kontekście algebraicznym. Zaczynamy od określenia naturalnego mnożenia na przestrzeni form, stanowiącego prostą geometryzację wprowadzonej wcześniej operacji dwuliniowej na formach wieloliniowych alternujących.

**Definicja 15.** Przyjmijmy zapis Def. 14. **Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych** to odwzorowanie dwu- $C^l(M, \mathbb{R})$ -liniowe

$$\wedge : \Omega_{(l)}^\bullet(M) \times \Omega_{(l)}^\bullet(M) \longrightarrow \Omega_{(l)}^\bullet(M)$$

o ograniczeniach – określonych dla dowolnych  $p_1, p_2 \in \overline{1, n}$  –

$$\forall_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_{(l)}^{p_1}(M) \times \Omega_{(l)}^{p_2}(M)} \forall_{x \in M} : (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) := \omega_1(x) \wedge_{p_1, p_2} \omega_2(x)$$

oraz

$$\forall_{(f, \omega) \in \Omega_{(l)}^0(M) \times \Omega_{(l)}^{p_2}(M)} \forall_{x \in M} : (f \wedge \omega)(x) := f(x) \cdot \omega(x).$$

Podstawowe własności iloczynu zewnętrznego opisuje

**Stwierdzenie 15.** Przyjmijmy zapis Def. 15 i ustalmy (dowolnie)  $p_1, p_2, p_3 \in \overline{0, n}$  oraz  $\omega_\alpha \in \Omega_{(l)}^{p_\alpha}(M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ . Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych spełnia tożsamości:

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{p_1 \cdot p_2} \omega_1 \wedge \omega_2$$

oraz

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

*Dowód:* Oczywisty. □

W następnej kolejności przechodzimy do konstrukcji uwzględniających strukturę analityczną na  $M$  (więc i na  $\Omega_{(l)}^\bullet(M)$ ). Oto więc mamy

**Definicja 16.** Przyjmijmy zapis Def. 7 oraz 15 i ustalmy (dowolnie)  $l \in \mathbb{N}^\times$ . **Pochodna zewnętrzna** to jedyne odwzorowanie

$$d : \Omega_{(l)}^\bullet(M) \longrightarrow \Omega_{(l-1)}^\bullet(M)$$

spełniające aksjomaty:

(ED1)  $d$  jest  $\mathbb{R}$ -liniowe;

(ED2) w ograniczeniu do  $\Omega_{(l)}^0(M) \ni f$  jest ono określone wzorem

$$\langle df, \cdot \rangle : \mathfrak{X}^1(M) \longrightarrow C^{\min(l-1, 1)}(M, \mathbb{R}) : \mathcal{V} \longmapsto D_{\mathcal{V}}f,$$

przy czym

$$\forall_{f \in \Omega_{(l)}^0(M)} : d \circ d(f) = 0;$$

(ED3) dla dowolnych  $\omega_\alpha \in \Omega_{(l)}^{p_\alpha}(M)$ ,  $p_\alpha \in \overline{0, n}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  zachodzi tożsamość

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

**Uwaga 9.** Warto przekonać się, że powyższe warunki w istocie określają operator pochodnej zewnętrznej  $d$  w pełni jednoznacznie. Rozważmy dziedzinę dowolnej lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  na otoczeniu  $\mathcal{O}$  dowolnego punktu  $x \in \mathcal{O}$ . Jednoformy  $dx^i \in \Omega^1(\mathcal{O})$ ,  $i \in \overline{1, n}$  tworzą bazę modułu  $\Omega_{(l)}^1(\mathcal{O})$ , oto bowiem dowolną  $p$ -formę  $\omega \in \Omega_{(l)}^p(\mathcal{O})$  można przedstawić (w sposób jednoznaczny) w postaci

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

przy czym dla dowolnych  $i_k \in \overline{1, n}$ ,  $k \in \overline{1, p}$  wprowadziliśmy oznaczenie

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} := \left\langle \omega, \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right) \right\rangle \in C^l(\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

Wobec oczywistej relacji

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} = \text{sign}(\sigma) \omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(p)}}$$

możemy przepisać powyższy wzór w postaci

$$\omega \equiv \frac{1}{p!} \omega_{j_1 j_2 \dots j_p} \triangleright dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_p},$$

gdzie tym razem każdy ze wskaźników jest wysumowany niezależnie po pełnym zakresie zmienności  $\overline{1, n}$ . Na mocy przyjętej aksjomatyki, a wobec skośnej symetrii  $\omega$ , pochodna zewnętrzna  $\omega$  jest równa

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \left( d\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} + p \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge d \circ d(x^{i_1}) \right) \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \lrcorner d\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &\equiv \frac{1}{p!} D_{\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że aksjomaty nie pozostawiają w definicji pochodnej zewnętrznej  $p$ -formy żadnej niejednoznaczności w opisie lokalnym, a ponieważ schemat sklejenia opisów lokalnych pozwala w dowolnym punkcie  $x \in \mathcal{O} \cap \tilde{\mathcal{O}}$  z przecięcia dziedzin lokalnych map:  $\kappa$  jak wyżej i  $\tilde{\kappa} = (y^1, y^2, \dots, y^m) : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^{\times n}$  każę utożsamić

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) \triangleright \frac{\partial}{\partial y^j}(x), \quad dx^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(x) \triangleright dy^j(x),$$

przeto wypisana formuła lokalna, w której każdemu obiektowi  $\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$  towarzyszy obiekt  $dx^{i_k}$  podlegający dualnej transformacji liniowej przy przejściu do opisu lokalnego związanego z  $\tilde{\kappa}$ , definiuje obiekt globalny. Bez trudu wyprowadzamy też w opisie lokalnym – dla dowolnych pól  $\mathcal{V}_\alpha \in \mathfrak{X}^m(M)$ ,  $\alpha \in \overline{0, p}$ ,  $m \leq k$  –

$$\begin{aligned} \langle d\omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle &= \frac{1}{p!} D_{\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p}}} \text{sign}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{i_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{i_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{i_p} \\ &\equiv \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p D_{\mathcal{V}_k} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p}}, \sigma(0)=k} \text{sign}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{i_1} \mathcal{V}_{\sigma(2)}^{i_2} \dots \frac{\mathcal{V}_{\sigma(p)}^{i_p}}{\mathcal{V}_{\sigma(k)}^{i_k}} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{\overline{0, p} \setminus \{k\}}} \text{sign}(\rho) \mathcal{V}_{\rho(0)}^{i_0} \mathcal{V}_{\rho(1)}^{i_1} \dots \frac{\mathcal{V}_{\rho(p)}^{i_p}}{\mathcal{V}_{\rho(k)}^{i_k}} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \frac{\mathcal{V}_p^{j_p}}{\mathcal{V}_k^{j_k}} D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p}. \end{aligned}$$

Bezpośrednim następstwem aksjomatów definiujących pochodną zewnętrzną jest

**Stwierdzenie 16.** Przyjmijmy zapis Def. 16. Zachodzi tożsamość

$$d \circ d = 0.$$

*Dowód:* W świetle Uwagi 9 i w przyjętej tam notacji, a przywołując po drodze skośną symetrię iloczynu zewnętrznego, możemy zapisać – dla dowolnej  $p$ -formy  $\omega \in \Omega_{(l)}^p(M)$ ,  $l \geq 2$  –

$$\begin{aligned} d \circ d(\omega) &= \frac{1}{p!} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \circ D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} (\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}) \triangleright dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{1}{2 \cdot p!} [D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}] \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \triangleright dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \equiv 0. \end{aligned}$$

□

Przydatnej reprezentacji pochodnej zewnętrznej dostarcza poniższe

**Stwierdzenie 17.** Przyjmijmy zapis Def. 9 i 16. Pochodna zewnętrzna pola  $p$ -formy  $\omega \in \Omega_{(l)}^p(M)$  spełnia tożsamość, słuszną dla dowolnych  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p \in \mathfrak{X}^1(M)$ ,

$$\begin{aligned} \langle d\omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle &= \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \langle \omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \langle \omega, ([\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j], \mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle. \end{aligned}$$

Dowód: Rozważmy pierwszą z sum po prawej stronie dowodzonej równości,

$$S_1 := \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \langle \omega, (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p) \rangle,$$

w ograniczeniu do dziedziny  $\mathcal{O}$  lokalnej mapy  $\kappa \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Otrzymujemy wyrażenie lokalne (w zapisie Uwagi 9)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^p (-1)^k D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \right) \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} D_{\mathcal{V}_k} \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} + \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \right). \end{aligned}$$

Jej porównanie z formułą z końca Uwagi 9 sprowadza tezę dowodzonego stwierdzenia do tożsamości

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) &= \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_{0 \dots l_{i,j}}} \\ &\quad \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \text{sign}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{\sigma([j,i])}} \mathcal{V}_0^{l_{\sigma(0)}} \mathcal{V}_1^{l_{\sigma(1)}} \dots \mathcal{V}_p^{l_{\sigma(p)}}, \end{aligned}$$

w której  $\mathcal{V}_{[j,i]} = [\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_i]$ , przy czym należy zwrócić uwagę na porządek indeksów:  $j > i$ . Lewą stronę pożądaną tożsamości rozpisujemy i upraszczamy, jak następuje

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} \left( \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \left( \sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=k+1}^p \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &\quad + \sum_{k=0}^p \sum_{l=k+1}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &\quad + \sum_{l=1}^p \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &\equiv \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_k} \mathcal{V}_l^{j_l}) \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \\ &\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} (D_{\mathcal{V}_l} \mathcal{V}_k^{j_k}) \mathcal{V}_{k+1}^{j_{k+1}} \mathcal{V}_{k+2}^{j_{k+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_l \dots j_p} \mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_{l-1}^{j_{l-1}} [\mathcal{V}_k, \mathcal{V}_l]^{j_l} \mathcal{V}_{l+1}^{j_{l+1}} \mathcal{V}_{l+2}^{j_{l+2}} \dots \mathcal{V}_p^{j_p},$$

czyli wobec relacji  $k > l$  (i zakresu zmienności obu indeksów)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p (-1)^k \omega_{j_0 j_1 \dots j_p} D_{\mathcal{V}_k} (\mathcal{V}_0^{j_0} \mathcal{V}_1^{j_1} \dots \mathcal{V}_p^{j_p}) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} \omega_{i_0 i_1 \dots i_p} \mathcal{V}_{[k,l]}^i \mathcal{V}_0^{i_0} \mathcal{V}_1^{i_1} \dots \mathcal{V}_p^{i_p}. \end{aligned}$$

Z kolei strona prawa rozpisuje się do postaci

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \\ & \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \text{sign}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{\sigma([j,i])}} \mathcal{V}_0^{l_{\sigma(0)}} \mathcal{V}_1^{l_{\sigma(1)}} \dots \mathcal{V}_p^{l_{\sigma(p)}} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \\ & \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \text{sign}(\sigma) \mathcal{V}_{\sigma([j,i])}^{l_{[j,i]}} \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{l_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \sum_{k \in \{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}} \\ & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{[j,i]\} \cup \overline{0,p} \setminus \{i,j\}}, \sigma(k)=[j,i]} \text{sign}(\sigma) \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_k} \mathcal{V}_{\sigma(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\sigma(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\sigma(p)}^{l_p} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \mathcal{V}_{[j,i]}^{l_{[j,i]}} \omega_{l_{[j,i]} l_0 \dots l_p} \\ & \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{\overline{0,p} \setminus \{i,j\}}} \text{sign}(\rho) \mathcal{V}_{\rho(0)}^{l_0} \mathcal{V}_{\rho(1)}^{l_1} \dots \mathcal{V}_{\rho(p)}^{l_p} \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \mathcal{V}_{[j,i]}^l \omega_{l_0 \dots l_p} \mathcal{V}_0^{l_0} \mathcal{V}_1^{l_1} \dots \mathcal{V}_p^{l_p}, \end{aligned}$$

jest zatem równa stronie lewej, zgodnie z postulowaną tezą.  $\square$

Na zakończenie rekapitulacji elementarnej struktury algebraicznej i analitycznej na zbiorze form różniczkowych na rozmaitości, należy jeszcze wspomnieć o konstrukcji w pewnym sensie dualnej w stosunku do dyskutowanego wcześniej transportu stycznościowego wektorów i pól wektorowych, a stanowiącej uogólnienie operacji cofnięcia funkcji wzdłuż odwzorowania, wprowadzonej w dowodzie Tw. 3. Mówi o niej

**Definicja 17.** Przyjmijmy zapis Def. 14 i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^{r+1}$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . **Cofnięcie pola form** na  $M_2$  wzdłuż odwzorowania  $F$  to odwzorowanie

$$F^* : \Omega_{(l)}^p(M_2) \rightarrow \Omega_{(\min(l,r))}^p(M_1)$$

zadawane w dowolnym punkcie  $x \in M_1$  formułą

$$(F^* \omega)(x) := \omega(F(x)) \circ \prod_{k=1}^p \Gamma_x F.$$

Kluczowe własności operacji cofnięcia zbiera

**Stwierdzenie 18.** Przyjmijmy zapis Def. 17 i niechaj  $F : M_1 \rightarrow M_2$  oraz  $G : M_2 \rightarrow M_3$  będą odwzorowaniami klasy  $C^1$  między  $C^k$ -rozmaitościami ( $k > r$ )  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Zdefiniowane przez nie cofnięcia pola form spełniają tożsamości

$$F^* \circ \wedge = \wedge \circ (F^* \times F^*),$$

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* ,$$

$$F^* \circ d = d \circ F^* .$$

*Dowód:* Oczywiście – najwygodniej przeprowadzić go w reprezentacji lokalnej, jak w Uwadze 9.  $\square$

W dalszej części dyskusji w ramach niniejszego wprowadzenia wykorzystamy funktor styczny w klasyfikacji odwzorowań między różniczkowalnymi, poznając przy tej okazji kilka standardowych metod ich konstrukcji.

**Definicja 18.** Przyjmijmy zapis Stw. 4 i jego dowodu. Odwzorowanie  $f \in C^1(M_1, M_2)$  między dwiema  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  (dla  $k \geq 1$ ) nazywamy

- **immersywnym w punkcie**  $x \in M_1$ , jeśli odwzorowanie styczne  $T_x f$  jest iniektywne, tj.  $\ker T_x f = \{0\}$ ;
- **submersywnym w punkcie**  $x \in M_1$ , jeśli odwzorowanie styczne  $T_x f$  jest suriektywne, tj.  $\text{im } T_x f = T_{f(x)} M_2$ ;

Ilekoć odwzorowanie  $f$  jest immersywne (wzgl. submersywne) w każdym punkcie swej dziedziny, określamy je mianem **immersji** lub **zanurzenia** (wzgl. **submersji**). Immersja będąca homeomorfizmem na obraz to **włożenie**.

W przyjętym przez nas schemacie interpretacyjnym immersje i submersje jawią się jako geometryzacje znanych dobrze pojęć z algebry liniowej: monomorfizmu i – odpowiednio – epimorfizmu przestrzeni wektorowych. Oczywiście związek między wektorami stycznymi w punkcie rozmaitości i lokalnymi układami współrzędnych w jego otoczeniu podparty stosowną intuicją algebraiczną prowadzi do stwierżeń o kanonicznej postaci odwzorowania immersywnego (wzgl. submersywnego) w danym punkcie, które przedstawiamy poniżej. Zaczniemy od odwzorowań immersywnych.

**Stwierzenie 19** (Twierdzenie o lokalnej immersji). Przyjmijmy zapis Def. 1. Niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą  $C^k$ -rozmaitościami o wymiarach  $\dim M_\alpha =: n_\alpha$ ,  $n_2 \geq n_1$  i niech  $f \in C^1(M_1, M_2)$  będzie odwzorowaniem immersywnym w punkcie  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  dla pewnego  $y \in M_2$ . Wówczas istnieją otoczenia otwarte  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni y$  oraz lokalne mapy  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własnościach

$$(14) \quad \kappa_1(x) = 0, \quad \kappa_2(y) = 0$$

oraz

$$(15) \quad f(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2,$$

w których lokalna prezentacja odwzorowania  $f$  przyjmuje postać

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)},$$

gdzie odwzorowanie  $\iota_{1,2,\dots,n_1}$  jest **immersją kanoniczną**

$$\iota_{1,2,\dots,n_1} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, 0, 0, \dots, 0).$$

*Dowód:* Rozważmy lokalną prezentację  $f$  względem dowolnych map  $\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_\alpha}$  określonych na pewnych otoczeniach  $\mathcal{U}_1 \ni x$  i  $\mathcal{U}_2 \ni y$ , przy czym dokonując – jeśli trzeba – ich trywialnej modyfikacji (translacja wartości o stałą) możemy zawsze wycentrować oba układy współrzędnych na – odpowiednio –  $\psi_1(x)$  i  $\psi_2(y)$ . Przy tym jeśli warunek  $f(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2$  nie jest spełniony, wystarczy zastąpić mapę  $\psi_1$  podmapą  $\psi_1 \upharpoonright_{\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2)}$ , o dziedzinie  $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(\mathcal{U}_2) =: \mathcal{U}_1^f$ . Wprowadźmy oznaczenie  $\widehat{f} := \psi_2 \circ f \circ (\psi_1 \upharpoonright_{\mathcal{U}_1^f})^{-1}$ . Skoro  $T_0 \widehat{f}$  jest iniekcją, możemy wybrać bazy  $\mathcal{B}_\alpha$  w  $\mathbb{R}^{n_\alpha} \equiv T_0 \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  tak, by macierz odwzorowania  $T_0 \widehat{f}$  względem tych baz miała



postać

$$[\mathbb{T}_0\widehat{f}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{(n_2-n_1)\times n_1} \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$G : \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{\times n_2-n_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_2} : (v, w) \longmapsto \widehat{f}(v) + (0, w),$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać  $\mathbb{T}_0G = \mathbf{1}_{n_2}$ , w szczególności więc jest odwracalne. Na mocy Tw.15  $G$  jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(\psi_1(\mathcal{U}_1^f) \times \mathbb{R}^{\times n_2-n_1})$  punktu 0 na otoczenie  $\mathcal{V}$  tegoż punktu w  $\mathbb{R}^{\times n_2}$ . Zauważmy jednak, że

$$\widehat{f}|_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = G \circ \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})},$$

co wobec lokalnej odwracalności  $G$  możemy przepisać jako

$$((G \upharpoonright_{\mathcal{U}})^{-1} \circ \psi_2) \circ f \circ \psi_1^{-1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})} = \iota_{1,2,\dots,n_1} \upharpoonright_{\iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})}.$$

Mapy  $\kappa_1 := \psi_1 \upharpoonright_{\psi_1^{-1} \circ \iota_{1,2,\dots,n_1}^{-1}(\mathcal{U})}$  oraz  $\kappa_2 := (G \upharpoonright_{\mathcal{U}})^{-1} \circ \psi_2 \upharpoonright_{\psi_2^{-1}(\mathcal{V})}$  są tymi właśnie, o których mowa w tezie dowodzonego stwierdzenia.  $\square$

Odpowiednikiem powyższego dla odwzorowań submersywnych jest

**Stwierdzenie 20** (Twierdzenie o lokalnej submersji). Przyjmijmy zapis Def.1. Niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą  $C^k$ -rozmaitościami o wymiarach  $\dim M_\alpha =: n_\alpha$ ,  $n_2 \leq n_1$  i niech  $f \in C^1(M_1, M_2)$  będzie odwzorowaniem submersywnym w punkcie  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  dla pewnego  $y \in M_2$ . Wówczas istnieją otoczenia otwarte  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni y$  oraz lokalne mapy  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{\times n_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własnościach (14) i (15), w których lokalna prezentacja odwzorowania  $f$  przyjmuje postać

$$\widetilde{f} \equiv \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} = \pi_{1,2,\dots,n_2} \upharpoonright_{\kappa_1(\mathcal{O}_1)},$$

gdzie odwzorowanie  $\pi_{1,2,\dots,n_2}$  jest **submersją kanoniczną**

$$\pi_{1,2,\dots,n_2} : \mathbb{R}^{n_1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}).$$

*Dowód:* Postępując jak w dowodzie poprzedniego stwierdzenia, otrzymujemy surjektywne odwzorowanie  $\mathbb{T}_0\widehat{f}$ , w przypadku którego możemy tak dobrać bazy  $\mathcal{B}_\alpha$  w  $\mathbb{R}^{\times n_\alpha}$ , aby było

$$[\mathbb{T}_0\widehat{f}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = (\mathbf{1}_{n_2} | \mathbf{0}_{n_2 \times (n_1-n_2)}).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} G & : \psi_1(\mathcal{U}_1^f) \longrightarrow \mathbb{R}^{\times n_1} \\ & : \widehat{x} := (x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, \dots, x_{n_1}) \longmapsto (\widehat{f}(\widehat{x}), x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \dots, x_{n_1}), \end{aligned}$$

którego styczne ma (względem baz wybranych uprzednio) postać  $\mathbb{T}_0G = \mathbf{1}_{n_1}$ , zatem na mocy Tw.15  $G$  jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(\psi_1(\mathcal{U}_1^f))$  punktu 0 na otoczenie  $\mathcal{V}$  tegoż punktu w  $\mathbb{R}^{\times n_1}$ . Skoro zaś

$$\widehat{f} = \pi_{1,2,\dots,n_2} \circ G,$$

to wobec odwracalności  $G \upharpoonright_{\mathcal{U}}$  możemy zapisać

$$\psi_2 \circ f \circ (\psi_1^{-1} \circ (G \upharpoonright_{\mathcal{U}})^{-1}) = \pi_{1,2,\dots,n_2} \upharpoonright_{\mathcal{V}},$$

otrzymując poszukiwane mapy  $\kappa_1 := G \circ \psi_1 \upharpoonright_{\psi_1^{-1}(\mathcal{U})}$  oraz  $\kappa_2 := \psi_2$ .  $\square$

Warto zwrócić uwagę, że zarówno obraz immersji kanonicznej, jak i dowolna poziomiczna submersji kanonicznej są podrozmaitościami w – odpowiednio – przeciwdziedzinie i dziedzinie odnośnego odwzorowania. To stwierdzenie traci słuszność w ogólnym przypadku (tj. w przypadku dowolnej

immersji<sup>5</sup> wzgl. submersji), o czym łatwo jest się przekonać analizując immersje okręgu oraz prostej w  $\mathbb{R}^2$ , których obrazem jest lemniskata, jak również poziomicę rzutu w  $\mathbb{R}^3$  na pierwszą składową ograniczonego do torusa zanurzonego w  $\mathbb{R}^3$  tak, że leży on w sposób stabilny na płaszczyźnie  $x_3 = 0$ , a jego środek symetrii jest na osi  $x_1 = 0 = x_2$ . W dalszej części naszej dyskusji zajmiemy się zbadaniem warunków, jakie muszą być spełnione w każdym z wymienionych przypadków, aby obraz wzgl. przeciwobraz punktu (tudzież innej podrozumności) względem  $C^r$ -odwzorowania był podrozumnością. W wyniku naszych dociekań nie tylko uzyskamy wygodne narzędzia konstrukcji nowych podrozumności, ale też – jak się okaże – otrzymamy przydatny opis *dowolnej* rozumności. Zaczynamy od immersji.

**Twierdzenie 5.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj  $(M, \mathcal{A})$  będzie  $C^k$ -rozumnością. Podzbiór  $S \subset M$  jest podrozumnością klasy  $C^k$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest on obrazem włożenia klasy  $C^k$ .

*Dowód:*

$\Rightarrow$  Każda podrozumność dziedziczy strukturę różniczkową z przestrzeni zanurzenia. Wprost na mocy definicji kanoniczna iniekcja  $S \hookrightarrow M$  jest włożeniem względem tej struktury różniczkowej (kanoniczną immersją na poziomie lokalnej prezentacji, identycznościowo wkładającą  $S$  w  $M$ ).

$\Leftarrow$  W pierwszej kolejności sprowadzimy zagadnienie do analizy włożenia klasy  $C^k$  otwartego podzbioru  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n_1}$  w  $\mathbb{R}^{n_2}$ . W tym celu zauważamy, że dla dowolnej podprzestrzeni  $S := f(M_1) \subset M_2$  status podrozumności ma charakter lokalny i niezmienniczy względem dyfeomorfizmów, toteż do jego weryfikacji możemy użyć lokalnych układów współrzędnych:

- $\{ \kappa_{i_2}^2 : \mathcal{O}_{i_2}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2} \}_{i_2 \in I_2}$  na  $M_2$ , które pokrywają  $S$  oraz
- $\{ \kappa_{i_1}^1 : \mathcal{O}_{i_1}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \}_{i_1 \in I_1}$  na  $M_1$ , o własności  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$ .

Istnienie atlasów o tych własnościach wynika z ciągłości  $f$ , por. komentarz na str. 2. Wykorzystując ciągłość odwzorowania odwrotnego (oznaczającą otwartość  $f$ , a będącą konsekwencją homeomorficznego charakteru  $f$  w ograniczeniu do obrazu) możemy zrealizować wymóg bardziej szczegółowy:  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1) = S \cap \mathcal{O}_{\phi(i_1)}^2$  – istotnie, w tym celu należy zastąpić wyjściowe pokrycie  $\mathcal{O}_2 = \{ \mathcal{O}_{i_2}^2 \}_{i_2 \in I_2}$  (ograniczone do  $S$ ) jego rozdrobieniem względem pokrycia  $f(\mathcal{O}_1) = \{ f(\mathcal{O}_{i_1}^1) \}_{i_1 \in I_1}$ . Wystarczy teraz wskazać mapy stowarzyszone z pokryciem  $S$  otrzymanym tym sposobem, w których  $S$  jawi się lokalnie jako otwarty podzbiór  $\mathbb{R}^{n_1} \cong \mathbb{R}^{n_1} \times \{ \mathbf{0}_{n_2-n_1} \} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ . Oznaczmy  $\mathcal{U}_{i_1}^1 := \kappa_{i_1}^1(\mathcal{O}_{i_1}^1) \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $i_1 \in I_1$  i rozważmy

$$f_{i_1} = \kappa_{\phi(i_1)}^2 \circ f \circ (\kappa_{i_1}^1)^{-1} : \mathcal{U}_{i_1}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}.$$

Lokalne prezentacje  $f_{i_1}$  to – rzecz jasna – włożenia klasy  $C^k$ , przeto na mocy Stw. 19 możemy wybrać w ich dziedzinie i przeciwdziedzinie współrzędne, w których te odwzorowania przyjmą postać kanoniczną i które tym samym sparametryzują zbiory  $f(\mathcal{O}_{i_1}^1)$  w pożądanym sposób. □

Szczegółowa dyskusja warunków, w których poziomicą ustalonego punktu ze zbioru wartości odwzorowania klasy  $C^k$  jest podrozumnością, wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć, co czynimy poniżej.

**Definicja 19.** Przyjmijmy zapis Def. 18. Jeśli  $f$  jest submersywnie w punkcie  $x \in M_1$ , to wówczas  $x$  nazywamy **punktem regularnym** odwzorowania  $f$ . W przeciwnym razie mówimy o **punkcie krytycznym**. Punkt przeciwdziedziny  $y \in M_2$  będący obrazem punktu krytycznego względem  $f$  to **wartość krytyczna**, wszystkie pozostałe punkty przeciwdziedziny (nie wyłączając tych spoza

<sup>5</sup>Należy podkreślić, że źródłem obstrukcji może się okazać nie tylko nieiniekcyjny charakter odwzorowania, ale też brak ciągłości jego odwrotności w sytuacji, kiedy odwrotność istnieje.

obrazu odwzorowania) noszą miano **wartości regularnych**. Poziomice  $f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  wartości regularnych  $y \in M_2$  bywają nazywane **poziomicami regularnymi**, a w przypadku surjektywnej submersji także **włóknami**. Rozmaitość  $M_1$  zyskuje w tym kontekście przydomek **przestrzeni totalnej (submersji)**. Niechaj  $f_\alpha : M_1^{(\alpha)} \rightarrow M_2^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą submersjami. Parę odwzorowań gładkich  $F_\beta : M_\beta^{(1)} \rightarrow M_\beta^{(2)}$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  o własności wyrażonej przez diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} M_1^{(1)} & \xrightarrow{F_1} & M_1^{(2)} \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ M_2^{(1)} & \xrightarrow{F_2} & M_2^{(2)} \end{array}$$

nazywamy **morfizmem submersji**. Powiemy też, że  $F_1$  zachowuje włókna obu submersji.

O pierwszorzędym znaczeniu wprowadzonych tu pojęć w kontekście naszych rozważań przekonuje

**Twierdzenie 6** (O wartości regularnej). Poziomica regularna odwzorowania klasy  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  pomiędzy  $C^k$ -rozmaitościami jest podrozumaitością klasy  $C^k$  w dziedzinie tegoż odwzorowania, wymiaru równego różnicy wymiarów dziedziny i przeciwdziedziny odwzorowania.

*Dowód:* Jak stwierdziliśmy uprzednio, status podrozumaitości ma charakter lokalny i niezmienniczy względem dyfeomorfizmów, przeto jego weryfikację wystarczy przeprowadzić w dziedzinie jednej z map na dziedzinie odwzorowania oraz w dziedzinie odnośnej mapy na jego przeciwdziedziny. Rozważmy zatem otwarte otoczenie punktu regularnego  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset M_1$  odwzorowania  $f : M_1 \rightarrow M_2$  klasy  $C^k$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $M_1$  i  $M_2$ . Odwzorowanie  $f$  jest submersyjne w  $x$ , zatem na mocy Stw.20 istnieją lokalne układy współrzędnych  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_\alpha}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  na zbiorach otwartych  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni y$  o własnościach (14) i (15) i takie, w których lokalna prezentacja  $\tilde{f} = \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}$  jest ograniczeniem submersji kanonicznej do  $\kappa_1(\mathcal{O}_1)$ . Wprost z konstrukcji wynika, że dla każdego punktu  $\tilde{x} \in \mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$  jest spełniony warunek  $x^k(\tilde{x}) = 0$ ,  $k \in \overline{1, n_2}$  dla składowych mapy  $\kappa_1 = (x^1, x^2, \dots, x^{n_2})$ , oto bowiem

$$(x^1(\tilde{x}), x^2(\tilde{x}), \dots, x^{n_2}(\tilde{x})) = \tilde{f} \circ \kappa_1(\tilde{x}) \equiv \kappa_2 \circ f(\tilde{x}) = \kappa_2(y) = 0.$$

Jest to jedyny warunek, jaki przyjęte założenia narzucają na  $\kappa_1(\tilde{x})$ , stąd też podprzestrzeń  $\mathcal{O}_1 \cap f^{-1}(\{y\})$  jest parametryzowana przez  $n_1 - n_2$  ostatnich współrzędnych na  $\mathcal{O}_1$ ,

$$\kappa_1(\tilde{x}) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0}_{n_2}, x^{n_2+1}(\tilde{x}), x^{n_2+2}(\tilde{x}), \dots, x^{n_1}(\tilde{x})),$$

co daje nam też dowodzonego twierdzenia. □

Warto przy tej okazji odnotować także powszechnie stosowane

**Stwierdzenie 21.** W oznaczeniach dowodu Tw.6 zachodzi tożsamość

$$\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}) = \ker \mathbb{T}_x f.$$

*Dowód:* Jako że  $f$  jest stałe na swej poziomicy, zachodzi równość

$$\mathbb{T}_x f \upharpoonright_{\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\})} = 0,$$

więc też

$$\mathbb{T}_x f^{-1}(\{y\}) \subset \ker \mathbb{T}_x f.$$

Z drugiej strony czysto algebraiczny bilans wymiarów dla odwzorowania liniowego  $\mathbb{T}_x f$  daje nam – wobec jego surjektywności, a w świetle Tw.6 – równość

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker \mathbb{T}_x f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} \mathbb{T}_x f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x M_1 - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_y M_2$$

$$\equiv \dim M_1 - \dim M_2 = \dim f^{-1}(\{y\}) \equiv \dim_{\mathbb{R}} T_x f^{-1}(\{y\}),$$

która zamyka dowód. □

Tytułem rozwinięcia dotychczasowej naszej dyskusji podstawowych typów odwzorowań różniczkowalnych między rozmaitościami omówimy kilka przykładów oraz podstawowe ich własności. Zaczniemy od warunków wystarczających dla bycia immersją.

**Stwierdzenie 22.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i ustalmy (dowolnie)  $k \in \mathbb{N}^{\times}$ . Każde injektywne  $C^k$ -odwzorowanie o stałym rzędzie (w rozumieniu Tw. 17, odniesionego do dowolnej lokalnej prezentacji odwzorowania) między dwiema  $C^k$ -rozmaitościami jest immersją.

*Dowód:* Załóżmy, że  $C^k$ -odwzorowanie  $f : M_1 \rightarrow M_2$  o stałym rzędzie  $\text{rk } DF = r$  między dwiema  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  wymiaru  $n_\alpha := \dim M_\alpha$  jest wprawdzie injektywne, ale *nie* jest immersją, czyli  $r < n_1$ . Rozważmy obrazy: dowolnego punktu  $x \in M_1$  oraz jego obrazu  $f(x) \in M_2$  względem odnośnych lokalnych map  $\kappa_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_\alpha$  określonych na pewnych otwartych otoczeniach:  $\mathcal{O}_1 \ni x$  i  $\mathcal{O}_2 \ni f(x)$ , które są odwzorowywane homeomorficznie w odnośne zbiory otwarte  $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^{n_\alpha}$ . Odwzorowanie  $\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  spełnia założenia Tw. 17, możemy przeto odnieść do niego tezę tego twierdzenia, która przesądza o istnieniu na pewnych otoczeniach  $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  punktów:  $\kappa_1(x) \in \tilde{\mathcal{U}}_1$  i  $\kappa_2 \circ f(x) \in \tilde{\mathcal{U}}_2$  lokalnych transformacji współrzędniowych (dyfeomorfizmów)  $\iota_\alpha$  klasy  $C^k$ , które pozwalają sprowadzić lokalną prezentację  $f$  do szczególnie prostej postaci danej wzorem (wykorzystującym notację Tw. 17)

$$\iota_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \circ \iota_1^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = (x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_2-r}).$$

To jednak prowadzi nas do wniosku, że wszystkie punkty z dziedziny powyższej lokalnej prezentacji, które są szczególnej postaci  $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_r, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n_1-r})$ ,  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{1, n_1-r}$ , są przez nią

przeprowadzane na punkt  $\mathbf{0}_{n_2}$ , co wobec relacji  $r < n_1$  implikuje nieinjektywność tejże lokalnej prezentacji, a zatem także – nieinjektywność  $f$ , w sprzeczności z poczynionymi założeniami. □

Praktyczny opis włożenia zawiera natomiast

**Stwierdzenie 23.** Każda injektywna immersja będąca odwzorowaniem właściwym jest gładkim włożeniem.

*Dowód:* Odwzorowanie, o którym mowa w treści stwierdzenia, jest na mocy Stw. 38 (które możemy tu zastosować na podstawie Stw. 1) domknięte, co w świetle Stw. 31 oznacza, że jest ono włożeniem topologicznym. □

Przydatny przykład zastosowania powyższego rezultatu stanowi

**Stwierdzenie 24.** Przyjmijmy zapis Def. 1 i niechaj  $f : M_1 \rightarrow M_2$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^k$  pomiędzy dwiema  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . **Wykres odwzorowania**  $f$ , tj. podzbiór

$$\text{graph}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in M_1 \} \subset M_1 \times M_2,$$

wyposażony w topologię produktową, jest podrozmaitością klasy  $C^k$  rozmaitości produktowej  $M_1 \times M_2$ .

*Dowód:* Odwzorowanie  $(\text{id}_{M_1}, f) : M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$ , którego obrazem jest  $\text{graph}(f)$ , jest w oczywisty sposób injektywną immersją. Ponadto jest ono właściwe. Istotnie, rozważmy dowolny zbiór zwarty  $\mathcal{K} \subset M_1 \times M_2$  oraz dowolny ciąg punktów  $x : \mathbb{N} \rightarrow (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$  w jego przeciwobrazie w  $M_1$ . Obraz tego ciągu w  $\mathcal{K}$  zawiera – w świetle Stw. 36 – pewien podciąg zbieżny  $(x_n, f(x_n)) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{K}$  o granicy  $(x_*, f(x_*)) \in \mathcal{K}$ , której postać jest poddyktowana

przez założoną ciągłość  $f$ . Ów podciąg definiuje podciąg  $x_n : \mathbb{N} \rightarrow (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$  zbieżny do  $x_* \in (\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ , co przesądza o zwartości zbioru  $(\text{id}_{M_1}, f)^{-1}(\mathcal{K})$ . Na gruncie Stw. 23 konstatujemy, że  $(\text{id}_{M_1}, f)$  jest gładkim włożeniem, więc też – w odwołaniu do Tw 5 – jego obraz  $\text{graph}(f)$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$ , zgodnie z postulowaną tezą.  $\square$

Przejdziemy teraz do dyskusji odwzorowań submersywnych. Prostą, acz istotną ich własność, stanowiącą geometryzację zaawansowanego pojęcia algebry liniowej, jakim jest rozszczepialny krótki ciąg dokładny modułów nad pierścieniem, opisuje

**Stwierdzenie 25.** Przyjmijmy zapis Def. 18. Obraz każdego punktu regularnego  $x \in M_1$  odwzorowania  $f : M_1 \rightarrow M_2$  klasy  $C^l$ ,  $l \leq k$  (dla  $k \geq 1$ ) ma otoczenie  $\mathcal{O}_{f(x)} \ni f(x)$ , na którym jest określone odwzorowanie  $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$  klasy  $C^l$  o własnościach

$$f \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} \quad \wedge \quad \sigma \circ f(x) = x,$$

zwane **cięciem lokalnym** odwzorowania  $f$ .

*Dowód:* Teza ma charakter lokalny, możemy zatem ograniczyć rozważania do pewnego otoczenia  $\mathcal{O}_x \ni x$  będącego dziedziną lokalnej mapy  $\kappa_1 : \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_1})$ , w której  $\kappa_1(x) = 0$ , a także – do pewnego otoczenia  $\tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \ni f(x)$  będącego dziedziną lokalnej mapy  $\kappa_2 : \tilde{\mathcal{O}}_{f(x)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2$ ,  $\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{n_2})$ , w której  $\kappa_2 \circ \pi(x) = 0$ . Submersywność  $f$  w  $x$  oznacza, że odwzorowanie styczne

$$\mathbb{T}_{\kappa(x)=0}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1}) : \mathbb{T}_{\kappa_1(x)=0} \mathbb{R}^{n_1} \cong \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{T}_{\kappa_2 \circ f(x)=0} \mathbb{R}^{n_2} \cong \mathbb{R}^{n_2}$$

jest epimorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych. Niechaj zatem  $V_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$  będzie (dowolną) podprzestrznią izomorficznie odwzorowywaną w  $\mathbb{R}^{n_2}$  przez (ograniczenie)  $\mathbb{T}_{\kappa(x)}(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})$ , a wtedy odwzorowanie styczne do odwzorowania klasy  $C^l$

$$F := \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{U}_1 \cap V_1} : \mathcal{U}_1 \cap V_1 \rightarrow \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2},$$

o jawnie niepustej dziedzinie (wszak  $V_1$  jest podprzestrznią w  $\mathbb{R}^{n_1}$ , a  $\mathcal{U}_1$  jest otoczeniem wektora 0), jest odwracalne. Istotnie, wobec tożsamości  $\mathbb{T}_0 V_1 \cong V_1$ , dziedziną  $\mathbb{T}_0 F$  przyjmuje postać  $\mathbb{T}_0 \mathcal{U}_1 \cap \mathbb{T}_0 V_1 \cong \mathbb{R}^{n_1} \cap V_1 = V_1$ , co oznacza, że  $\mathbb{T}_0 F$  jest izomorfizmem

$$\mathbb{T}_0 F \cong \mathbb{T}_0(\kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1})|_{V_1}.$$

W odwołaniu do Tw. 15 wnioskujemy zatem, że  $F \cong \kappa_2 \circ f \circ \kappa_1^{-1} \upharpoonright_{\mathcal{U}_1 \cap V_1}$  ma pożądaną lokalną odwrotność  $\kappa_1 \circ \sigma \circ \kappa_2^{-1} \upharpoonright_{F(\mathcal{U}_0)}$  klasy  $C^l$  na pewnym otoczeniu  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \cap V_1$  wektora  $0 \equiv \kappa_1(x)$ . Homeomorficzny przeciwobraz  $\kappa_1^{-1}(\mathcal{U}_0)$  tego ostatniego jest postulowanym otoczeniem punktu  $x$ , na którym jest określone lokalne cięcie  $\sigma$  klasy  $C^l$ .  $\square$

Dotychczasowe nasze rozważania nieuchronnie prowadzą do pytania o warunki, których spełnienie gwarantuje, że przeciwobraz podrozmaitości w przeciwdziedzinie odwzorowania względem tegoż odwzorowania także jest podrozmaitością. Przy ich wyprowadzaniu natrafiamy na naturalne uogólnienie pojęcia „regularności” punktu przeciwdziedziny, o czytelnej interpretacji geometrycznej. Tak jak poprzednio dociekania nasze prowadzimy na poziomie lokalnym. Stwierdzamy przy tym, że przeciwobraz dowolnej podrozmaitości  $S \subset M_2$  klasy  $C^k$  rozmaitości tejże klasy względem odwzorowania  $f : M_1 \rightarrow M_2$  klasy  $C^k$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$  wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt  $x \in f^{-1}(S)$  ma otoczenie  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(M_1)$  o tej własności, że  $\mathcal{O} \cap f^{-1}(S)$  jest (pod)rozmaitością klasy  $C^k$  (tego samego wymiaru). Ustalmy  $y \in S$  i przywołajmy treść Tw. 5, z której wynika, że  $S \subset M_2$  jest obrazem włożenia  $\iota_S : S \hookrightarrow M_2$  (klasy  $C^k$ ), zatem też – na mocy Stw. 19 – lokalnie, tj. w pewnym otoczeniu  $\mathcal{O}_y$  punktu  $y$ , jest wspólną poziomnicą zerową układu  $\text{codim}_{M_2} S =: s$  liniowo niezależnych funkcji<sup>6</sup>  $w_l := \varphi_2^{\dim S + l}$ ,  $l \in \overline{1, s}$ . Wobec tego w pewnym

<sup>6</sup>Tj. funkcji o różniczkach liniowo niezależnych na pewnym otoczeniu  $y$ .

otoczeniu  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(S) \subset M_1$  zbiór  $f^{-1}(S)$  jest wspólną poziomicyą zerową układu funkcji  $w_l \circ f$ ,  $l \in \overline{1, s}$ . Zdefiniujemy submersję<sup>7</sup>

$$w := (w_1, w_2, \dots, w_s) : \mathcal{O}_y \longrightarrow \mathbb{R}^{xs},$$

a następnie rozważmy odwzorowanie

$$w \circ f : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathbb{R}^{xs}.$$

W świetle Tw. 6 podprzestrzeń  $(w \circ f)^{-1}(\{0\}) \equiv \mathcal{O}_y$  jest podrozmaitością, jeśli 0 jest wartością regularną odwzorowania  $w \circ f$ . Zachodzi

$$\mathbb{T}_x(w \circ f) = \mathbb{T}_y w \circ \mathbb{T}_x f : \mathbb{T}_x \longrightarrow \mathbb{T}_0 \mathbb{R}^{xs} \equiv \mathbb{R}^{xs},$$

wobec czego  $\mathbb{T}_x(w \circ f)$  jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbb{T}_y w$  odwzorowuje  $\text{im } \mathbb{T}_x f$  na  $\mathbb{R}^{xs}$ . Jednakowoż  $\ker \mathbb{T}_y w = \mathbb{T}_y S$  na mocy Stw. 21, musimy zatem wobec surjektywności  $\mathbb{T}_y w$  zażądać spełnienia warunku, o którym mowa w

**Definicja 20.** Przyjmijmy zapis Def. 1. Niechaj  $(M_\alpha, \widehat{\mathcal{A}}_\alpha) \in \text{Ob } \mathbf{Man}^{(k)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i niech  $f \in C^1(M_1, M_2)$ , a ponadto niech  $S \subset M_2$  będzie podrozmaitością klasy  $C^k$ . Odwzorowanie  $f$  określamy mianem **transwersalnego w punkcie**  $f(x) \in S$ ,  $x \in M_1$  **względem**  $S$ , co zapisujemy symbolicznie jako

$$f \bar{\pitchfork}_{f(x)} S,$$

jeśli spełnia ono warunek

$$(16) \quad \text{im } \mathbb{T}_x f + \mathbb{T}_{f(x)} S = \mathbb{T}_{f(x)} M_2$$

(w którego zapisie suma po lewej stronie znaku równości jest sumą algebraiczną przestrzeni  $\mathbb{R}$ -liniowych). Ilekroć warunek ten jest spełniony w każdym z punktów poziomiczy  $f^{-1}(S)$ , mówimy, że odwzorowanie  $f$  jest **transwersalne względem**  $S$  i piszemy  $f \bar{\pitchfork} S$ .

W podsumowaniu naszej wcześniejszej analizy możemy już wysławić

**Twierdzenie 7.** Przyjmijmy zapis Def. 20 i niechaj  $S \subset M_2$  będzie podrozmaitością klasy  $C^k$ . Jeśli  $f \bar{\pitchfork} S$ , to także  $f^{-1}(S) \subset M_1$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$ , przy czym

$$\text{codim}_{M_1} f^{-1}(S) = \text{codim}_{M_2} S.$$

*Dowód:* Jedynym stwierdzeniem, które nie zostało dotąd udowodnione, jest to dotyczące kowymiaru przeciwobrazu. Przypomnijmy, że w dotychczasowych naszych rozważaniach kowymiar  $S$  przyjęliśmy równym  $s$ . Przeciwobraz  $f^{-1}(S)$  możemy opisać lokalnie jako wspólną poziomicyą zerową układu  $s$  funkcji  $w_l \circ f$ ,  $l \in \overline{1, s}$ , przy czym ich jednoczesne zerowanie się jest jedynym warunkiem definiującym tę podrozmaitość. Ich liniowa niezależność wynika wprost z naszej konstrukcji (patrz: rozumowanie prowadzące do wzoru (16)), oto bowiem

$$\text{im} (\mathbb{T}_x(w_1 \circ f), \mathbb{T}_x(w_2 \circ f), \dots, \mathbb{T}_x(w_s \circ f)) \equiv \text{im } \mathbb{T}_x(w \circ f) = \mathbb{R}^{xs}.$$

□

**Uwaga 10.** Ilekroć  $S = \{y\}$  (pojedynczy punkt przeciwdziedziny), powyższa konstrukcja daje  $\mathbb{T}_y S = \{0\} \subset \mathbb{T}_y M_2$ , więc też

$$f \bar{\pitchfork} S \quad \iff \quad \forall_{x \in f^{-1}(\{y\})} : \mathbb{T}_y M_2 = \text{im } \mathbb{T}_x f + 0 \equiv \text{im } \mathbb{T}_x f,$$

co jest równoznaczne z surjektywnością odwzorowania  $\mathbb{R}$ -liniowego  $\mathbb{T}_x f$  w każdym z punktów poziomiczy. Tym samym odtwarzamy poprzednio wprowadzone pojęcie wartości regularnej jako szczególny przypadek ogólniejszego pojęcia transwersalności odwzorowania względem podrozmaitości. To ostatnie można prosto rozszerzyć do pary podrozmaitości oraz pary odwzorowań o wspólnej przeciwdziedziny, czym zajmujemy się w dalszej części naszej dyskusji.

<sup>7</sup>Odwzorowanie styczne ma względem odpowiednich baz macierz jednostkową.

**Definicja 21.** Przyjmijmy zapis Def. 20 i niechaj  $S_1, S_2 \subset M$  będą dwiema podrozmaitościami klasy  $C^k$ . Powiemy, że są one wzajem **transwersalne**, co zapiszemy symbolicznie jako

$$S_1 \bar{\cap} S_2,$$

jeśli kanoniczna iniekcja  $\iota_{S_1} : S_1 \hookrightarrow M$  spełnia warunek  $\iota_{S_1} \bar{\cap} S_2$  (lub – równoważnie –  $\iota_{S_2} \bar{\cap} S_1$  dla  $\iota_{S_2} : S_2 \hookrightarrow M$ ).

Analogicznie, odwozrowania  $f_\alpha \in C^1(M_\alpha, M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  określimy jako wzajem **transwersalne**, zapisując

$$f_1 \bar{\cap} f_2,$$

jeśli dla dowolnej pary punktów  $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$  o własności  $f_1(x_1) = f_2(x_2)$  spełniona jest tożsamość

$$\mathbb{T}_{f_1(x)} M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1} f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2} f_2.$$

Należy zwrócić uwagę, że  $x \in S_1$  należy do przeciwobrazu  $\iota_{S_1}^{-1}(S_2)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \equiv \iota_{S_1}(x) \in S_1 \cap S_2 \subset M$ , a ponieważ  $\mathbb{T}_x \iota_{S_1} : \mathbb{T}_x S_1 \rightarrow \mathbb{T}_{\iota_{S_1}(x)} M$  jest kanonicznym monomorfizmem, przeto

$$(17) \quad S_1 \bar{\cap} S_2 \iff \forall_{x \in S_1 \cap S_2} : \mathbb{T}_x S_1 + \mathbb{T}_x S_2 = \mathbb{T}_x M,$$

co jest zgodne z intuicją geometryczną leżącą u podstaw całej konstrukcji. Znajduje ona dodatkowe solidne podparcie w

**Stwierdzenie 26.** Przyjmijmy oznaczenia Def. 21. Ilekroć  $S_1 \bar{\cap} S_2$ , podprzestrzeń  $S_1 \cap S_2$  ma kanoniczną strukturę podrozmaitości klasy  $C^k$ , kowymiaru

$$(18) \quad \text{codim}_M (S_1 \cap S_2) = \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2,$$

więc też

$$\forall_{x \in S_1 \cap S_2} : \mathbb{T}_x (S_1 \cap S_2) = \mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2.$$

*Dowód:* W świetle Tw. 7 (i uwag wypowiedzianych pod jego dowodem)  $\iota_{S_1}^{-1}(S_2) \equiv S_1 \cap S_2$  ma kanoniczną strukturę podrozmaitości, a nadto otrzymujemy równość

$$\text{codim}_{S_1} (S_1 \cap S_2) \equiv \text{codim}_{S_1} \iota_{S_1}^{-1}(S_2) = \text{codim}_M S_2,$$

tj.

$$\dim S_1 - \dim (S_1 \cap S_2) = \dim M - \dim S_2,$$

a zatem

$$\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = -\dim (S_1 \cap S_2).$$

Stąd też

$$\begin{aligned} \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2 &\equiv 2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim (S_1 \cap S_2) \\ &\equiv \text{codim}_M (S_1 \cap S_2), \end{aligned}$$

która pokazuje dowodnie, że  $\text{codim}_M S_1$  liniowo niezależnych funkcji definiujących  $S_1$  jako ich wspólną poziomice zerową, wraz z  $\text{codim}_M S_2$  liniowo niezależnymi funkcjami definiującymi  $S_2$  tworzy układ liniowo niezależny definiujący w tenże sposób  $S_1 \cap S_2$ .

Ponadto jest oczywistym, że  $\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2 \subset \mathbb{T}_x (S_1 \cap S_2)$ , dla zakończenia dowodu pozostaje więc sprawdzić równość wymiarów obu podprzestrzeni. W tym celu przywołujemy warunek transwersalności (17), który prowadzi do równości

$$\dim M = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2)$$

i na mocy wcześniej udowodnionej równości kowymiarów (18) daje pożądaną równość

$$\begin{aligned} \dim M - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{T}_x (S_1 \cap S_2) &\equiv \text{codim}_M (S_1 \cap S_2) = \text{codim}_M S_1 + \text{codim}_M S_2 \\ &\equiv 2\dim M - \dim S_1 - \dim S_2 = \dim M - \dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{T}_x S_1 \cap \mathbb{T}_x S_2). \end{aligned}$$

□

Przydatnego przeformułowania warunku definiującego parę map transwersalnych dostarcza

**Stwierdzenie 27.** Przyjmijmy zapis Def. 21 oraz Stw. 24 i rozważmy odwzorowania  $f_\alpha \in C^k(M_\alpha, M)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Prawdziwą jest równoważność

$$f_1 \bar{\pitchfork} f_2 \iff f_1 \times f_2 \bar{\pitchfork} \text{graph}(\text{id}_M) \subset M \times M.$$

*Dowód:* Transwersalność produktu  $f_1 \times f_2$  względem  $\text{graph}(\text{id}_M)$  jest równoznaczna z równością – dla dowolnego punktu  $(x_1, x_2) \in (f_1 \times f_2)^{-1}(\text{graph}(\text{id}_M))$  –

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(f_1 \times f_2)(x_1, x_2)}(M \times M) &= \mathbb{T}_{(f_1 \times f_2)(x_1, x_2)} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(f_1 \times f_2)(\mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2)), \end{aligned}$$

którą przepisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_2(x_2)}M &= \mathbb{T}_{(f_1(x_1), f_2(x_2))} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2), \end{aligned}$$

co po uwzględnieniu  $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) \in \text{graph}(\text{id}_M)$  daje

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M &= \mathbb{T}_{(f_1(x_1), f_1(x_1))} \text{graph}(\text{id}_M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2) \\ &\equiv \Delta_{\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M}(\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M) \\ &\quad + \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) \oplus \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2), \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy w zapisie określone dla dowolnego punktu  $y \in M$  diagonalne zanurzenie  $\mathbb{R}$ -liniowe

$$\Delta_{\mathbb{T}_yM} : \mathbb{T}_yM \longrightarrow \mathbb{T}_yM \oplus \mathbb{T}_yM : v \longmapsto (v, v).$$

Na tym etapie możemy już przywołać czysto algebraiczne

**Stwierdzenie 28.** Niechaj  $H_1, H_2 \subset G$  będą dwoma podmodułami modułu  $G$  nad pierścieniem  $R$ , włożonymi weń kanonicznie przez odwzorowania  $\mathcal{J}_{H_\alpha} : H_\alpha \hookrightarrow G$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Zdefiniujmy odwzorowanie (jawnie  $R$ -liniowe)

$$\Delta_G : G \longrightarrow G \oplus G : g \longmapsto (g, g).$$

Prawdziwą jest równoważność

$$G \oplus G = \Delta_G(G) +_{\oplus} \mathcal{J}_{H_1}(H_1) \oplus \mathcal{J}_{H_2}(H_2) \iff G = H_1 +_G H_2.$$

*Dowód:* Proste ćwiczenie. □

To w obecnym kontekście ustala równoważność między wypisanym rozkładem algebraicznym  $\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M \oplus \mathbb{T}_{f_1(x_1)}M$  i równością

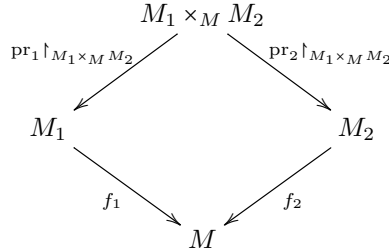
$$\mathbb{T}_{f_1(x_1)}M = \mathbb{T}_{x_1}f_1(\mathbb{T}_{x_1}M_1) +_G \mathbb{T}_{x_2}f_2(\mathbb{T}_{x_2}M_2),$$

w której rozpoznajemy warunek transwersalności odwzorowań  $f_1$  i  $f_2$ . □

Dotychczasowe nasze ustalenia pozwalają wysłowić twierdzenie dające nam do ręki ważne i naturalne narzędzie konstrukcyjne, z którego przyjdzie nam nieraz korzystać w dalszej części kursu, poświęconej geometryzacji struktur algebraicznych. Oto więc mamy



**Twierdzenie 8.** Przyjmijmy zapis Def. 21 i niechaj  $f_\alpha : M_\alpha \rightarrow M$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą odwzorowaniami klasy  $C^k$  między  $C^k$ -rozmaitościami  $(M_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i  $C^k$ -rozmaitością  $(M, \mathcal{A})$ . Wyposażmy produkt włóknisty  $M_1 \times_M M_2$  domykający kopułkę  $((f_1, f_2), M)$  do diagramu przemienneo



w topologię podprzestrzeni indukowaną z topologii produktowej na  $M_1 \times M_2$ . Ilekroć  $f_1 \bar{\cap} f_2$ ,  $M_1 \times_M M_2$  jest podrozmaitością klasy  $C^k$  gładko włożoną w  $M_1 \times M_2$ , zwaną **produktem włóknistym rozmaitości różniczkowalnych**  $M_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  **nad rozmaitością**  $M$ . W szczególności jest tak, gdy jedno z odwzorowań  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  jest submersją.

*Dowód:* W świetle Stw. 27, a z racji założenia o transwersalności  $f_1$  i  $f_2$  – spełniona jest relacja

$$f_1 \times f_2 \bar{\cap} \text{graph}(\text{id}_M),$$

a ponieważ produkt włóknisty spełnia tożsamość

$$M_1 \times_M M_2 = (f_1 \times f_2)^{-1} \text{graph}(\text{id}_M),$$

przeto teza wynika wprost z treści Stw. 7.

W przypadku, gdy (choć) jedno z odwzorowań – powiedzmy, że  $f_1$  – jest submersją, warunek transwersalności wzajemnej obu odwzorowań z pierwszej części tezy dowodzonego twierdzenia jest spełniony automatycznie, oto bowiem dla dowolnej pary punktów  $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$  o własności  $f_1(x_1) = f_2(x_2)$  otrzymujemy ciąg inkluzji

$$\mathbb{T}_{f_1(x)}M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1}f_1 \subset \text{im } \mathbb{T}_{x_1}f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2}f_2 \subset \mathbb{T}_{f_1(x)}M,$$

który dowodzi pożądaney równości

$$\mathbb{T}_{f_1(x)}M = \text{im } \mathbb{T}_{x_1}f_1 + \text{im } \mathbb{T}_{x_2}f_2.$$

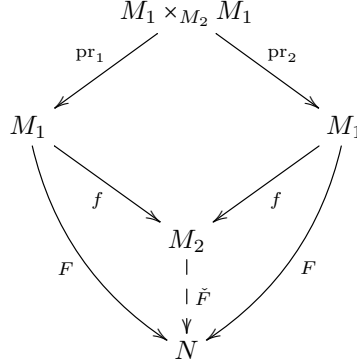
□

I wreszcie na koniec rzut oka na własności submersji, która ukazuje ją jako byt pokrewny dyskuutowanym wcześniej algebraicznym strukturom uniwersalnym.

**Stwierdzenie 29** (Kwazi-uniwersalna<sup>8</sup> własność submersji). Przyjmijmy zapis 18, zakładając przy tym, że  $f : M_1 \rightarrow M_2$  jest surjektywną submersją klasy  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Niechaj ponadto  $N$  będzie  $C^k$ -rozmaitością, a  $\check{F} : M_2 \rightarrow N$  dowolnym odwzorowaniem. Odwzorowanie  $\check{F}$  jest klasy  $C^k$  wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie złożone  $\check{F} \circ f : M_1 \rightarrow N$  ma tę własność. W szczególności każdemu  $C^k$ -odwzorowaniu  $F : M_1 \rightarrow N$  stałemu na poziomicach  $f$  odpowiada dokładnie jedno odwzorowanie  $\check{F} \in C^k(M_2, N)$  o własności wyrażonej – wraz z rzeczoną własnością

<sup>8</sup>Powodem, dla którego wzbraniamy się przed nadaniem tej własności submersji miana „uniwersalnej”, jest to, że klasa obiektów, pośród których para  $(M_2, f)$  odgrywa rolę „inicjalną”, jest zdefiniowana w terminach odwzorowania  $f$  (chodzi o stałość na poziomicach tego odwzorowania).

$f$  – przez diagram przemienny



Dowód: Ilekcóć  $\tilde{F}$  jest klasy  $C^k$ , także  $\tilde{F} \circ f$  ma tę własność jako superpozycja odwzorowań klasy  $C^k$ .

I odwrotnie, niechaj  $\tilde{F} \circ f \in C^k(M_1, N)$ . Wobec surjektywności  $f$  dowolny punkt w  $M_2$  możemy przedstawić w postaci  $f(x)$  dla pewnego  $x \in M_1$ . Wybierzmy zatem (dowolnie) punkt  $f(x) \in M_2$  oraz jego otoczenie  $\mathcal{O}_{f(x)} \subset M_2$ , na którym jest określone cięcie lokalne  $\sigma : \mathcal{O}_{f(x)} \rightarrow M_1$  odwzorowania  $f$  spełniające warunki z tezy Stw. 25. Przyjawszy zapis dowodu rzeczzonego stwierdzenia, otrzymujemy tożsamość

$$\tilde{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}} \equiv \tilde{F} \circ \text{id}_{\mathcal{O}_{f(x)}} = (\tilde{F} \circ f) \circ \sigma,$$

która dowodzi  $C^k$ -gładkości  $\tilde{F} \upharpoonright_{\mathcal{O}_{f(x)}}$  na gruncie założenia o  $C^k$ -gładkości  $\tilde{F} \circ f$  oraz wynikającej ze Stw. 25  $C^k$ -gładkości cięcia lokalnego  $\sigma$ . Dowolność wyboru  $f(x)$  pozwala wnioskować o globalnej  $C^k$ -gładkości  $\tilde{F}$ .

Wreszcie na koniec zajmiemy się udowodnieniem istnienia i jednoznaczności odwzorowania  $\tilde{F} \in C^k(M_2, N)$ , spełniającego tożsamość

$$F = \tilde{F} \circ f.$$

Po pierwsze zauważmy, że każde dwa takie odwzorowania pokrywają się na zbiorze  $f(M_1)$ , który z racji surjektywności  $f$  jest tożsamy z  $M_2$ , przeto odwzorowanie  $g$  może być co najwyżej jedno. Postulujemy

$$\tilde{F} : M_2 \rightarrow N : f(x) \mapsto F(x),$$

wykorzystując raz jeszcze surjektywność  $f$ . Założona przez nas stałość  $F$  na włóknach  $f$  przesądza o sensowności powyższego postulatu ( $F(x)$  nie zależy od wyboru reprezentanta włókna  $f^{-1}(\{f(x)\})$ ), a do tego wprost z definicji zachodzi pożądana tożsamość

$$\tilde{F} \circ f(x) = F(x).$$

□

#### DODATEK A. NIEZBĘDNIK TOPOLOGICZNY

Zacniemy od przypomnienia podstawowych pojęć z zakresu topologii ogólnej. Punktem wyjścia jest

**Definicja 22.** Niechaj  $X$  będzie zbiorem. **Topologia na  $X$**  to rodzina  $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$  jego podzbiorów spełniających następujące aksjomaty

- (T1)  $X, \emptyset \in \mathcal{T}(X)$ ;
- (T2)  $\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{T}(X) : \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}} \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$ ;
- (T3)  $\forall N \in \mathbb{N} \forall \mathcal{O} : \overline{1, N} \rightarrow \mathcal{T}(X) : \bigcap_{n=1}^N \mathcal{O}_n \in \mathcal{T}(X)$ .

**Baza topologii** to podzbiór  $\mathcal{B}(X) \subset 2^X$  o własnościach

(BT1)  $X = \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathcal{B}(X)} \mathcal{B}$ ;

(BT2)  $\forall_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}(X)} : (x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \implies \exists_{\mathcal{B}_{12} \in \mathcal{B}(X)} : x \in \mathcal{B}_{12} \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$ ,

przy czym **topologia generowana** przez  $\mathcal{B}(X)$  jest określona jako przecięcie („element po elemencie”) wszystkich topologii zawierających  $\mathcal{B}(X)$ . **Podbaza topologii** to podzbiór  $\mathcal{G}(X) \subset 2^X$  o tej własności, że

$$\mathcal{B}_{\mathcal{G}}(X) := \left\{ \bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_i \mid \mathcal{G}_i \in \mathcal{G}(X) \wedge |I| < \infty \right\}$$

jest bazą topologii. Mając dowolne dwie topologie  $\mathcal{T}_A(X)$ ,  $A \in \{1, 2\}$  na  $X$ , topologię  $\mathcal{T}_1(X)$  nazwiemy **słabszą** od  $\mathcal{T}_2(X)$ , topologię  $\mathcal{T}_2(X)$  zaś – **silniejszą** od  $\mathcal{T}_1(X)$ , jeśli  $\mathcal{T}_1(X) \subset \mathcal{T}_2(X)$ .

Parę  $(X, \mathcal{T}(X))$  złożoną ze zbioru z wyróżnioną na nim topologią nazwiemy **przestrzenią topologiczną**. Zbiory należące do  $\mathcal{T}(X)$  określamy mianem **zbiorów otwartych**. Podzbiór  $\mathcal{C} \subset X$  o własności  $X \setminus \mathcal{C} \in \mathcal{T}(X)$  nazwiemy **domkniętym**. Przecięcie wszystkich zbiorów domkniętych zawierających podzbiór  $Y \subset X$  to **domknięcie**  $Y$ , oznaczane symbolem  $\bar{Y}$  – jest to najmniejszy zbiór domknięty zawierający  $Y$  (istotnie, dopełnienie w  $X$  przecięcia zbiorów jest sumą dopełnień tychże zbiorów).

**Podprzestrzeń topologiczna** przestrzeni  $(X, \mathcal{T}(X))$  to para  $(Y, \mathcal{T}_X(Y))$  złożona z podzbioru  $Y \subset X$  oraz jego topologii  $\mathcal{T}_X(Y) = \{ \mathcal{O} \cap Y \mid \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X) \}$ , zwanej **topologią podprzestrzeni** (lub **względna**). Zbiory otwarte i zbiory domknięte w tej topologii noszą miano **względnie otwartych** i – odpowiednio – **względnie domkniętych**.

Odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  z przestrzeni topologicznej  $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$  w przestrzeń topologiczną  $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$  nazwiemy **ciągłym w punkcie**  $x \in X_1$ , ilekroć przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego zawierającego  $f(x)$  zawiera pewien zbiór otwarty  $\mathcal{U} \ni x$ , czyli

$$\forall_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2)} : ( \mathcal{O} \ni f(x) \implies ( \exists_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}(X_1)} : x \in \mathcal{U} \wedge f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{O} ) ).$$

**Odwzorowanie ciągłe** to takie, które jest ciągłe w każdym punkcie swej dziedziny, czyli takie, które spełnia warunek

$$\forall_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2)} : f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1).$$

Równoważnie odwzorowanie ciągłe charakteryzuje to, że przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego względem niego jest domknięty. Odwrotne odwzorowanie ciągłe o ciągłej odwrotności nazywamy **homeomorfizmem**. Przestrzenie topologiczne wraz z odwzorowaniami ciągłymi między nimi tworzą **kategorię przestrzeni topologicznych**, którą będziemy oznaczać symbolem

**Top.**

Injekttywne odwzorowanie ciągłe  $f : X \rightarrow Y$  będące homeomorfizmem na obraz względem topologii podprzestrzeni na tymże zwie się **zanurzeniem topologicznym**. **Odwzorowanie otwarte** z przestrzeni topologicznej  $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$  w przestrzeń topologiczną  $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$  to odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  spełniające warunek

$$\forall_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_1)} : f(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_2).$$

**Odwzorowanie domknięte** natomiast spełnia warunek

$$\forall_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_1)} : X_2 \setminus f(X_1 \setminus \mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_2).$$

**Odwzorowanie ilorazowe** to takie odwzorowanie surjektywne, które spełnia warunek

$$\forall_{\mathcal{O} \in 2^{X_2}} : ( \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) \iff f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(X_1) ).$$

Na styku topologii i algebry odnajdujemy

**Definicja 23. Topologiczna struktura algebraiczna prosta** to struktura algebraiczna prosta  $\mathcal{S}$  o nośniku  $S$  wyposażonym w topologię, względem której wszystkie operacje  $k_i$ -argumentowe  $\phi_{k_i}$ ,  $i \in \overline{1, N}$  są ciągłe. Podobnie **topologiczna struktura algebraiczna złożona** to struktura algebraiczna złożona o składowych (prostych) będących topologicznymi strukturami algebraicznymi prostymi o topologiach, względem których wszystkie współdefiniujące tę strukturę

złożoną odwzorowania  $\phi_i$ ,  $i \in I$  także są ciągłe. W tym sensie mówimy o **grupach topologicznych, pierścieniach topologicznych, ciałach topologicznych, czy wreszcie topologicznych modułach nad pierścieniem (topologicznym)** oraz – w tej liczbie – **topologicznych przestrzeniach wektorowych**.

Elementarną własność podprzestrzeni topologicznych opisuje

**Stwierdzenie 30.** Przyjmijmy zapis Def. 22 i niechaj  $(Y, \mathcal{T}_X(Y))$  będzie podprzestrzenią przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$ . Podzbiór  $S \subset Y$  jest domknięty (w topologii podprzestrzeni) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podzbiór domknięty  $C \subset X$  (w topologii  $\mathcal{T}(X)$ ) o własności  $S = C \cap Y$ .

*Dowód:* Domkniętość  $S$  w topologii podprzestrzeni jest równoważna otwartości  $Y \setminus S$  w tejże topologii, czyli istnieniu podzbioru  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$  o własności  $Y \setminus S = \mathcal{O} \cap Y$ , to jednak jest równoważne istnieniu podzbioru domkniętego  $C \subset X$  o własności  $Y \setminus S = (X \setminus C) \cap Y$ , czyli ostatecznie – istnieniu podzbioru domkniętego  $C \subset X$  o własności

$$S \equiv Y \setminus (Y \setminus S) = Y \setminus (X \setminus C) \cup Y \setminus Y = Y \setminus (X \setminus C) = Y \cap C.$$

□

Z kolei pojęcie „zanurzenia topologicznego” przybliża

**Stwierdzenie 31.** Przyjmijmy zapis Def. 22. Każde domknięte odwzorowanie ciągłe  $f : X_1 \rightarrow X_2$ , które jest injektywne, jest zanurzeniem topologicznym.

*Dowód:* Wobec injektywności  $f$  odwzorowanie ograniczone  $\tilde{f} : X_1 \rightarrow f(X_2) : x \mapsto f(x)$  jest bijektywne, istnieje zatem jego odwrotność  $\tilde{f}^{-1} : f(X_2) \rightarrow X_1$ , a przy tym ilekroć podzbiór  $\mathcal{O} \subset X_1$  jest domknięty, wówczas jego przeciwobraz  $(\tilde{f}^{-1})^{-1}(\mathcal{O}) = \tilde{f}(\mathcal{O}) \equiv f(\mathcal{O})$  jest domknięty w  $X_2$  wprost na mocy założenia, więc także domknięty w  $f(X_1)$  w topologii podprzestrzeni. To pokazuje, że odwzorowanie  $\tilde{f}^{-1}$  jest ciągłe, przeto  $f$  jest homeomorfizmem na swój obraz. □

W dyskusji obiektów geometrycznych lokalnie modelowanych na strukturach algebraicznych przydatną okaże się także

**Definicja 24.** Przyjmijmy zapis Def. 22. **Otoczeniem punktu**  $x \in X$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  nazwiemy dowolny zbiór otwarty  $\mathcal{O}_x \in \mathcal{T}(X)$  zawierający ten punkt,  $\mathcal{O}_x \ni x$ . **Otoczenie podzbioru**  $S \subset X$  to dowolny zbiór otwarty  $\mathcal{O}_S \in \mathcal{T}(X)$  zawierający ten podzbiór,  $\mathcal{O}_S \supset S$ . **Baza otoczeń punktu**  $x$  to podzbiór  $\mathcal{B}_x$  zbioru  $\mathcal{O}_x$  otoczeń  $x$  o własności

$$\forall \mathcal{O}_x \in \mathcal{O}_x \exists \mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}_x : \mathcal{O}_x \supset \mathcal{B}_x.$$

Mówimy, że przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T}(X))$  **spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności**, jeśli każdy punkt ma skończoną lub przeliczalnie nieskończoną bazę otoczeń. Ilekroć topologia  $\mathcal{T}(X)$  zbioru  $X$  ma skończoną lub przeliczalnie nieskończoną bazę, orzekamy, że przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T}(X))$  **spełnia drugi aksjomat przeliczalności**.

Mamy wygodną redefinicję domknięcia zbioru:

**Stwierdzenie 32.** Przyjmijmy zapis Def. 22. Każde otoczenie dowolnego punktu z domknięcia  $\bar{Y}$  podzbioru  $Y$  przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  zawiera punkt należący do  $Y$ . I odwrotnie, dowolny punkt przestrzeni  $X$  o tej własności należy do  $\bar{Y}$ .

*Dowód:* Istnienie otoczenia  $\mathcal{O}_x$  punktu  $x \in \bar{Y}$  o pustym przecięciu z  $Y$  oznaczałoby, że zbiór domknięty  $\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x)$  będący dopełnieniem w  $X$  sumy mnogościowej  $(X \setminus \bar{Y}) \cup \mathcal{O}_x$  zawiera  $Y$  (gdyż własność tę ma  $\bar{Y}$ ), a przy tym  $\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x) \not\subset \bar{Y}$  (wszak  $x \in \bar{Y} \setminus (\bar{Y} \cap (X \setminus \mathcal{O}_x))$ ), co przeczy minimalności  $\bar{Y}$ .

Niech teraz  $x \in X$  ma tę własność, że każde jego otoczenie zawiera punkt z  $Y$ . Jeśliby  $x$  należał do zbioru otwartego  $X \setminus \bar{Y}$ , to istniałby zbiór domknięty  $C$  zawierający  $Y$  i taki, że  $x \in X \setminus C$ , a

zatem także  $\mathcal{O}_x \subset X \setminus \mathcal{C}$  dla pewnego otoczenia  $x$ , co prowadziłoby do sprzeczności:  $\mathcal{O}_x \cap Y = \emptyset$ .  $\square$

Ustalenie topologii na zbiorze pozwala określić pojęcie zbieżności, o czym mówi

**Definicja 25.** Przyjmijmy zapis Def. 24. Ciąg  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  nazwiemy **zbieżnym do**  $x \in X$ , co zapiszemy symbolem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

jeśli każde otoczenie  $\mathcal{O}_x \ni x$  zawiera prawie wszystkie jego wyrazy, tj. jeśli istnieje indeks  $N_{\mathcal{O}_x} \in \mathbb{N}$  o tej własności, że dla każdego  $n \geq N_{\mathcal{O}_x}$  jest  $x_n \in \mathcal{O}_x$ . Punkt  $x$  jest wówczas **granicą ciągu**  $x$ . Jeśli natomiast każde otoczenie  $\mathcal{O}_x \ni x$  zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu, to  $x$  nazywamy **punktem skupienia ciągu**.

Relację pomiędzy oboma wprowadzonymi tu pojęciami ustala

**Stwierdzenie 33.** Punkt skupienia dowolnego ciągu punktów w przestrzeni spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności jest granicą pewnego podciągu.

*Dowód:* Niechaj  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  będzie ciągiem punktów przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  i niech  $x$  będzie jego punktem skupienia. Wybierzmy dowolną bazę otoczeń  $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  punktu  $x$  i rozważmy jego otoczenia postaci

$$\mathcal{Q}_N := \bigcap_{n=0}^N \mathcal{O}_n.$$

W świetle definicji punktu skupienia istnieje taki indeks  $n_0 \in \mathbb{N}$ , dla którego  $x_{n_0} \in \mathcal{Q}_0$ , a dalej dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  określamy rekurencyjnie  $n_{k+1} > n_k$  jako najmniejszy indeks o własności  $x_{n_{k+1}} \in \mathcal{Q}_{k+1}$ . Niechaj teraz  $\mathcal{O}_x$  będzie dowolnym otoczeniem punktu  $x$ , a wówczas  $\mathcal{O}_x \supset \mathcal{O}_n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ , ponieważ jednak

$$\forall_{k > n} : x_{n_k} \in \mathcal{Q}_k \subset \mathcal{O}_n,$$

przeto stwierdzamy, że  $x$  jest granicą podciągu  $x_{n_k}$ .  $\square$

Pojęcie granicy ciągu pozwala wysłowić jeszcze jedną przydatną alternatywną definicję domknięcia zbioru.

**Stwierdzenie 34.** Przyjmijmy zapis Def. 25, zakładając przy tym, że przestrzeń topologiczna  $(X, \mathcal{T}(X))$  spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności. Wówczas dla dowolnego podzbioru  $Y \subset X$  spełniona jest równoważność:

$$x \in \bar{Y} \iff \exists x : \mathbb{N} \rightarrow Y : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

*Dowód:*

$\implies$  Niechaj  $\{\mathcal{O}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie bazą otoczeń punktu  $x \in \bar{Y}$ . Zdefiniujmy zbiory otwarte

$$\mathcal{Q}_N := \bigcap_{n=0}^N \mathcal{O}_n,$$

z których każdy jest otoczeniem  $x$ , więc też zawiera – w świetle Stw. 32 – punkt  $x_N \in \mathcal{Q}_N \cap Y$ . Ciąg  $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset Y$  jest jawnie zbieżny do  $x$ .

$\impliedby$  Dowolne otoczenie punktu  $x$  zawiera – wprost z konstrukcji – prawie wszystkie wyrazy ciągu  $x$ , z których każdy należy do  $Y$ . Teza wynika zatem bezpośrednio ze Stw. 32.  $\square$

Na następnym poziomie uszczegółowienia natrafiamy na

**Definicja 26.** Przyjmijmy zapis Def. 22. **Pokrycie otwarte** przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  to podzbiór  $\mathcal{O} \equiv \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{T}(X)$  (ideksowany przez pewien zbiór  $\Lambda$ ) o własności

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda = X.$$

Pokrycie otwarte nosi miano **lokalnie skończonego**, jeśli każdy punkt przestrzeni ma otoczenie, które przecina się niepusto tylko ze skończoną liczbą elementów tego pokrycia. **Podpokrycie** pokrycia  $\mathcal{O}$  to dowolny podzbiór  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$  będący pokryciem otwartym  $X$ . **Rozdrobnieniem pokrycia**  $\mathcal{O}$  nazwiemy pokrycie otwarte  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  o własności

$$(19) \quad \forall \alpha \in A \quad \exists \lambda \in \Lambda : \mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{O}_\lambda.$$

Przestrzeń topologiczną nazywamy **zwartą**, jeśli dowolne jej pokrycie otwarte ma podpokrycie skończone. W sytuacji, gdy dowolne pokrycie otwarte ma rozdrobnienie lokalnie skończone, mówimy o **przestrzeni parazwartej**. Dowolna zwarta podprzestrzeń topologiczna przestrzeni topologicznej nosi miano **zbioru zwartego**. Podzbiór przestrzeni topologicznej, którego domknięcie jest zbiorem zwartym, nazywamy **zbiorem przewartym**. Przestrzeń topologiczną nazwiemy **lokalnie zwartą** (wzgl. **lokalnie przewartą**), jeśli każdy jej punkt zawiera się w pewnym zbiorze zwartym (wzgl. przewartym) zawierającym pewne otoczenie (otwarte) tego punktu. Wreszcie też przestrzeń topologiczną nazwiemy **ciągowo zwartą**, jeśli każdy ciąg jej elementów zawiera podciąg zbieżny do punktu w tej przestrzeni. Odwzorowanie między dwiema przestrzeniami topologicznymi, względem którego przeciwbrazy zbiorów zwartych są zwarte, zwie się **odwzorowaniem właściwym**.

**Przykład 2.** (Struktury)

- (1) **Topologia trywialna** na zbiorze  $X$  to  $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, X\}$ .
- (2) **Topologia dyskretna** na zbiorze  $X$  to  $\mathcal{T}(X) \equiv 2^X$ . Zbiór z topologią dyskretną określamy mianem **przestrzeni dyskretniej**.
- (3) **Topologia Hausdorffa** na zbiorze  $X$  to taka, w której każde dwa punkty  $x \neq y \in X$  mają otoczenia wzajem rozłączne. Zbiór z topologią Hausdorffa określamy mianem **przestrzeni Hausdorffa**.
- (4) **Topologia końcowa** (albo **mocna**) na zbiorze  $X$  **indukowana wzdłuż** rodziny odwzorowań  $f_\lambda : Y_\lambda \rightarrow X$ ,  $\lambda \in \Lambda$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y_\lambda)$  na zbiorach  $Y_\lambda$  to

$$f^{-1}(\mathcal{T})(X) = \{ \mathcal{O} \subset X \mid \forall \lambda \in \Lambda : f_\lambda^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}(Y_\lambda) \}.$$

W szczególności ilekroć mamy do czynienia z pojedynczą przestrzenią topologiczną  $(Y, \mathcal{T}(Y))$  odwzorowaną surjektywnie na  $X$ , odnośną topologią końcową określamy mianem **topologii ilorazowej** na zbiorze  $X$  **indukowanej wzdłuż**  $\pi : Y \rightarrow X$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y)$  na zbiorze  $Y$ , a zbiór  $X$  z topologią ilorazową – mianem **przestrzeni ilorazowej**. Wreszcie też w przypadku sumy rozłącznej

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{ (x, \lambda) \mid x \in X_\lambda, \lambda \in \Lambda \}$$

rodziny zbiorów  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  o odnośnych topologiach  $\mathcal{T}(X_\lambda)$ , indeksowanej przez zbiór (dowolny)  $\Lambda$ , topologią końcową indukowaną wzdłuż kanonicznych zanurzeń

$$\iota_\mu : X_\mu \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : x \mapsto (x, \mu), \quad \mu \in \Lambda$$

zwiemy **topologią sumy rozłącznej**.

- (5) **Topologia początkowa** (albo **słaba**) na zbiorze  $X$  **indukowana wzdłuż** rodziny odwzorowań  $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y_\lambda)$  na zbiorach  $Y_\lambda$  to topologia  $f^* \mathcal{T}(X)$  o podbazie

$$\mathcal{B}(X) = \{ f_\lambda^{-1}(\mathcal{O}_\lambda) \mid \mathcal{O}_\lambda \in \mathcal{T}(Y_\lambda), \lambda \in \Lambda \}.$$

Ilekroć mamy do czynienia z odwzorowaniem  $X$  w pojedynczą przestrzeń topologiczną  $(Y, \mathcal{T}(Y))$ , odnośną topologią początkową określamy mianem **topologii cofnięciowej** na zbiorze  $X$  **indukowanej wzdłuż** odwzorowania  $f : X \rightarrow Y$  **z topologii**  $\mathcal{T}(Y)$  na zbiorze  $Y$ . W szczególności w przypadku kanonicznej iniekcji podzbioru w przestrzeń topologiczną odnośna topologia początkowa jest tożsama z topologią podprzestrzeni. Z kolei dla produktu kartezjańskiego  $\times_{n=1}^N X_n$  (skończonej) rodziny zbiorów  $\{X_n\}_{n \in \overline{1, N}}$ ,  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  o odnośnych topologiach  $\mathcal{T}(X_n)$  topologia początkowa indukowana wzdłuż rzutów kanonicznych  $\text{pr}_m : \times_{n=1}^N X_n \rightarrow X_m$ ,  $m \in \overline{1, N}$  to standardowa **topologia produktowa**.

Zbiór  $\times_{n=1}^N X_n$  z topologią produktową nazywamy **przestrzenią produktową**. **Topologia zwarto-otwarta** na zbiorze  $C(X_1, X_2)$  odwzorowań ciągłych z przestrzeni Hausdorffa  $(X_1, \mathcal{T}(X_1))$  w przestrzeń Hausdorffa  $(X_2, \mathcal{T}(X_2))$  to topologia  $\mathcal{T}_{co}(C(X_1, X_2))$  o podstawie

$$\mathcal{B}(C(X_1, X_2)) = \{ \{ f \in C(X_1, X_2) \mid f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{O} \} \mid \mathcal{K} \text{ zwarty, } \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X_2) \}.$$

Mając w ręku konstrukcję topologii produktowej, możemy wysłowić obserwację dotyczącą przydatnej własności (niemal) moltiplikatywności odwzorowań ilorazowych, co czynimy w

**Stwierdzenie 35.** Przyjmijmy zapis Def. 22 i niechaj  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą otwartymi odwzorowaniami ilorazowymi między odnośnymi przestrzeniami topologicznymi  $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$  oraz  $(Y_\alpha, \mathcal{T}(Y_\alpha))$ . Odwzorowanie produktowe

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

jest wówczas odwzorowaniem ilorazowym względem topologii produktowej.

*Dowód:* Surjektywność  $f_1 \times f_2$  jest oczywistą konsekwencją surjektywności obu odwzorowań składowych. Istotnie, dla każdej składowej dowolnego punktu  $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$  znajdujemy punkt w przeciwobrazie  $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , a wtedy  $(y_1, y_2) = (f_1 \times f_2)(x_1, x_2)$ . Przechodząc do dyskusji podzbiorów otwartych w  $Y_1 \times Y_2$ , stwierdzamy, że warunek  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(Y_1 \times Y_2)$  jest równoważny istnieniu rodzin  $\{\mathcal{O}_i^\alpha\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(Y_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własności  $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{O}_i^1 \times \mathcal{O}_i^2)$ , przy czym otwartość elementów tych rodzin implikuje  $\{f_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_i^\alpha)\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Wówczas jednak przeciwobraz  $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} (f_1^{-1}(\mathcal{O}_i^1) \times f_2^{-1}(\mathcal{O}_i^2))$  jest sumą mnogościową produktów zbiorów otwartych i jako taki jest otwarty w topologii produktowej na  $X_1 \times X_2$ . Dowód implikacji odwrotnej wymaga skorzystania z otwartości odwzorowań składowych. Istotnie, otwartość  $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O})$  oznacza istnienie rodzin  $\{\mathcal{U}_j^\alpha\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}(X_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o własności  $(f_1 \times f_2)^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{j \in J} (\mathcal{U}_j^1 \times \mathcal{U}_j^2)$ , która pociąga za sobą równość  $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} (f_1(\mathcal{U}_j^1) \times f_2(\mathcal{U}_j^2))$ . Otwartość odwzorowań  $f_1$  i  $f_2$  gwarantuje otwartość każdego ze zbiorów  $f_1(\mathcal{U}_j^1)$  i  $f_2(\mathcal{U}_j^2)$ , ta zaś przesądza o przynależności  $\mathcal{O}$  do topologii produktowej  $\mathcal{T}(Y_1 \times Y_2)$ .  $\square$

W dalszej części dokonamy przeglądu stwierdzeń dotyczących pojęcia zwartości. Zaczynamy od ustalenia związku między różnymi jej rodzajami.

**Stwierdzenie 36.** Każda zwarta przestrzeń topologiczna spełniająca pierwszy aksjomat przeliczalności jest ciągowo zwarta.

*Dowód:* Niechaj  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  będzie ciągiem punktów w przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$  spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności. Załóżmy, że nie istnieje zbieżny podciąg ciągu  $x$ , a zatem – w świetle Stw. 33 – ciąg ten nie posiada punktów skupienia. Oznacza to, że dowolny punkt  $x \in X$  ma otoczenie  $\mathcal{O}_x$  zawierające jedynie skończoną liczbę wyrazów  $x$ . Utworzywszy z takich otoczeń pokrycie otwarte,  $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$ , możemy następnie – wobec zwartości  $X$  – wybrać z niego podpokrycie skończone  $\{\mathcal{O}_{x_n}\}_{n \in \overline{1, N}}$ , co jednak prowadzi do sprzeczności, oto bowiem każdy z elementów podpokrycia zawiera skończoną liczbę wyrazów  $x$ , co oznacza, że także przestrzeń  $X$  zawiera skończoną ich liczbę.  $\square$

W następnej kolejności porządkujemy relacje między pojęciami domkniętości i (para-)zwartości.

**Stwierdzenie 37.** Domknięty podzbiór zwartej przestrzeni topologicznej jest zwarty. Jeśli przestrzeń topologiczna jest przestrzenią Hausdorffa, to także – odwrotnie – dowolny jej zwarty podzbiór jest domknięty. Wreszcie też domknięty podzbiór parazwartej przestrzeni topologicznej jest parazwarty.

*Dowód:* Niechaj  $(X, \mathcal{T}(X))$  będzie zwartą (wzgl. parazwartą) przestrzenią topologiczną,  $\mathcal{K} \subset X$  zaś – jej domkniętym podzbiorem. Wybierzmy (dowolnie) otwarte pokrycie  $\mathcal{O}$  podzbioru  $\mathcal{K}$ . Zważywszy, że  $X \setminus \mathcal{K}$  jest otwarty,  $\tilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \cup \{X \setminus \mathcal{K}\}$  jest otwartym pokryciem  $X$ , z którego z

racji zwartości (wzgl. parazwartości)  $X$  możemy wybrać podpokrycie skończone (wzgl. lokalnie skończone). Usunąwszy z niego – jeśli trzeba –  $X \setminus \mathcal{K}$ , otrzymujemy skończone (wzgl. lokalnie skończone) podpokrycie (pokrycia  $\mathcal{O}$ ) podzbioru  $\mathcal{K}$ , którego istnienie dowodzi zwartości (wzgl. parazwartości)  $\mathcal{K}$ .

Niechaj teraz  $(X, \mathcal{T}(X))$  będzie przestrzenią Hausdorffa,  $\mathcal{K}$  zaś – jej zwartym podzbiorem. Rzecz jasna,  $\mathcal{K}$  z topologią podprzestrzeni jest także przestrzenią Hausdorffa. Wybierzmy (dowolnie) punkt  $x \in X \setminus \mathcal{K}$ . Musimy pokazać, że istnieje otoczenie (w rozumieniu Def. 24)  $\mathcal{O}_x \ni x$  o własności  $\mathcal{O}_x \subset X \setminus \mathcal{K}$ . Z racji hausdorffowskości  $X$  z dowolnym punktem  $y \in \mathcal{K}$  możemy stowarzyszyć parę zbiorów otwartych:  $\mathcal{U}_y \ni x$  oraz  $\mathcal{O}_y \ni y$  o własności  $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$ . Zbiór  $\{\mathcal{O}_y \mid y \in \mathcal{K}\}$  jest otwartym pokryciem  $\mathcal{K}$ , z którego wobec zwartości  $\mathcal{K}$  możemy wybrać skończone podpokrycie  $\{\mathcal{O}_{y_i} \mid i \in \overline{1, N}\}$ . Wybierzmy zbiory  $\mathcal{U}_{y_i} \ni x$  dla każdego z punktów  $y_i$  i zdefiniujmy zbiór

$$\mathcal{U} := \bigcap_{i=1}^N \mathcal{U}_{y_i},$$

jawnie otwarty, bo będący przecięciem skończonej rodziny zbiorów otwartych. Jako że  $x \in \mathcal{U}_{y_i}$  dla każdego indeksu  $i \in \overline{1, N}$ , stwierdzamy, że  $x \in \mathcal{U}$ . Wreszcie też  $z \in \mathcal{U}$  implikuje  $z \notin \mathcal{O}_{y_i}$  dla każdego indeksu  $i \in \overline{1, N}$ , przeto  $z \notin \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_{y_i} = \mathcal{K}$ . Zbiór  $\mathcal{U}$  ma zatem wszystkie pożądane własności.  $\square$

Przechodząc do dyskusji funkcji na przestrzeniach (pre)zwartych, znajdujemy nieco mniej elementarną relację

**Stwierdzenie 38.** Każde ciągłe odwzorowanie właściwe o dziedzinie spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności oraz lokalnie prezwartej przeciwdziedzinie jest domknięte.

*Dowód:* Niechaj  $f : X_1 \rightarrow X_2$  będzie ciągłym odwzorowaniem właściwym między przestrzeniami topologicznymi  $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i niech  $\mathcal{C} \subset X_1$  będzie zbiorem domkniętym. Wybrawszy dowolny punkt  $y \in f(\mathcal{C})$  w domknięciu  $f(\mathcal{C})$ , wnioskujemy – w odwołaniu do Stw. 34 – o istnieniu ciągu punktów  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f(\mathcal{C})$  zbieżnego do  $y$ ,

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Każdy z tych punktów ma swój przeciwobraz,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \mathcal{C} : f(x_n) = y_n.$$

Korzystając z lokalnej prezwartości  $X_2$ , wybierzmy dowolny prezwarty podzbiór  $\mathcal{K} \ni y$ , a wówczas relacja (20) implikuje istnienie indeksu  $N \in \mathbb{N}$  o własności

$$\forall n > N : y_n \in \mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{K}},$$

więc też

$$\forall n > N : x_n \in f^{-1}(\overline{\mathcal{K}}),$$

a ponieważ zbiór  $f^{-1}(\overline{\mathcal{K}})$  jest zwarty jako przeciwobraz zbioru zwartego, przeto istnieje – w świetle Stw. 36 – podciąg  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  zbieżny do punktu  $x \in f^{-1}(\overline{\mathcal{K}})$ . Jako że  $\mathcal{C} \supset \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  jest domknięty, zachodzi  $x \in \mathcal{C}$ , w takim jednak razie – wobec ciągłości  $f$  –

$$f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y,$$

skąd wniosek, że  $y \in f(\mathcal{C})$   $\square$

Transport struktury przestrzeni zwartej wzdłuż odwzorowań ciągłych, także przydatny w dalszej części wykładu, opisuje

**Stwierdzenie 39.** Przyjmijmy zapis Def. 22. Ciągły obraz zwartej przestrzeni topologicznej jest zwarty.

*Dowód:* Niechaj  $(K, \mathcal{T}(K))$  i  $(X, \mathcal{T}(X))$  będą przestrzeniami topologicznymi, przy czym zakładamy, że  $K$  jest zwarta, i niech  $f : K \rightarrow X$  będzie odwzorowaniem ciągłym. Wybierzmy



(dowolnie) otwarte pokrycie  $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  obrazu  $f(K)$ . Wobec ciągłości  $f$  zbiór  $\{f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  jest otwartym pokryciem  $K$ , z którego możemy wybrać skończone podpokrycie  $\{f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda_0 \subset \Lambda}$ ,  $|\Lambda_0| < \infty$ . Zbiór  $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in S}$  jest wówczas skończonym podpokryciem obrazu i jego istnienie przesądza o zwartości tego ostatniego.  $\square$

Wreszcie na koniec przypomnimy pojęcia, które odegrają istotną rolę w przyszłej dyskusji geometrycznych aspektów algebry homologicznej.

**Definicja 27.** Przyjmijmy zapis Def.22. Przestrzeń topologiczną  $(X, \mathcal{T}(X))$  nazywamy **nie-spójną**, jeśli istnieją zbiory  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}(X) \setminus \{\emptyset\}$  o własnościach

$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = X \quad \wedge \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

Ilekoć zbiory o tych własnościach nie istnieją, przestrzeń  $X$  określamy mianem **spójnej**. Każdy podzbiór  $X$ , który jako podprzestrzeń topologiczna jest spójny, zwie się **(pod)zbiorem spójnym**. Określiwszy w  $X$  relację równoważności

$$x \sim y \quad \iff \quad \exists Y \subset X : ( Y \text{ spójny} \wedge x, y \in Y ),$$

klasy abstrakcji tej relacji (czyli podzbiory spójne maksymalne w sensie relacji  $\subseteq$ ) nazwiemy jej **składowymi spójnymi**. Składowa spójna  $X$  zawierająca punkt  $x \in X$  bywa nazywana **składową spójną punktu  $x$** . **Przestrzeń lokalnie spójna** to taka, której każdy punkt ma bazę otoczeń złożoną ze zbiorów spójnych.

**Ścieżka (ciągła)** w  $X$  z punktu  $x \in X$  do punktu  $y \in Y$  to odwzorowanie ciągle  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  spełniająca warunki  $(\gamma(0), \gamma(1)) = (x, y)$ . Ścieżka zamknięta, tj. taka, która spełnia warunek  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , jest nazywana **pętlą (zaczepioną w  $\gamma(0)$ )**. Zbiór pętli w  $X$  wyposażony w topologię zwarto-otwartą z Przykł. 2 (6) nazywamy **przestrzenią pętli (swobodnych)** i oznaczamy symbolem

$$\mathbb{L}X \equiv (C(\mathbb{S}^1, X), \mathcal{T}_{\text{co}}(C(\mathbb{S}^1, X))).$$

Istnienie ścieżki łączącej punkty określa na  $X$  relację równoważności

$$x \sim_p y \quad \iff \quad \exists \gamma \in C([0, 1], X) : ( \gamma(0) = x \quad \wedge \quad \gamma(1) = y ),$$

której klasy abstrakcji nazwiemy jej **składowymi drogowo spójnymi**. Składowa drogowo spójna  $X$  zawierająca punkt  $x \in X$  bywa nazywana **składową drogowo spójną punktu  $x$** . Przestrzeń topologiczna (niepusta) o jednej składowej drogowo spójnej to **przestrzeń drogowo spójna** (albo **0-spójna**). **Przestrzeń lokalnie drogowo spójna** to taka, której każdy punkt ma bazę otoczeń złożoną ze zbiorów drogowo spójnych.

Dla dowolnych przestrzeni topologicznych  $(X_\alpha, \mathcal{T}(X_\alpha))$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i odcinka  $I \equiv [0, 1]$  (wyposażonego w topologię podprzestrzeni indukowaną z  $\mathbb{R}$ ) oraz pary odwzorowań ciągłych  $f_\beta : X_1 \rightarrow X_2$ ,  $\beta \in \{0, 1\}$  odwzorowanie ciągle

$$H : X_1 \times I \rightarrow X_2$$

spełniające warunki

$$\forall x \in X_1 : ( H(x, 0) = f_0(x) \quad \wedge \quad H(x, 1) = f_1(x) )$$

nosi miano **homotopii od  $f_0$  do  $f_1$** . Dowolne dwa odwzorowania, dla których istnieje odnośna homotopia, nazwiemy **homotopijnymi**. Ilekoć na pewnym (niepustym) podzbiórze  $Y_1 \subset X_1$  homotopia  $H$  od  $f_0$  do  $f_1$  oraz powiązane przez nią odwzorowania spełniają warunek

$$\forall (y, t) \in Y_1 \times I : f_0(y) = H(y, t) = f_1(y),$$

mówimy, że odwzorowania  $f_0$  i  $f_1$  są **homotopijne względem  $Y_1$** . Homotopijność (względem  $Y_1$ ) jest relacją równoważności na zbiorze  $C(X_1, X_2)$  odwzorowań ciągłych z  $X_1$  do  $X_2$ , a jej klasy abstrakcji nazywamy **klasami homotopii (względem  $Y_1$ )**. W szczególności w przypadku  $X_1 = I$  oraz  $Y_1 = \{0, 1\}$  ścieżki homotopijne względem  $Y_1$  nazywamy **drogowo homotopijnymi**. Klasę

abstrakcji ścieżki  $\gamma$  względem relacji drogowej homotopii będziemy oznaczać symbolem  $[\gamma]_{\text{ph}}$ . Przestrzeń drogowo spójna  $X$ , w której spełniony jest warunek

$$\forall_{\gamma \in \text{LX}} : [\gamma]_{\text{ph}} = [\gamma(0)_*]_{\text{ph}},$$

w którego zapisie  $\gamma(0)_*$  oznacza pętlę stałą  $\gamma(0)_* : [0, 1] \rightarrow \{\gamma(0)\} \subset X$ , nosi miano **przestrzeni jednospójnej** (wzgl. **1-spójnej**). Każdy podzbiór  $X$ , który jako podprzestrzeń topologiczna jest jednospójny, zwie się **(pod)zbiorem jednospójnym** (wzgl. **1-spójnym**).

**Nakrycie (topologiczne)** to trójka  $(\tilde{X}, X, \pi)$  złożona z drogowo spójnej i lokalnie drogowo spójnej przestrzeni topologicznej  $(\tilde{X}, \mathcal{T}(\tilde{X}))$ , zwanej **przestrzenią nakrywającą** (lub **przestrzenią totalną nakrycia**), i przestrzeni topologicznej  $(X, \mathcal{T}(X))$ , zwanej **bazą nakrycia**, oraz ciągłej surjekcji  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ , zwanej **rzutem nakrycia**, przy czym każdy punkt  $x \in X$  ma spójne otoczenie  $\mathcal{O}_x$  **równomiernie pokryte** przez  $\pi$ , tj. takie, że każda spójna składowa przeciwbrazu  $\pi^{-1}(\mathcal{O}_x)$ , zwana **gałęzią nakrycia**, jest przez  $\pi$  odwzorowywana homeomorficznie na  $\mathcal{O}_x$ . Przestrzeń dyskretną  $\pi^{-1}(\{x\}) \equiv \tilde{X}_x$  nazywamy **włóknem nakrycia nad  $x$** , a jego moc, lokalnie stałą na bazie (czyli stałą na spójnych składowych bazy), określamy mianem **krotności nakrycia**. Nakrycie o globalnie stałej krotności  $n \in \mathbb{N}$  zwie się **nakryciem  $n$ -krotnym**. Ilekroć przestrzeń nakrywająca jest jednospójna, mówimy o **nakryciu uniwersalnym**.

**Uwaga 11.** Jest oczywiste, że każda przestrzeń 0-spójna jest zarazem spójna. O tym, że oba pojęcia nie są równoważne, przekonuje analiza **sinusoidy zagęszczonej** (zwanej też **sinusoidą warszawską**), czyli zbioru

$$S := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in ]0, \frac{1}{\pi}] \right\} \cup \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1, 1] \right\}$$

wyposażonego w topologię podprzestrzeni indukowaną z  $\mathbb{R}^2$ .

#### DODATEK B. FUNDAMENTALNE STRUKTURY I TWIERDZENIA ANALIZY

Dyskusja własności analitycznych (wyższego rzędu) odwzorowań między przestrzeniami topologicznymi lokalnie modelowanymi na (otwartych podzbiórach)  $\mathbb{R}^{x_n}$ , a zatem także – w konsekwencji powyższego – analiza strukturalnych relacji między rzeczonymi przestrzeniami (takich jak zanurzenie, nakrycie *etc.*), w szczególności zaś zrozumienie (lokalnych) automorfizmów tychże przestrzeni indukowanych przez gładkie rozkłady wektorów stycznych nad nimi, wymagają elementarnych narzędzi teorii przestrzeni Banacha, które rekapitulujemy zwięźle w niniejszym dodatku. Zaczynamy od

**Definicja 28.** **Metryka** na zbiorze  $X$  to odwzorowanie

$$d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

o własnościach:

(MS1)  $\forall_{x, y, z \in X} : d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z)$  („nierówność trójkąta”);

(MS2)  $\forall_{x, y \in X} : d_X(y, x) = d_X(x, y)$  (symetria);

(MS3)  $\forall_{x, y \in X} : (d_X(x, y) = 0 \implies y = x)$  (niezwyrodnienie).

Para  $(X, d_X)$  złożona ze zbioru  $X$  wyróżnioną metryką  $d_X$  nosi miano **przestrzeni metrycznej**. Dwie metryki  $d_X^1$  i  $d_X^2$  na zbiorze  $X$  nazwiemy **równoważnymi**, jeśli istnieją stałe  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{> 0}$  o własności

$$\forall_{x, y \in X} : C_1 \cdot d_X^1(x, y) \leq d_X^2(x, y) \leq C_2 \cdot d_X^1(x, y).$$

**Kula otwarta o środku w  $x \in X$  i promieniu  $R \in \mathbb{R}_{> 0}$**  to zbiór

$$B_X(x; R) := \{ y \in X \mid d_X(y, x) < R \}.$$

Topologia przestrzeni metrycznej złożona z podzbiorów  $\mathcal{O} \subset X$  spełniających warunek

$$\forall_{x \in \mathcal{O}} \exists_{R \in \mathbb{R}_{> 0}} : B_X(x; R) \subset \mathcal{O},$$

a więc mająca za bazę zbiór wszystkich kul otwartych w  $X$ , jest znana jako **topologia metryczna**.

**Podzbiór ograniczony  $\mathcal{B}$**  w przestrzeni metrycznej  $(X, d_X)$  to taki, który spełnia warunek

$$\exists_{R \in \mathbb{R}_{> 0}} \forall_{x, y \in \mathcal{B}} : d_X(x, y) \leq R.$$

Odwzorowanie  $f : S \rightarrow X$  ze zbioru  $S$  w przestrzeń metryczną  $X$  nazwiemy **ograniczonym**, jeśli jego zbiór wartości  $f(S) \subset X$  jest ograniczony. Pośród odwzorowań między przestrzeniami metrycznymi  $(X_1, d_{X_1})$  i  $(X_2, d_{X_2})$  wyróżniamy **izometrie**, tj. odwzorowania  $f : X_1 \rightarrow X_2$  o własności

$$\forall_{x,y \in X_1} : d_{X_2}(f(x), f(y)) = d_{X_1}(x, y).$$

Przestrzenie metryczne wraz z izometriami tworzą **kategorię przestrzeni metrycznych**, którą w dalszej części naszych rozważań będziemy oznaczać symbolem **Metr**. W kategorii tej istnieje struktura produktowa – w szczególności ustaliwszy dowolnie  $p \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ , **iloczynem kartezjańskim typu  $p$  przestrzeni metrycznych**  $(X_k, d_{X_k})$ ,  $k \in \overline{1, N}$ ,  $N \in \mathbb{N}^\times$  będziemy nazywać przestrzeń metryczną

$$\left( \prod_{k=1}^N X_k, d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} \right)$$

z **metryką produktową typu  $p$**  daną formułą

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} : \prod_{k=1}^N X_k \times \prod_{l=1}^N X_l &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &: ((x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N)) \longmapsto \left( \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

dla  $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ , wzgl.

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} : \prod_{k=1}^N X_k \times \prod_{l=1}^N X_l &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ &: ((x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N)) \longmapsto \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, y_k). \end{aligned}$$

**Ciąg Cauchy’ego** w przestrzeni metrycznej to dowolny ciąg  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  o własności

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{m, n > N_\varepsilon} : d_X(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jeśli każdy ciąg Cauchy’ego punktów z  $X$  ma granicę w  $X$  w sensie Def. 25 w topologii metrycznej, tj. istnieje dlań punkt  $x \in X$  o własności

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n > N_\varepsilon} : d_X(x, x_n) < \varepsilon,$$

to wówczas  $X$  określamy mianem **zpełnej przestrzeni metrycznej**.

**Norma** na grupie przemiennej  $G$  to odwzorowanie

$$\|\cdot\| : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

o własnościach:

- (NG1)  $\forall_{g, h \in G} : \|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|$  („nierówność trójkąta”);
- (NG2)  $\forall_{(n, g) \in \mathbb{Z} \times G} : \|ng\| = |n| \cdot \|g\|$  (absolutna  $\mathbb{Z}$ -jednorodność stopnia 1);
- (NG3)  $\forall_{g \in G} : (\|g\| = 0 \implies g = 0_G)$  (niezwyródnienie).

Grupę z wyróżnioną normą nazywamy **grupą unormowaną** (lub **grupą z normą**). Analogicznie definiujemy **unormowany pierścień przemienny** (lub **pierścień przemienny z normą**) jako taki, którego grupa przemiennej (z dodawaniem) jest grupą unormowaną, a do tego spełniony jest aksjomat

$$(NR1) \quad \forall_{g, h \in G} : \|g \cdot_R h\| \leq \|g\| \cdot \|h\|.$$

Ilekość pierścienia niesie bogatszą strukturę ciała, mówimy o **ciele unormowanym** (lub **ciele z normą**). Wreszcie też **unormowana przestrzeń wektorowa** (lub **przestrzeń wektorowa z normą**) to przestrzeń liniowa  $V$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  z normą  $\|\cdot\|_{\mathbb{K}}$ , w której grupa przemiennej  $V$  jest wyposażona w normę  $\|\cdot\|_V$  o dodatkowej własności

$$(NV1) \quad \forall_{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V} : \|\lambda \triangleright v\|_V = \|\lambda\|_{\mathbb{K}} \cdot \|v\|_V.$$

Norma na przestrzeni wektorowej indukuje na niej (jawnie translacyjnie niezmienniczą) metrykę

$$\forall v, w \in V : d_V(v, w) := \|v - w\|_V.$$

Unormowaną przestrzeń wektorową zupełną względem tejże metryki określamy mianem **przestrzeni Banacha**.

**Ograniczony operator liniowy** między przestrzeniami Banacha  $(V_1, \|\cdot\|_1)$  i  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  to odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe  $\chi : V_1 \rightarrow V_2$ , dla którego istnieje stała  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  o własności

$$\forall v \in V_1 : \|\chi(v)\|_2 \leq C \cdot \|v\|_1.$$

Przestrzeń  $\mathbb{K}$ -liniową powyższych ograniczonych operatorów liniowych będziemy oznaczać symbolem

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \equiv \{ \chi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \mid \chi \text{ ograniczony} \},$$

stosując także notację skróconą

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V) \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V, V).$$

Przestrzenie Banacha wraz z ograniczonymi operatorami liniowymi tworzą **kategorię przestrzeni Banacha** (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ), którą w dalszej części naszych rozważań będziemy oznaczać symbolem  $\text{Ban}_{\mathbb{K}}$ .

**Uwaga 12.** Jedynym nieoczywistym elementem powyższej definicji jest konstrukcja metryk produktowych  $d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}$ , a ściśle – nierówność trójkąta dla zapostulowanej metryki. Oznaczmy  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  i  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ . Jej dowód w przypadku  $p = \infty$  jest natychmiastowy:

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(x, y) &\equiv \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, y_k) \leq \max_{k \in \overline{1, N}} (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k)) \\ &\leq \max_{k \in \overline{1, N}} d_{X_k}(x_k, z_k) + \max_{l \in \overline{1, N}} d_{X_l}(z_l, y_l) \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)}(z, y). \end{aligned}$$

Podobnie jest w przypadku  $p = 1$ ,

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(x, y) &\equiv \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k) \leq \sum_{k=1}^N (d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k)) \\ &= \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, z_k) + \sum_{l=1}^N d_{X_l}(z_l, y_l) \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)}(z, y). \end{aligned}$$

Natomiast przypadek  $p \in ]1, \infty[$  jest nieco bardziej złożony i wymaga wykorzystania układu nierówności, które obecnie przedyskutujemy. Ustaliwszy dowolnie wartość parametru  $\alpha \in ]0, 1[$ , rozważmy funkcję

$$f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha t - t^\alpha.$$

Jako że

$$f'(t) = \alpha(1 - t^{\alpha-1}),$$

przeto funkcja ta maleje ściśle monotonicznie na przedziale  $]0, 1[$ , osiąga minimum globalne w  $t = 1$ , a następnie rośnie ściśle monotonicznie na przedziale  $]1, \infty[$ . To pozwala zapisać nierówność

$$\forall t \in ]0, \infty[ : \alpha t - t^\alpha = f(t) \geq f(1) = \alpha - 1.$$

Przedstawiając  $t \in ]0, \infty[$  w postaci ilorazu  $t = \frac{a}{b}$  liczb dodatnich  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , otrzymujemy tym sposobem nierówność

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b,$$

która – gdy wyrazić ją w terminach  $p = \frac{1}{\alpha}$  oraz  $q = \frac{1}{1-\alpha}$  – przybiera postać

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Podstawienie  $A := a^{\frac{1}{p}}$  i  $B := b^{\frac{1}{q}}$  prowadzi nas do **nierówności Younga**

$$\forall_{A,B \in \mathbb{R}_{\geq 0}} : AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

(nierówność rozszerza się trywialnie na przypadek  $AB = 0$ , którego nie obejmują nasze dotychczasowe rozważania), słusznej dla liczb  $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$  **hölderowsko sprzężonych**, tj. takich, które spełniają warunek

$$(21) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O optymalnej naturze powyższego oszacowania przekonuje rozumowanie analogiczne do powyższego poprowadzone w odniesieniu do równoważności

$$f(t) = f(1) \iff t = 1,$$

które pokazuje, że nierówność jest wysycana (jedyne) przy  $A^p = B^q$ . Połóżmy następnie  $A := \lambda a_i$  oraz  $B := \mu b_i$  dla  $\lambda, \mu, a_i, b_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  oraz  $i \in \overline{1, N}$ , po czym przesuwamy stronami uzyskane tym sposobem nierówności,

$$\lambda \mu \sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \frac{\lambda^p \sum_{i=1}^N a_i^p}{p} + \frac{\mu^q \sum_{j=1}^N b_j^q}{q}.$$

Wybór

$$\lambda := \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{-\frac{1}{p}}, \quad \mu := \left( \sum_{i=1}^N b_i^q \right)^{-\frac{1}{q}},$$

poczyniony przy założeniu niezerowości którejś z liczb  $a_i$  oraz którejś z liczb  $b_i$ , odtwarza **nierówność Höldera** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall_{(a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N} : \sum_{i=1}^N a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

W szczególnym przypadku  $p = 2 = q$  otrzymujemy **nierówność Schwarz** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall_{(a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N} : \left( \sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N a_i^2 \cdot \sum_{j=1}^N b_j^2.$$

Na zakończenie naszego wywodu zapiszmy (w dotychczasowych oznaczeniach) zastosujemy otrzymaną wcześniej nierówność Höldera do każdego ze składników prawej strony równości

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^N a_i \cdot (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{j=1}^N b_j \cdot (a_j + b_j)^{p-1},$$

otrzymując oszacowanie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (a_i + b_i)^p &\leq \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N (a_j + b_j)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{k=1}^N b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{l=1}^N (a_l + b_l)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wykorzystuje warunek (21). Dzieliąc ostatnią nierówność obustronnie przez  $(\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{q}}$  i korzystając raz jeszcze z warunku (21), otrzymujemy na koniec wielce pożądaną **nierówność Minkowskiego** (wariant rzeczywisty nieujemny)

$$\forall_{(a_1, a_2, \dots, a_N), (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}_{\geq 0}} : \left( \sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^N a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^N b_j^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

słuszną dla dowolnego  $p \in ]1, \infty[$ , a także – rzecz jasna – dla  $p = 1$  oraz w granicy (rozumianej jak wcześniej)  $p \rightarrow \infty$ . Na podstawie powyższej nierówności bez trudu dowodzimy, dla dowolnego  $p \in ]1, \infty[$ ,

$$\begin{aligned} d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}(x, y) &\equiv \left( \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{k=1}^N \left( d_{X_k}(x_k, z_k) + d_{X_k}(z_k, y_k) \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^N d_{X_k}(x_k, z_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{l=1}^N d_{X_l}(z_l, y_l)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\equiv d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}(x, z) + d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)}(z, y). \end{aligned}$$

**Przykład 3.** (Struktury)

(1) Przestrzeń  $\mathbb{R}$ -liniowa  $\mathbb{R}^{\times N}$ ,  $N \in \mathbb{N}^{\times}$  wraz z pitagorejską miarą odległości

$$\|y - x\|_N := \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2} \equiv d_{\mathbb{R}^{\times N}}^{(2)},$$

między punktami  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{\times N}$  i  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{\times N}$ , którą będziemy także określać mianem **normy euklidesowej**, jest przestrzenią Banacha. Jest to, rzecz jasna, przestrzeń Hausdorffa. Kulę otwartą w tej przestrzeni o środku w  $x \in \mathbb{R}^{\times N}$  i promieniu  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  będziemy oznaczać symbolem

$$B_{\mathbb{R}^{\times N}}(x; R) \equiv B^N(x; R).$$

Z kolei  **$N$ -kostką** nazwiemy dowolny zbiór postaci

$$(22) \quad \prod_{i=1}^N [a_i, b_i] \equiv \{ (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{\times N} \mid \forall_{n \in \overline{1, N}} : a_i \leq x_i \leq b_i \},$$

zdefiniowany dla dowolnych  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{1, N}$ . Standardową topologię metryczną na  $\mathbb{R}^{\times N}$  zadawaną przez normę euklidesową będziemy oznaczać symbolem

$$\mathcal{T}_E(\mathbb{R}^{\times N}).$$

(2)

Relacje między wprowadzonymi powyżej produktowymi strukturami metrycznymi porządkuje

**Stwierdzenie 40.** Przyjmijmy zapis Def. 28. Metryki produktowe typu  $p \in \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$  są wzajemnie równoważne.

*Dowód:* Oznaczmy  $d_k := d_{X_k}(x_k, y_k)$ . Na podstawie ciągu nierówności

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N d_k &\leq N \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k \leq N \cdot \left( \sum_{k=1}^N d_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq N \cdot \left( N \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \equiv N^{\frac{p+1}{p}} \cdot \max_{k \in \overline{1, N}} d_k \\ &\leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^N d_k, \end{aligned}$$

zapisanego dla  $p \in ]1, \infty[$ , wnioskujemy, że

$$d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)} \leq N \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} \leq N \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(p)} \leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(\infty)} \leq N^{\frac{p+1}{p}} \cdot d_{\prod_{k=1}^N X_k}^{(1)},$$

co przesądza o równoważności wszystkich rozpatrywanych metryk.  $\square$

Definicja metryki implikuje oczywiste, acz przydatne

**Stwierdzenie 41.** Przyjmijmy zapis Def. 28. W przestrzeni metrycznej  $(X, d_X)$  zachodzi relacja

$$\forall x, y, z \in X : |d_X(x, y) - d_X(z, y)| \leq d_X(x, z),$$

w szczególności więc w unormowanej przestrzeni wektorowej  $(V, \|\cdot\|_V)$  spełniony jest warunek

$$\forall v, w \in V : \left| \|v\|_V - \|w\|_V \right| \leq \|v - w\|_V.$$

*Dowód:* Bezpośrednia konsekwencja nierówności trójkąta oraz symetrii metryki.  $\square$

Obecność struktury metrycznej pozwala wprowadzić wygodną, a w pełni równoważną definicję ciągłości, którą opisuje

**Stwierdzenie 42.** Przyjmijmy zapis Def. 28 i niechaj  $(X_\alpha, d_{X_\alpha}), \alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  jest ciągle w punkcie  $x_0 \in X_1$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(23) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, x_0} \forall x \in X_1 : \left( d_{X_1}(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, x_0} \implies d_{X_2}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \right).$$

*Dowód:* Załóżmy, że  $f$  jest ciągle, a wtedy przeciwobraz  $f^{-1}(B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon)) \ni x_0$  kuli otwartej  $B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon)$ , czyli zbioru punktów  $y \in X_2$  spełniających warunek  $d_{X_2}(y, f(x_0)) < \varepsilon$ , jest otwarty w  $X_1$ , zatem – wprost z definicji – zawiera pewną kulę  $B_{X_1}(x_0; \delta_{\varepsilon, x_0}), \delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ , czyli zbiór punktów  $x \in X_1$  spełniających warunek  $d_{X_1}(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, x_0}$ . I odwrotnie – przyjmijmy, że jest spełniony warunek (23). Dowolne otoczenie  $\mathcal{O} \subset X_2$  punktu  $f(x_0)$  zawiera pewną kulę  $B_{X_2}(f(x_0); \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ , w której przeciwobrazie względem  $f$  zawiera się kula  $B_{X_1}(x_0; \delta_{\varepsilon, x_0})$  – ta ostatnia jest poszukiwanym otoczeniem  $x_0$ .  $\square$

Powyższe pozwala zrozumieć funkcjonalny sens warunku równoważności metryk na przestrzeni wektorowej, który ukazują

**Stwierdzenie 43.** Odwzorowanie pomiędzy dwiema przestrzeniami metrycznymi ciągle względem topologii metrycznych indukowanych przez parę metryk na jego dziedzinie i przeciwdziedzinie jest ciągle względem topologii metrycznych indukowanych przez każdą inną parę metryk równoważnych.

*Dowód:* Posłużymy się definicją ciągłości ze Stw. 42, zaadaptowaną do kategorii metrycznej. Rozważmy odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  między parą przestrzeni metrycznych  $(X_\alpha, d_{X_\alpha}), \alpha \in \{1, 2\}$  ciągle w punkcie  $x_0 \in X_1$  w odnośnych topologiach metrycznych, tj. spełniające warunek (23). Niechaj  $\tilde{d}_{X_\alpha}$  będzie metryką na  $X_\alpha$  równoważną z  $d_{X_\alpha}$ , tj. spełniającą układ warunków

$$\forall x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha : C_{\alpha,1} \cdot d_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) \leq \tilde{d}_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) \leq C_{\alpha,2} \cdot d_{X_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha), \quad \alpha \in \{1, 2\}.$$

Wówczas wybierając, dla ustalonego  $\varepsilon > 0$ , ograniczenie postaci  $\tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0} := C_{1,1} \cdot \delta_{\frac{\varepsilon}{C_{2,2}}, x_0}$  w

$$\tilde{d}_{X_1}(x, x_0) < \tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0},$$

otrzymujemy ograniczenie

$$d_{X_1}(x, x_0) \leq \frac{1}{C_{1,1}} \cdot \tilde{d}_{X_1}(x, x_0) < \frac{1}{C_{1,1}} \cdot \tilde{\delta}_{\varepsilon, x_0} \equiv \delta_{\frac{\varepsilon}{C_{2,2}}, x_0},$$

z stąd

$$\tilde{d}_{X_2}(f(x), f(x_0)) \leq C_{2,2} \cdot d_{X_2}(f(x), f(x_0)) < C_{2,2} \cdot \frac{\varepsilon}{C_{2,2}} = \varepsilon.$$

$\square$

Aksjomatyka struktury metrycznej prowadzi wprost do naturalnego, a przy tym nader przydatnego

**Stwierdzenie 44.** Przyjmijmy zapis Def. 28. Metryka  $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  jest odwzorowaniem ciągłym względem topologii w swej dziedzinie  $X \times X$  indukowanej przez metrykę produktową typu  $p \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  oraz topologii na  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  indukowanej przez metrykę euklidesową (na  $\mathbb{R}$ ). W szczególności więc także dowolna norma na grupie przemiennej ma tę własność.

*Dowód:* Wobec równoważności wszystkich metryk typu  $p$  na  $X \times X$ , orzeczonej w Stw. 40, możemy – na gruncie Stw. 43 – ograniczyć nasze rozważania do metryki  $d_{X \times X}^{(1)}$ . Korzystając ze Stw. 41, obliczamy zatem, dla dowolnych  $(x, y), (x_0, y_0) \in X \times X$ ,

$$\begin{aligned} |d_X(x, y) - d_X(x_0, y_0)| &\equiv |d_X(x, y) - d_X(x_0, y) + d_X(x_0, y) - d_X(x_0, y_0)| \\ &\leq |d_X(x, y) - d_X(x_0, y)| + |d_X(x_0, y) - d_X(x_0, y_0)| \\ &\leq d_X(x, x_0) + d_X(y, y_0) \equiv d_{X \times X}^{(1)}((x, y), (x_0, y_0)), \end{aligned}$$

co prowadzi nas do wniosku, że dla uzyskania – dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  – ograniczenia

$$|d_X(x, y) - d_X(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

przesądzającego o ciągłości metryki w punkcie  $(x_0, y_0) \in X \times X$  jej dziedziny, wystarczy narzucić ograniczenie

$$d_{X \times X}^{(1)}((x, y), (x_0, y_0)) < \varepsilon =: \delta_{\varepsilon, (x_0, y_0)}.$$

□

Obecność struktury metrycznej na dziedzinie i przeciwdziedzinie odwzorowania (w szczególności zaś analiza dowodu ostatniego stwierdzenia) pozwala wysubtelnić pojęcie ciągłości, co prowadzi do

**Definicja 29.** Przyjmijmy zapis Def. 28. Odwzorowanie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  między przestrzeniami metrycznymi  $(X_\alpha, d_{X_\alpha})$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nazwiemy **jednostajnie ciągłym**, jeśli spełnia warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in X_1 : (d_{X_1}(x, y) < \delta_\varepsilon \implies d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Mamy w tym kontekście podstawowe

**Stwierdzenie 45.** Odwzorowanie ciągle o zwartej dziedzinie jest jednostajnie ciągłe.

*Dowód:* Rozważmy odwzorowanie ciągle  $f : X_1 \rightarrow X_2$  o zwartej dziedzinie  $X_1$ . Ustalmy (dowolnie)  $\varepsilon > 0$ . Ciągłość  $f$  oznacza, że każdy z punktów  $x \in X_1$  należy do przeciwobrazu  $f^{-1}(B_{X_2}(f(x); \varepsilon))$  otwartej kuli  $B_{X_2}(f(x); \varepsilon)$  wraz z pewnym otoczeniem otwartym, więc też – wraz z pewną kulą otwartą  $B_{X_1}(x; r_{x, \varepsilon})$ . Rodzina kul  $\{B_{X_1}(x; \frac{r_{x, \varepsilon}}{2})\}_{x \in X_1}$  stanowi pokrycie otwarte  $X_1$ , z którego wobec zwartości tej przestrzeni można wybrać podpokrycie skończone  $\mathcal{B} \equiv \{B_{X_1}(x_n; \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2})\}_{n \in \overline{1, N}}$ . Oznaczmy

$$\delta_\varepsilon := \min_{n \in \overline{1, N}} \left\{ \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} \right\},$$

a wówczas nierówności

$$d_{X_1}(y, x) < \delta_\varepsilon, \quad d_{X_1}(x, x_n) < \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} < r_{x_n, \varepsilon},$$

z których druga jest spełniona dla pewnego  $n \in \overline{1, N}$  (wszak  $\mathcal{B}$  jest pokryciem  $X_1$ ), implikują relację

$$d_{X_1}(y, x_n) \leq d_{X_1}(y, x) + d_{X_1}(x, x_n) < 2 \cdot \frac{r_{x_n, \varepsilon}}{2} = r_{x_n, \varepsilon},$$

ta zaś oznacza, że  $y$  tak jak  $x$  leży wewnątrz kuli  $B_{X_1}(x; r_{x, \varepsilon})$  i – co za tym idzie – spełnia wielce pożądany warunek

$$f(y) \in B_{X_2}(f(x); \varepsilon).$$

□

Nader istotnej egzemplifikacji pojęcia przestrzeni Banacha dostarcza



**Stwierdzenie 46.** Przyjmijmy zapis Def. 28. Niechaj  $(X, d_X)$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $V$  będzie przestrzenią Banacha nad ciałem  $\mathbb{K}$  względem normy  $\|\cdot\|_V$ . Przestrzeń  $C_b(X, V)$  ograniczonych odwzorowań ciągłych na  $X$  o wartościami w  $V$  jest przestrzenią Banacha względem **normy supremum**

$$\|\cdot\|_\infty : C_b(X, V) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V.$$

*Dowód:* Jest oczywistym, że para  $(C_b(X, V), \|\cdot\|_\infty)$  jest przestrzenią unormowaną. W szczególności supremum (normy) sumy jest majoryzowane przez sumę supremów (norm), więc

$$\|f + g\|_\infty \equiv \sup_{x \in X} \|f(x) +_V g(x)\|_V \leq \sup_{x \in X} \|f(x)\|_V + \sup_{x \in X} \|g(x)\|_V = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Pozostaje wykazać zupełność  $(C_b(X, V), \|\cdot\|_\infty)$ . W tym celu rozważmy ciąg Cauchy'ego  $f : \mathbb{N} \longrightarrow C_b(X, V) : n \longmapsto f_n$ . W dowolnym punkcie  $x \in X$  definiuje on ciąg  $f(x) : \mathbb{N} \longrightarrow V : n \longmapsto f_n(x)$ , który także jest ciągiem Cauchy'ego, oto bowiem

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_V \leq \sup_{y \in X} \|f_n(y) - f_m(y)\|_V \equiv \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Wobec zupełności  $V$  otrzymujemy zatem odwzorowanie

$$f : X \longrightarrow V : x \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)).$$

Bez trudu dowodzimy, że odwzorowanie to jest ciągłe. Istotnie, ustalwszy (dowolnie)  $\varepsilon > 0$ , wybierzmy  $N \in \mathbb{N}$  tak, by było

$$\forall_{m, n \geq N} : \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

a wtedy w dowolnym punkcie  $x \in X$  stwierdzamy, że

$$\|f_m(x) - f_n(x)\|_V \leq \sup_{y \in X} \|f_m(y) - f_n(y)\|_V \equiv \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

więc też (wobec ciągłości  $\|\cdot\|_V$ )

$$\|f(x) - f_n(x)\|_V = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m(x) - f_n(x)\|_V < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Korzystając z ciągłości  $f_n$  w (dowolnym) punkcie  $x \in X$ , możemy następnie dobrać  $\delta > 0$  tak, by było

$$\forall_{y \in X} : [ d(x, y) < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\|_V < \frac{\varepsilon}{3} ],$$

a wtedy, ostatecznie,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_V &\leq \|f(x) - f_n(x)\|_V + \|f_n(x) - f_n(y)\|_V + \|f_n(y) - f(y)\|_V \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

co dowodzi ciągłości  $f$  w  $x \in X$ , czyli też – wobec dowolności  $x$  – ciągłości w całej dziedzinie.

W następnej kolejności pokażemy, że  $f$  jest ograniczone. Wybierzmy  $n > N$  dla  $N \in \mathbb{N}$  jak wyżej, a wtedy

$$\|f - f_n\|_\infty \equiv \sup_{x \in X} \|f(x) - f_n(x)\|_V = \sup_{x \in X} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{N+m}(x) - f_n(x)\|_V < \sup_{x \in X} \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon,$$

co pokazuje, że  $f$  jest punktem skupienia ciągu  $f$  w przestrzeni  $C(X, V)$ , a nadto pozwala policzyć – dla  $n$  na tyle dużego, że  $\|f - f_n\|_\infty < 1$  – normę

$$\|f\|_\infty = \|f - f_n + f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < \|f_n\|_\infty + 1 < \infty$$

i tym samym zakończyć dowód zupełności  $C_b(X, V)$ . □

Mamy także przykład pokrewny, a przy tym nie mniej istotny, o którym mówić

**Stwierdzenie 47.** Przyjmijmy zapis Def. 28. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ , przy czym zakładamy, że  $V_2$  jest przestrzenią Banacha względem normy  $\|\cdot\|_2$ . Przestrzeń  $\mathbb{K}$ -liniowa  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  jest przestrzenią Banacha względem **normy operatorowej**

$$\|\cdot\|_{\text{op}} : \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \chi \longmapsto \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in \|\cdot\|_1^{-1}(\{1\})} \|\chi(v)\|_2.$$

Odwzorowanie prawostronnie stowarzyszone z (jawnie dwu- $\mathbb{K}$ -liniowym odwzorowaniem) **odwzorowaniem ewaluacji**

$$\text{ev} : \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) \times V_1 \longrightarrow V_2 : (\chi, v) \longmapsto \chi(v) \equiv \text{ev}_v(\chi),$$

tj. odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$r_{\text{ev}} : V_1 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), V_2) : v \longmapsto \text{ev}_v,$$

spełnia relację

$$\text{Im } r_{\text{ev}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), V_2).$$

*Dowód:* Rozważmy ciąg Cauchy’ego  $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  oraz – dla dowolnego wektora  $v \in V_1 \setminus \{0_{V_1}\}$  – ciąg wektorów  $\{\chi_n(v)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V_2$ , który spełnia tożsamość

$$\begin{aligned} \|\chi_n(v) - \chi_m(v)\|_2 &\equiv \|v\|_1 \cdot \frac{\|\chi_n(v) - \chi_m(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq \|v\|_1 \cdot \sup_{w \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_n(w) - \chi_m(w)\|_2}{\|w\|_1} \\ &\equiv \|v\|_1 \cdot \|\chi_n - \chi_m\|_{\text{op}}, \end{aligned}$$

a zatem dla dostatecznie dużych wartości  $m_v$  i  $n_v$

$$\|\chi_{n_v}(v) - \chi_{m_v}(v)\|_2 < \varepsilon.$$

Jest więc  $\{\chi_n(v)\}_{n \in \mathbb{N}}$  ciągiem Cauchy’ego, co w konsekwencji zupełności  $V_2$  implikuje istnienie wektorów

$$\underline{\chi}(v) := \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v) \in V_2.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\chi : V_1 \longrightarrow V_2 : v \longmapsto \begin{cases} 0_2 & \text{dla } v = 0_1 \\ \underline{\chi}(v) & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Jego  $\mathbb{K}$ -liniowość wynika wprost z  $\mathbb{K}$ -liniowości odwzorowań  $\chi_n$ , a także ciągłości działania unormowanego ciała bazowego  $\mathbb{K}$  na  $V_1$  oraz dodawania w  $V_1$ , oto bowiem dla dowolnych  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}^\times$  oraz  $v_1, v_2 \in V_1 \setminus \{0_1\}$  (w przypadkach innych od rozpatrzonych poniżej tożsamość jest spełniona trywialnie)

$$\begin{aligned} \chi(\lambda_1 \triangleright_1 v_1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(\lambda_1 \triangleright_1 v_1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \triangleright_2 \chi_n(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi_n(v_2)) \\ &= \lambda_1 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(v_2) \\ &= \lambda_1 \triangleright_2 \chi(v_1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi(v_2). \end{aligned}$$

W następnej kolejności dowodzimy ograniczoności  $\chi$ . W tym celu wybierzmy (dowolnie)  $v \in V_1$  o własności  $\|v\|_1 = 1$ . Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  możemy wskazać  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  oraz  $n_v \geq N_\varepsilon$  o własnościach

$$\|\chi_{n_v}(v) - \chi(v)\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon : \|\chi_n - \chi_m\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

a wtedy, o ile  $n \geq N_\varepsilon$ ,

$$\|\chi(v) - \chi_n(v)\|_2 \leq \|\chi(v) - \chi_{n_v}(v)\|_2 + \|\chi_{n_v}(v) - \chi_n(v)\|_2 < \varepsilon,$$

co pozwala skonstatować, że

$$\|\chi(v)\|_2 \leq \|\chi(v) - \chi_n(v)\|_2 + \|\chi_n(v)\|_2 < \varepsilon + \|\chi_n\|_{\text{op}} < \infty,$$

czyli że  $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ , a nadto że

$$\|\chi - \chi_n\|_{\text{op}} \leq \varepsilon,$$

zatem  $\chi$  jest w istocie granicą ciągu  $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  względem normy operatorowej.

Na koniec sprawdzamy ograniczoność  $r_{\text{ev}}$  obliczając – dla dowolnego wektora  $v \in V \setminus \{0_V\}$  –

$$\begin{aligned} \|r_{\text{ev}}(v)\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|r_{\text{ev}}(v)(\chi)\|_2 \equiv \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|\chi(v)\|_2 \\ &\leq \sup_{\chi \in \|\cdot\|_{\text{op}}^{-1}(\{1\})} \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|v\|_1 = \|v\|_1. \end{aligned}$$

□

Naturalną własność normy opisuje

**Stwierdzenie 48.** Przyjmijmy zapis Stw.47. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ , przy czym zakładamy, że  $V_\beta$ ,  $\beta \in \{2, 3\}$  jest przestrzenią Banacha względem normy  $\|\cdot\|_\beta$ . Norma operatorowa spełnia tożsamość

$$\forall_{\chi_\gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_\gamma, V_{\gamma+1}), \gamma \in \{1, 2\}} : \|\chi_2 \circ \chi_1\|_{\text{op}} \leq \|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1\|_{\text{op}}.$$

*Dowód:* Wprost na mocy definicji normy operatorowej oraz założenia o ograniczoności  $\chi_1$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\chi_2 \circ \chi_1\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2 \circ \chi_1(v)\|_3}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2(\chi_1(v))\|_3}{\|v\|_1} \\ &\leq \sup_{v \in V_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \|\chi_2\|_{\text{op}} \cdot \|\chi_1\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

□

Przykładem elementarnego, acz użytecznego zastosowania opisanej powyżej struktury przestrzeni Banacha jest

**Stwierdzenie 49.** Przyjmijmy zapis Def.28 i niechaj  $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$ . Jeżeli istnieje  $\alpha \in [0, 1[$ , dla którego spełniona jest nierówność  $\|\chi\|_{\text{op}} \leq \alpha$ , to wówczas odwzorowanie  $\text{id}_V - \chi$  jest automorfizmem  $V$ , a przy tym zachodzi nierówność

$$\|(\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \leq (1 - \alpha)^{-1}.$$

Dla każdego  $\tilde{\chi} \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$  o własności  $\|\tilde{\chi}\|_{\text{op}} \leq \alpha$  słusznym jest oszacowanie

$$\|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} - (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \leq (1 - \alpha)^{-2} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}}.$$

*Dowód:* Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $\chi^n \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$ , przy czym  $\|\chi^n\|_{\text{op}} \leq \|\chi\|_{\text{op}}^n$ , co pozwala nam zdefiniować odwzorowanie

$$S_n := \sum_{k=0}^n \chi^k \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V).$$

Bez trudu sprawdzamy, że ciąg  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V) : n \mapsto S_n$  jest dla  $\alpha < 1$  ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V)$ ,

$$\|S_{n+1} - S_n\|_{\text{op}} = \|\chi^{n+1}\|_{\text{op}} \leq \|\chi\|_{\text{op}}^{n+1} \leq \alpha^{n+1},$$

więc też zbieżnym do pewnego odwzorowania

$$S_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V),$$

dla którego (wobec ciągłości normy, o której mówi Stw. 44) otrzymujemy oszacowanie

$$(24) \quad \begin{aligned} \|S_\infty\|_{\text{op}} &\equiv \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right\|_{\text{op}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|\chi^k\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \alpha^k \\ &= (1 - \alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Następnie sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} S_\infty \circ (\text{id}_V - \chi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \circ (\text{id}_V - \chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi^{n+1}) = \text{id}_V, \\ (\text{id}_V - \chi) \circ S_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi) \circ S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{id}_V - \chi^{n+1}) = \text{id}_V, \end{aligned}$$

gdyż

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^n \right\|_{\text{op}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi^n\|_{\text{op}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^n = 0.$$

Powyższe rozumowanie pokazuje, że odwzorowanie  $\text{id}_V - \chi$  jest odwracalne, a wynik (24) dowodzi ograniczonej jego (obustronnej) odwrotności.

Na koniec w bezpośrednim rachunku pokazujemy

$$\begin{aligned} &\|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} - (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &= \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} \circ ((\text{id}_V - \chi) - (\text{id}_V - \tilde{\chi})) \circ (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\equiv \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1} \circ (\tilde{\chi} - \chi) \circ (\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq \|(\text{id}_V - \tilde{\chi})^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}} \cdot \|(\text{id}_V - \chi)^{-1}\|_{\text{op}} \\ &\leq (1 - \alpha)^{-2} \cdot \|\tilde{\chi} - \chi\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

□

Ostatnie stwierdzenie pozwala bez trudu wykazać słuszność

**Stwierdzenie 50.** Przyjmijmy zapis Def. 28. Izomorfizmy, tj. ograniczone odwzorowania liniowe o ograniczonych odwrotnościach, pomiędzy dowolnymi dwiema przestrzeniami Banacha  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  tworzą albo zbiór pusty, albo też zbiór otwarty w  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ .

*Dowód:* Niechaj  $\chi_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  będzie dowolnym izomorfizmem, a wtedy dowolne ograniczone odwzorowanie liniowe  $\delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  o własności

$$\|\delta\|_{\text{op}} < \frac{1}{\|\chi_0^{-1}\|_{\text{op}}}$$

definiuje w świetle Stw. 49 automorfizm  $\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$ , gdyż – na mocy Stw. 48 – zachodzi

$$\|\chi_0^{-1} \circ \delta\|_{\text{op}} \leq \|\chi_0^{-1}\|_{\text{op}} \cdot \|\delta\|_{\text{op}} < 1.$$

W takim jednak razie także  $\chi_0 + \delta$  jest izomorfizmem, oto bowiem

$$(\chi_0 + \delta)^{-1} \equiv (\chi_0 \circ (\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta))^{-1} = (\text{id}_{V_1} + \chi_0^{-1} \circ \delta)^{-1} \circ \chi_0^{-1}.$$

□

W przypadku modelowych przestrzeni Banacha  $\mathbb{R}^{\times N}$  możemy pokusić się o przydatne w dalszych naszych rozważaniach uszczegółowienie dyskusji pojęć takich jak „zwartość”, „domkniętość”, „ograniczoność” *etc.* oraz relacji między nimi, co czynimy poniżej. Zaczniemy od pomocniczego

**Stwierdzenie 51.** Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Dowolna  $N$ -kostka w  $\mathbb{R}^{\times N}$  jest zwarta.

*Dowód:* Niechaj  $I_N^{(0)}(a, b) := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$  będzie  $N$ -kostką zdefiniowaną w Równ. (22), o średnicy

$$\phi_0(a, b) := \sqrt{\sum_{i=1}^N (b_i - a_i)^2}.$$

Niechaj  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  będzie pokryciem  $I_N(a., b.)$ , z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego. Dzieliąc każdy z przedziałów  $[a_i, b_i]$ ,

$$[a_i, b_i] \equiv [a_i, c_i] \cup [c_i, b_i], \quad c_i := \frac{a_i + b_i}{2},$$

otrzymujemy rozkład  $I_N^{(0)}(a., b.)$  na  $2^N$   $N$ -kostek o średnicy  $\phi_1(a., b.) \equiv 2^{-1} \phi_0(a., b.)$ , z których przynajmniej jedna – oznaczmy ją  $I_N^{(1)}(a., b.)$  – nie może być pokryta żadną skończoną podrodziną zbiorów z rodziny  $\mathcal{O}$ . Powtórzywszy opisaną wcześniej procedurę podziału  $N$ -kostki na  $2^N$  jednakowych  $N$ -kostek w odniesieniu do  $I_N^{(1)}(a., b.)$ , znajdujemy  $N$ -kostkę  $I_N^{(2)}(a., b.) \subset I_N^{(1)}(a., b.)$  o średnicy  $\phi_2(a., b.) \equiv 2^{-2} \phi_0(a., b.)$ , której nie da się pokryć skończoną liczbą zbiorów z  $\mathcal{O}$ . Iteracja tej konstrukcji prowadzi do powstania monotonicznego ciągu  $I_N^{(\cdot)}(a., b.) : \mathbb{N} \rightarrow 2^{I_N^{(0)}(a., b.)}$   $N$ -kostek,

$$I_N^{(n)}(a., b.) \supset I_N^{(n+1)}(a., b.), \quad n \in \mathbb{N},$$

którego element o indeksie  $n$  ma średnicę  $\phi_n(a., b.) \equiv 2^{-n} \phi_0(a., b.)$  i nie jest pokrywany przez żadną skończoną podrodziną zbiorów z rodziny  $\mathcal{O}$ . Tenże element można zapisać w postaci

$$I_N^{(n)}(a., b.) \equiv \prod_{i=1}^N [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$$

dla pewnych liczb rzeczywistych

$$a_i \leq a_i^{(1)} \leq \dots \leq a_i^{(n-1)} \leq a_i^{(n)} < b_i^{(n)} \leq b_i^{(n-1)} \leq \dots \leq b_i^{(1)} \leq b_i, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Oznaczmy

$$a_i^{(\infty)} := \sup_{m \in \mathbb{N}} \{a_i^{(m)}\}, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Wobec powyższych nierówności zachodzi

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_i^{(\infty)} \leq b_i^{(n)}, \quad i \in \overline{1, N},$$

a ponieważ także – wprost z definicji –

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_i^{(n)} \leq a_i^{(\infty)}, \quad i \in \overline{1, N},$$

przeto

$$\forall n \in \mathbb{N} : (a_1^{(\infty)}, a_2^{(\infty)}, \dots, a_N^{(\infty)}) \in I_N^{(n)}(a., b.),$$

czyli też

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_N^{(n)}(a., b.) \neq \emptyset.$$

Niechaj  $x_\infty \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_N^{(n)}(a., b.)$ , a wtedy  $x_\infty \in \mathcal{O}_\lambda$  dla pewnego indeksu  $\lambda \in \Lambda$ . Skoro jednak  $\mathcal{O}_\lambda$  jest otwarty, to zawiera pewne otoczenie  $x_\infty$ , czyli istnieje  $r > 0$  o własności  $B_N(x_\infty; r) \subset \mathcal{O}_\lambda$ . Wybierając  $n$  dostatecznie duże, możemy zawsze uzyskać  $\phi_n(a., b.) < r$ , a wówczas dla dowolnego  $y \in I_N^{(n)}(a., b.)$  stwierdzamy, że  $\|y - x_\infty\|_N \leq \phi_n(a., b.) < r$ , więc też  $I_N^{(n)}(a., b.) \subset \mathcal{O}_\lambda$ , co leży w sprzeczności z konstrukcją ciągu  $I_N^{(\cdot)}(a., b.)$ .  $\square$

Powyższe pozwala nam łatwo udowodnić podstawowe

**Stwierdzenie 52** (Twierdzenie Heinego–Borela). Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony i domknięty.

*Dowód:* Niechaj  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{\times N}$  będzie podzbiorem zwartym. Jego domkniętość wynika – w świetle Stw. 37 – wprost z (oczywistej) hausdorffowskości przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$ . Wybierzmy (dowolnie) punkt  $p \in \mathcal{K}$  i rozważmy rodzinę kul otwartych  $B^N(p; n)$ . Rodzina ta jest pokryciem (otwartym)  $\mathcal{K}$ ,

$$\bigcup_{n=1}^N B^N(p; n) = \mathcal{K},$$

możemy z niej zatem wybrać skończone podpokrycie  $\{B^N(p; n_k)\}_{k \in \overline{1, M}}$ ,  $M \in \mathbb{N}$ . Liczba  $n_{\mathcal{K}} := \max_{k \in \overline{1, M}} \{n_k\}$  spełnia warunek

$$B^N(p; n_{\mathcal{K}}) \supset \mathcal{K},$$

który jest równoznaczny z ograniczonością  $\mathcal{K}$ .

Przypuśćmy, odwrotnie, że  $\mathcal{K}$  jest ograniczony i domknięty. Pierwsza z własności implikuje  $\mathcal{K} \subset B_N(x; R)$  dla pewnych  $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathcal{K}$  i  $R > 0$ , a zatem także  $\mathcal{K} \subset \prod_{i=1}^N [x_i - R, x_i + R]$ . Oto więc  $\mathcal{K}$  jest domkniętym podzbiorem  $N$ -kostki, która na mocy Stw. 51 jest zwartą podprzestrzenią  $\mathbb{R}^N$ . Dowodzona teza jest teraz natychmiastową konsekwencją Stw. 37.  $\square$

W dalszej kolejności natrafiamy na

**Stwierdzenie 53.** Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Każdy otwarty podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^N$  jest sumą mnogościową przeliczalnej rodziny kul otwartych.

*Dowód:* Niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^N)$  i zdefiniujmy zbiór

$$\mathbb{Q}\mathcal{O} := \{ (p, q) \in \mathbb{Q}^N \times \mathbb{Q} \mid B^N(p; q) \subset \mathcal{O} \}.$$

Jest on przeliczalny jako podzbiór przeliczalnego zbioru  $\mathbb{Q}^N$ , a przy tym

$$\mathcal{O} = \bigcup_{(p, q) \in \mathbb{Q}\mathcal{O}} B^N(p; q).$$

Istotnie, niech  $x \in \mathcal{O}$ , a wtedy istnieje  $r > 0$  o własności  $B^N(x; r) \subset \mathcal{O}$ . Wybierzmy (dowolnie)  $p \in \mathbb{Q}^N$  o własności  $\|p - x\|_N \leq \frac{r}{3}$ , a następnie –  $q \in \mathbb{Q}$  o własności  $\|p - x\|_N < q \leq \frac{r}{2}$  (liczby takie istnieją, gdyż  $\mathbb{Q}$  jest podzbiorem gęstym w  $\mathbb{R}$ ). Jasno widać, że  $B^N(p; q) \ni x$ .  $\square$

**Stwierdzenie 54.** Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Każdy otwarty i każdy domknięty podzbiór przestrzeni  $\mathbb{R}^N$  jest sumą mnogościową przeliczalnej rodziny podzbiorów zwartych.

*Dowód:* Zaczniemy od zbiorów otwartych. W świetle Stw. 53 wystarczy wykazać słuszność tezy dla dowolnej (otwartej) kuli  $B^N(x; r)$ . Ta jednak staje się oczywistą, gdy jako rodzinę zbiorów zwartych wybierzemy

$$\left\{ \overline{B^N\left(x; \max\left(0, r - \frac{1}{n}\right)\right)} \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}.$$

Niechaj teraz  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$  będzie domknięty. Udowodniona część stwierdzenia implikuje istnienie przeliczalnego zwartego pokrycia  $\{\mathcal{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_n,$$

a zatem także

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_n),$$

przy czym każdy ze zbiorów  $\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_n \subset \mathbb{R}^N$  jest domknięty (jako przecięcie dwóch zbiorów domkniętych) i ograniczony (wszak własność tę ma zawierający go zbiór  $\mathcal{K}_n$ ), więc na mocy Stw. 52 – również zwarty.  $\square$

**Twierdzenie 9** (Lemat Lindelöfa). Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ . Każde pokrycie otwarte dowolnego podzbioru przestrzeni  $\mathbb{R}^N$  ma przeliczalne podpokrycie.

*Dowód:* Niechaj  $A \subset \mathbb{R}^{\times N}$  będzie dowolnym podzbiorem,  $\mathcal{O} := \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  zaś – jego pokryciem (otwartym). W konstrukcji skończonego podpokrycia pokrycia  $\mathcal{O}$  wykorzystamy przeliczalne pokrycie  $\mathcal{B} := \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  przestrzeni  $\mathbb{R}^{\times N}$  złożone z kul otwartych o środkach we wszystkich punktach  $\mathbb{Q}^{\times N}$  i – dla każdego z takich punktów – wszystkich promieniach o długości wymiernej. Rozważmy dowolny punkt  $x \in A$ . Istnieje element pokrycia  $\mathcal{O}_{\lambda(x)} \ni x$ , a wraz z nim (wobec otwartości pokrycia  $\mathcal{O}$ ) także indeks  $n_x \in \mathbb{N}$  o własności  $x \in B_{n_x} \subset \mathcal{O}_{\lambda(x)}$  (możemy np. wybrać najmniejszą liczbę naturalną, dla której spełniony jest taki warunek, a ta istnieje). Tym sposobem otrzymujemy funkcję

$$n. : A \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto n_x$$

o przeliczalnym zbiorze wartości  $n_A = \{m \in \mathbb{N} \mid n^{-1}(\{m\}) \neq \emptyset\}$ . Następnie zdefiniujemy odwzorowanie

$$\beta : n_A \longrightarrow 2^A : m \longmapsto n^{-1}(\{m\}),$$

zauważając przy tym, że każdy ze zbiorów  $\beta(m)$ ,  $m \in n_A$  jest niepusty i każdy punkt  $x \in A$  należy do dokładnie jednego z nich, a mianowicie:  $x \in \beta(n_x)$ . Korzystając z Pewnika Wyboru, przyporządkujemy każdemu  $m \in n_A$  dowolny (jeden) punkt  $x_m \in \beta(m)$ . Rzecz jasna,  $x_m \in B_m \equiv B_{n_{x_m}} \subset \mathcal{O}_{\lambda(x_m)}$ . Przeliczalna rodzina

$$\underline{\mathcal{O}} := \{\mathcal{O}_{\lambda(x_m)}\}_{m \in n_A} \subset \mathcal{O}$$

jest poszukiwanym przeliczalnym podpokryciem pokrycia  $\mathcal{O}$ . Istotnie, jest to pokrycie, gdyż dowolny punkt  $y \in A$  należy do  $B_{n_y}$ , zatem też – wobec  $n_y \in n_A$  – do  $\mathcal{O}_{\lambda(x_{n_y})} \in \underline{\mathcal{O}}$ .  $\square$

Na zakończenie części naszej dyskusji poświęconej euklidesowym przestrzeniom metrycznym wysłowimy jeszcze użyteczne

**Stwierdzenie 55** (Lemat o zwartym pokryciu). Przyjmijmy zapis Przykł. 3 (1). Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$  i niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N})$ , a nadto niech  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  będzie zbiorem zwartym. Wówczas istnieje zbiór zwarty  $\tilde{\mathcal{K}}$  spełniający relację  $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{O}$  i taki, dla którego istnieje para liczb  $h, r \in ]0, \infty[$  o własności

$$(25) \quad \forall_{(t,x) \in \mathcal{K}} : \overline{C}_{(h,r)}(t,x) := \{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N} \mid |s-t| \leq h \quad \wedge \quad \|y-x\|_N \leq r \} \subset \tilde{\mathcal{K}}.$$

*Dowód:* Dowolnemu punktowi  $p = (t,x) \in \mathcal{K}$  przyporządkujemy (dowolną) parę liczb  $(h(p), r(p)) \in ]0, \infty[^{\times 2}$  o własności

$$\overline{C}_{(2h(p), 2r(p))}(p) \subset \mathcal{O},$$

co jest możliwe z racji otwartości  $\mathcal{O}$ . Zdefiniujemy cylindry otwarte

$$C(p) := \{ (s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N} \mid |s-t| < h(p) \quad \wedge \quad \|y-x\|_N < r(p) \},$$

które tworzą pokrycie otwarte  $\{C(p)\}_{p \in \mathcal{K}}$  zbioru zwartego  $\mathcal{K}$ . Wybrawszy zeń podpokrycie skończone  $\{C(p_k)\}_{k \in \overline{1,L}}$ ,  $L \in \mathbb{N}^{\times}$ ,  $p_k = (t_k, x_k) \in \mathcal{K}$ , stwierdzamy, że zbiór zwarty (wprost z konstrukcji)

$$\tilde{\mathcal{K}} := \bigcup_{k=1}^L \overline{C}_{(2h(p_k), 2r(p_k))}(p_k)$$

ma pożądane własności:

$$\mathcal{O} \supset \tilde{\mathcal{K}} \supset \bigcup_{k=1}^L C(p_k) \supset \mathcal{K}.$$

Zdefiniujemy następnie liczby (dodatnie)

$$h := \min_{k \in \overline{1,L}} \{h(p_k)\}, \quad r := \min_{k \in \overline{1,L}} \{r(p_k)\},$$

aby stwierdzić, co następuje: Dowolny punkt  $p = (t, x) \in \mathcal{K}$  należy do pewnego cylindra  $C(p_k)$ ,  $k \in \overline{1, L}$ , a zatem dowolny inny punkt  $p' = (t', x') \in \overline{C}_{(h,r)}(p)$  spełnia warunki

$$|t' - t_k| \equiv |t' - t + t - t_k| \leq |t' - t| + |t_k - t| \leq h + h(p_k) \leq 2h(p_k),$$

$$\|x - x_k\|_N \equiv \|x' - x + x - x_k\|_N \leq \|x' - x\|_N + \|x - x_k\|_N \leq r + r(p_k) \leq 2r(p_k),$$

z których wynika już bezpośrednio oczekiwana relacja

$$\overline{C}_{(h,r)}(p) \subset \overline{C}_{(2h(p_k), 2r(p_k))}(p_k) \subset \tilde{\mathcal{K}}.$$

□

Powracając na zakończenie do ogólnej teorii przestrzeni Banacha, wysłowimy kilka jej elementarnych rezultatów o dalekosiężnych konsekwencjach. Pierwszym jest

**Twierdzenie 10** (Banacha o punkcie stałym). Niechaj  $(X, d_X)$  będzie zupełną przestrzenią metryczną,  $T : X \rightarrow X$  zaś – **odwzorowaniem zwiężającym** (zwanym także **kontrakcją**), tj. odwzorowaniem spełniającym **warunek Lipschitza** w postaci

$$(26) \quad \exists_{L \in [0,1[} \forall_{x,y \in X} : d_X(T(x), T(y)) \leq L \cdot d_X(x, y).$$

Istnieje dokładnie jeden punkt stały  $v_* \in X$  odwzorowania  $T$ ,

$$T(v_*) = v_*,$$

przy czym, dla dowolnego  $x_0 \in X$ ,

$$v_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0).$$

*Dowód:* Wybierzmy (dowolnie)  $x_0 \in X$  i zdefiniujmy ciąg

$$x : \mathbb{N} \rightarrow X : n \mapsto T^n(x_0) \equiv x_n.$$

Jego sąsiednie wyrazy spełniają – wobec (26) – warunek

$$\begin{aligned} d_X(x_{n+1}, x_n) &\equiv d_X(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq L \cdot d_X(x_n, x_{n-1}) \equiv L \cdot d_X(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\ &\leq L^2 \cdot d_X(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq L^n \cdot d_X(x_1, x_0), \end{aligned}$$

zatem  $x$  jest ciągiem Cauchy'ego – istotnie, dla dowolnych  $n > m \in \mathbb{N}$  słusznym jest oszacowanie

$$\begin{aligned} d_X(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=1}^{n-m} d_X(x_{n+1-k}, x_{n-k}) \leq \sum_{k=1}^{n-m} L^{n-k} \cdot d_X(x_1, x_0) \\ &\leq d_X(x_1, x_0) \cdot L^m \cdot \sum_{l=0}^{n-m-1} L^k \leq d_X(x_1, x_0) \cdot L^m \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}} L^k \\ &\leq \frac{L^m \cdot d_X(x_1, x_0)}{1-L}, \end{aligned}$$

które pokazuje, że odległość między wyrazami ciągu o dostatecznie wysokich indeksach jest dowolnie mała. Wobec zupełności  $X$  istnieje zatem

$$v_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X,$$

przy czym z ciągłości  $T$ , będącej konsekwencją warunku Lipschitza o stałej  $0 \leq L < 1$ , stwierdzamy, że

$$v_* = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = T(v_*),$$

czyli punkt graniczny jest punktem stałym  $T$ . Jeśli także  $y \in X$  jest takim punktem, to obliczamy

$$0 \leq d_X(y, v_*) = d_X(T(y), T(v_*)) \leq L \cdot d_X(y, v_*),$$

czyli

$$0 \leq (1-q) \cdot d_X(y, v_*) \leq 0,$$



więc też – wobec niezwyrodnienia metryki –  $y = v_*$ .  $\square$

Następnym rezultatem o pierwszorzędym znaczeniu, stanowiącym podstawę uogólnienia pojęcia całki do klasy odwzorowań o wartościach w przestrzeni Banacha, jest

**Twierdzenie 11** (O ograniczonym rozszerzeniu liniowym). Przyjmijmy zapis Def. 28 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą unormowanymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem  $\mathbb{K}$ , przy czym zakładamy, że  $V_2$  jest przestrzenią Banacha. Niech też  $U_1 \subset V_1$  będzie podprzestrzenią  $\mathbb{K}$ -liniową,  $\chi : U_1 \rightarrow V_2$  zaś – ograniczonym odwzorowaniem liniowym o normie  $\|\chi\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(U_1, V_2)} = C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Istnieje dokładnie jedno ograniczone odwzorowanie liniowe  $\bar{\chi} : \bar{U}_1 \rightarrow V_2$  rozszerzające  $\chi$  do podprzestrzeni  $\bar{U}_1$  będącej domknięciem  $U_1$  w  $V_1$ . Rozszerzenie to ma tę samą normę  $\|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} = C$  i jest określane mianem **ograniczonego rozszerzenia liniowego** odwzorowania  $\chi$ .

*Dowód:* Jednoznaczność rozszerzenia  $\bar{\chi}$  jest bezpośrednią konsekwencją jego ciągłości, pozostaje zatem wykazać jego istnienie. W przypadku  $\chi = 0$  teza jest oczywista, rozważymy zatem przypadek  $\chi \neq 0$ . Niechaj  $u : \mathbb{N} \rightarrow U_1$  będzie ciągiem Cauchy’ego o granicy  $u \in \bar{U}_1$ . Wobec założonej ciągłości  $\chi$  zachodzi nierówność

$$\|\chi(u_n) - \chi(u_m)\|_2 \leq C \cdot \|u_n - u_m\|_1,$$

przeto odnośny ciąg wektorów  $\chi(u_n) : \mathbb{N} \rightarrow V_2 : n \mapsto \chi(u_n)$  także jest ciągiem Cauchy’ego, co oznacza istnienie w  $V_2$  jego granicy, którą oznaczymy symbolem

$$\bar{\chi}(u) := \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(u_n).$$

Zauważmy, że granica ta nie zależy od wyboru ciągu  $u$  o ustalonej granicy  $u$ , oto bowiem dla dowolnego ciągu wektorów  $\tilde{u} : \mathbb{N} \rightarrow U_1$  o tej samej granicy wybrawszy – dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  – indeks  $n \in \mathbb{N}$  tak, aby były spełnione nierówności

$$\|u_n - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{3C}, \quad \|\tilde{u}_n - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{3C}, \quad \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3},$$

stwierdzamy pożądaną relację

$$\begin{aligned} \|\bar{\chi}(u) - \chi(\tilde{u}_n)\|_2 &\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + \|\chi(u_n) - \chi(\tilde{u}_n)\|_2 \\ &\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + C \cdot \|u_n - \tilde{u}_n\|_1 \\ &\leq \|\bar{\chi}(u) - \chi(u_n)\|_2 + C \cdot (\|u_n - u\|_1 + \|\tilde{u}_n - u\|_1) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + C \cdot \frac{2\varepsilon}{3C} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponadto, jako że dowolny wektor  $v \in U_1$  jest granicą ciągu stałego  $v : \mathbb{N} \rightarrow U_1 : n \mapsto v$ , prawdziwe jest zdanie

$$\forall v \in U_1 : \bar{\chi}(v) \equiv \chi(v).$$

Jest zatem zasadnym nazwać  $\bar{\chi}$  rozszerzeniem  $\chi$  do  $\bar{U}_1$ . Przy tym ciągłość operacji grupowych w  $V_1$  oraz działania ciała bazowego na tej przestrzeni (zachowującego  $U_1$  i  $\bar{U}_1$ ) zapewnia  $\mathbb{K}$ -liniowość tegoż rozszerzenia. Istotnie, dla dowolnej pary ciągów Cauchy’ego  $u^\alpha : \mathbb{N} \rightarrow U_1$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  o granicach – odpowiednio –  $v^\alpha$  oraz skalarów  $\lambda_\alpha$  zachodzi równość

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(\lambda_1 \triangleright_1 v^1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v^2) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\lambda_1 \triangleright_1 v_n^1 +_1 \lambda_2 \triangleright_1 v_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \triangleright_2 \chi(v_n^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \chi(v_n^2)) \\ &= \lambda_1 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n^2) \\ &\equiv \lambda_1 \triangleright_2 \bar{\chi}(v^1) +_2 \lambda_2 \triangleright_2 \bar{\chi}(v^2). \end{aligned}$$

Wreszcie na koniec ciągłość norm  $\|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_2$  w połączeniu z ograniczonością  $\chi$  (oraz wobec zachowywania nierówności w przejściu granicznym) pozwala przekonać się, że rozszerzenie  $\bar{\chi}$  jest odwzorowaniem ograniczonym,

$$\begin{aligned} \|\bar{\chi}(v)\|_2 &\equiv \|\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(v_n)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi(v_n)\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot \|v_n\|_1 = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_1 \\ &\equiv C \cdot \|v\|_1, \end{aligned}$$

co pozwala stwierdzić, że

$$\|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} \equiv \sup_{v \in \bar{U}_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq C.$$

Przy tym na podstawie wcześniejszych ustaleń otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} C &\equiv \|\chi\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(U_1, V_2)} \equiv \sup_{v \in U_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\chi(v)\|_2}{\|v\|_1} \equiv \sup_{v \in U_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \leq \sup_{v \in \bar{U}_1 \setminus \{0_1\}} \frac{\|\bar{\chi}(v)\|_2}{\|v\|_1} \\ &\equiv \|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)}, \end{aligned}$$

gdyż supremum obliczone na podzbiorku jest majoryzowane przez supremum obliczone na zawierającym go zbiorze. Ostatecznie więc możemy wypisać ciąg nierówności

$$C \leq \|\bar{\chi}\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\bar{U}_1, V_2)} \leq C,$$

które przekonują o słuszności ostatniej części tezy dowodzonego twierdzenia.  $\square$

Istnienie normy na przestrzeni Banacha pozwala w naturalny sposób uogólnić do kategorii  $\text{Ban}_{\mathbb{K}}$  analizę stycznościową odwzorowań, którą formalizuje

**Definicja 30.** Przyjmijmy zapis Def. 28 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $\mathcal{O} \subset V_1$  – podzbiorem otwartym,  $F : \mathcal{O} \rightarrow V_2$  zaś – dowolnym odwzorowaniem. Oznaczmy

$$\mathcal{R}_2 F(v; h) := F(v +_1 h) - F(v) - DF(v)(h).$$

Odwzorowanie  $F$  nazwiemy **odwzorowaniem różniczkowalnym** (w sensie **Frécheta**) w punkcie  $v \in \mathcal{O}$ , jeśli istnieje ograniczony operator liniowy  $DF(v) : V_1 \rightarrow V_2$  o własności

$$\lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2 F(v; h)\|_2}{\|h\|_1} = 0.$$

Ileokroć istnieje, odwzorowanie  $DF(v)$  nazywamy **po pochodną Frécheta** odwzorowania  $F$  w punkcie  $v$ . **Odwzorowanie różniczkowalne na zbiorze  $\mathcal{O}$**  to takie, które jest różniczkowalne w każdym punkcie  $\mathcal{O}$ . Ileokroć odwzorowanie

$$DF : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$$

jest ciągle, mówimy, że odwzorowanie  $F$  jest **klasy (gładkości)  $C^1$** . Zbiór takich odwzorowań oznaczamy symbolem

$$C^1(\mathcal{O}, V_2) \equiv \{ F \in V_2^{\mathcal{O}} \mid F \text{ klasy } C^1 \}.$$

Zadawszy rekurencyjnie oznaczenie

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_2) := \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^{k-1}(V_1, V_2)), \quad \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^1(V_1, V_2) \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2), \quad k \in \mathbb{N}^\times,$$

w analogii do powyższego określamy na gruncie Stw. 47, także poprzez rekurencję, wyższe pochodne odwzorowania  $F$ ,

$$D^k F := D(D^{k-1} F) : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_2),$$

odwzorowania wielokrotnie różniczkowalne oraz odnośne wyższe klasy gładkości

$$C^k(\mathcal{O}, V_2) \equiv \{ F \in V_2^{\mathcal{O}} \mid D^{k-1} F \text{ klasy } C^1 \}.$$

Oznaczenie to rozszerzamy ostatecznie na przypadki  $k \in \{0, \infty\}$  – w pierwszym z nich mamy do czynienia z odwzorowaniami ciągłymi,

$$C^0(\mathcal{O}, V_2) \equiv C(\mathcal{O}, V_2),$$

w drugim zaś – z odwzorowaniami różniczkowalnymi w sposób ciągły dowolną liczbę razy,

$$C^\infty(\mathcal{O}, V_2) \equiv \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathcal{O}, V_2),$$

czyli **odwzorowaniami gładkimi**.

Pośród wielu naturalnych własności pochodnej Fréchet’a odnajdujemy i tę:

**Stwierdzenie 56** (Reguła łańcuchowa w przestrzeni Banacha). Przyjmijmy zapis Def. 28 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będą przestrzeniami Banacha,  $\mathcal{O}_\beta \subset V_\beta$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  – podzbiórami otwartymi,  $F_{12} : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$  zaś oraz  $F_{23} : \mathcal{O}_2 \rightarrow V_3$  odwzorowaniami różniczkowalnymi (w sensie Fréchet’a) w – odpowiednio –  $x_0 \in \mathcal{O}_1$  oraz  $y_0 = F_{12}(x_0) \in \mathcal{O}_2$ . Wówczas superpozycja  $F_{23} \circ F_{12} : \mathcal{O}_1 \rightarrow V_3$  jest odwzorowaniem różniczkowalnym (w sensie Fréchet’a) w  $x_0$ , przy czym

$$D(F_{23} \circ F_{12})(x_0) = DF_{23}(F_{12}(x_0)) \circ DF_{12}(x_0).$$

Jeśli ponadto  $F_{12} \in C^q(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  oraz  $F_{23} \in C^q(\mathcal{O}_2, V_3)$  dla pewnego  $q \in \mathbb{N}^\times$ , to także  $F_{23} \circ F_{12} \in C^q(\mathcal{O}_1, V_3)$ .

*Dowód:* Wybierzmy (dowolnie)  $v \in \mathcal{O}_1$  i rozważmy wyrażenie

$$\mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v) := F_{23} \circ F_{12}(x_0 + v) - F_{23} \circ F_{12}(x_0) - DF_{23}(F_{12}(x_0))(v).$$

Dla ustalonego (dowolnie)  $\varepsilon > 0$  dobierzmy (korzystając z ograniczoności  $DF_{23}(y_0)$  będącej konsekwencją założonej przez nas różniczkowalności  $F_{23}$ )  $\mu > 0$  tak, ażeby było

$$\mu \cdot \|DF_{23}(y_0)\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

a następnie (wykorzystując w analogiczny sposób założenie o różniczkowalności  $F_{12}$ ) –  $\zeta > 0$  tak, ażeby było

$$\zeta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wobec różniczkowalności  $F_{23}$  w  $y_0$  możemy teraz dobrać  $\eta > 0$ , dla którego słuszną jest implikacja

$$\|w\|_2 < \eta \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; w)\|_3 < \zeta \cdot \|w\|_2.$$

Rozumując analogicznie w odniesieniu do  $F_{12}$ , ustalamy  $\delta > 0$ , dla którego zachodzi

$$\|v\|_1 < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_3 < \mu \cdot \|v\|_1,$$

żądaną dodatkowo, iżby był spełniony warunek

$$\delta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \eta.$$

Wobec tożsamości

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v) &= \mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)) \\ &\quad + DF_{23}(y_0)(\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)) \end{aligned}$$

oraz nierówności, słusznej dla  $\|v\|_1 < \delta$ ,

$$\begin{aligned} \|DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 &\leq (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) \cdot \|v\|_1 \\ &< \delta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) < \eta, \end{aligned}$$

otrzymujemy pożądane oszacowanie

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_2(F_{23} \circ F_{12})(x_0; v)\|_3 &\leq \|\mathcal{R}_2 F_{23}(y_0; DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v))\|_3 \\ &\quad + \|DF_{23}(y_0)(\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v))\|_3 \\ &\leq \zeta \cdot \|DF_{12}(x_0)(v) + \mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|DF_{23}(y_0)\|_{\text{op}} \cdot \|\mathcal{R}_2 F_{12}(x_0; v)\|_2 \\
 \leq & \zeta \cdot (\|DF_{12}(x_0)\|_{\text{op}} + \mu) \cdot \|v\|_1 \\
 & + \|DF_{23}(y_0)\|_{\text{op}} \cdot \mu \cdot \|v\|_1 < \varepsilon \cdot \|v\|_1,
 \end{aligned}$$

dowodzące różniczkowalności (w sensie Frécheta) odwzorowania  $F_{23} \circ F_{12}$ . Struktura analityczna zapostulowanego tu wzoru na pochodną tego odwzorowania przesądza o słuszności pozostałej części tezy dowodzonego stwierdzenia.  $\square$

Dalsza analiza odwzorowań różniczkowalnych na przestrzeniach Banacha oraz przyszłe jej zastosowania w dyskusji interesujących nas zagadnień odwołują się często do elementarnych wyników teorii całki na przestrzeniach Banacha, której fundamentem w wygodnym (i w pełni wystarczającym dla naszych potrzeb<sup>9</sup>) sformułowaniu Dieudonnégo jest

**Definicja 31.** Przyjmijmy zapis Def. 28 oraz Stw. 46 i niechaj  $a, b \in \mathbb{R}$  spełniają warunek  $a < b$ . Odwzorowanie  $\sigma : [a, b] \rightarrow X$  o wartościach w przestrzeni Banacha  $(X, \|\cdot\|_V)$  nazywamy **odwzorowaniem schodkowym**, jeśli istnieje podział odcinka  $[a, b]$  postaci

$$a \equiv a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N \equiv b,$$

który będziemy oznaczać jako  $(a_0, a_1, \dots, a_N)$ , oraz wektory  $v_n \in V$ ,  $n \in \overline{1, N}$  o własności

$$(27) \quad \forall_{n \in \overline{1, N}} \forall_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} : \sigma(t) = \sigma_n.$$

Domknięcie podprzestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $\mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V)$  odwzorowań schodkowych w przestrzeni  $\mathbb{K}$ -liniowej  $\mathbf{Map}_b([a, b], V)$  **odwzorowań ograniczonych** na  $[a, b]$ , tj. tych  $F : [a, b] \rightarrow V$  o własności

$$\exists_{C_F \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \forall_{t \in [a, b]} : \|F(t)\|_V \leq C_F,$$

w topologii indukowanej przez normę supremum nosi miano **przestrzeni odwzorowań regulowanych** i będzie oznaczane symbolem

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V) \equiv \overline{\mathbf{Map}_b([a, b], V)}.$$

**Sumocalką odwzorowania schodkowego o wartościach w  $V$  po odcinku  $[a, b]$**  (skierowanym) nazywamy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\int_{[a, b]; V} : \mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V) \rightarrow V : \sigma \mapsto \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) \triangleright \sigma_n,$$

przy czym  $(a_0 \equiv a, a_1, \dots, a_N \equiv b)$  jest *dowolnym* podziałem jak w Równ. (27). **Całka (regulowana) Cauchy’ego–Bochnera o wartościach w  $V$  po odcinku  $[a, b]$**  (skierowanym) to ograniczone rozszerzenie liniowe (w rozumieniu Tw. 11)

$$\int_{[a, b]; V} : \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V) \rightarrow V, \quad \int_{[a, b]; V} \upharpoonright_{\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V)} \equiv \int_{[a, b]; V}$$

---

<sup>9</sup>Tytułem uzasadnienia przyjętego tu punktu widzenia przytoczmy – na prawach anegdoty studzącej konserwatywną jego krytykę – stosowny komentarz Jeana Dieudonnégo zamieszczony w jego klasycznym traktacie [Die65]: „[...] the reader will probably observe the conspicuous absence of a time-honored topic in calculus courses, the “Riemann integral”. It may well be suspected that, had it not been for its prestigious name, this would have been dropped long ago, for (with due reverence to Riemann’s genius) it is certainly quite clear to any working mathematician that nowadays such a “theory” has at best the importance of a mildly interesting exercise in the general theory of measure and integration [...]. Only the stubborn conservatism of academic tradition could freeze it into a regular part of the curriculum, long after it had outlived its historical importance. Of course, it is perfectly feasible to limit the integration process to a category of functions which is large enough for all purposes of elementary analysis [...], but close enough to the continuous functions to dispense with any consideration drawn from measure theory; this is what we have done by defining only the integral of regulated functions [...].”

sumocalki odwzorowania schodkowego po tymże odcinku do przestrzeni odwzorowań regulowanych. Ciągłość dodawania w  $V$  implikuje addytywność całki Cauchy’ego–Bochnera względem podziałów dziedziny, tj. dla dowolnych  $a \leq c \leq b$  stwierdzamy równość (ograniczonych) odwzorowań liniowych

$$(28) \quad \int_{[a,b];V} = \int_{[a,c];V} + \int_{[c,b];V} .$$

Tę można rozszerzyć na przypadek dowolnej trójki punktów  $a, b, c$  należących do odcinka, na którym odwzorowanie  $F$  jest jednostajną granicą ciągu odwzorowań schodkowych, jeśli tylko przyjmą konwencję

$$(29) \quad \int_{-[a,b] \equiv [b,a];V} \equiv - \int_{[a,b];V} .$$

**Uwaga 13.** Jest jasne, że podział odcinka  $[a, b]$ , względem którego odwzorowanie jawi się jako schodkowe, jest wysoce niejednoznaczny. Niezależność sumocalki od wyboru owego podziału jest konsekwencją niezmienniczości definiującej ją sumy względem dowolnych podziału tego rozdrobnień  $(a_0 \equiv a, a_1, \dots, a_N \equiv b) \mapsto (a_0 \equiv a, a'_1, a_1, a'_2, a_2, \dots, a'_N, a_N \equiv b)$ , która pozwala zastąpić sumy odpowiadające dwóm różnym podziałom odnośnymi sumami odpowiadającymi ich wspólnemu rozdrobieniu – te są tożsame z racji prawostronnej jednoznaczności odwzorowania schodkowego. Liniowość sumocalki jest równie oczywista, a jej ograniczoność wynika wprost z oszacowania

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a,b];V} \sigma \right\|_V &\leq \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n-1}) \cdot \|\sigma_n\|_V \leq (b-a) \cdot \max_{n \in \overline{1, N}} \{\|\sigma_n\|_V\} \\ &= (b-a) \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|\sigma(t)\|_V \equiv (b-a) \cdot \|\sigma\|_\infty . \end{aligned}$$

Wobec powyższego istnienie i jednoznaczność całki Cauchy’ego–Bochnera zapewnia Tw. 11. Warto przy tym podkreślić, że jej definicja obejmuje całki z odwzorowań ciągłych, oto bowiem

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V) \supset C([a, b], V) .$$

Istotnie, każde odwzorowanie ciągłe  $F \in C([a, b], V)$  jest na mocy Stw. 45 jednostajnie ciągłe, a to oznacza, że dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  można na  $[a, b]$  zadać podział

$$a_n := a + \frac{n}{N_\varepsilon} \cdot (b-a), \quad N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \in \overline{0, N_\varepsilon}$$

o własności

$$\forall_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} : \sup_{s, t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(s) - F(t)\|_V < \varepsilon ,$$

a wtedy odwzorowanie schodkowe

$$\sigma_F : [a, b] \longrightarrow V, \quad \forall_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \forall_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} : \sigma_F(t) = F(a_n)$$

stanowi jednostajną aproksymację  $F$  na poziomie dokładności  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \|F - \sigma_F\|_\infty &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \|F(t) - \sigma_F(t)\|_V = \max_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \left\{ \sup_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - \sigma_F(t)\|_V \right\} \\ &\equiv \max_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \left\{ \sup_{t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - F(a_n)\|_V \right\} \\ &\leq \max_{n \in \overline{1, N_\varepsilon}} \left\{ \sup_{s, t \in ]a_{n-1}, a_n[} \|F(t) - F(s)\|_V \right\} < \varepsilon . \end{aligned}$$

Konstrukcja całki (Cauchy’ego–Bochnera) przy użyciu sumocalek, w połączeniu z subaddytywnością normy na przestrzeni wektorowej, podpowiada naturalną relację między normą i całką, stanowiącą jedną z absolutnie podstawowych i nader użytecznych własności tej ostatniej. Zważywszy znaczenie praktyczne tej relacji, formułujemy

**Stwierdzenie 57.** Przyjmijmy zapis Def. 31. Całka Cauchy’ego–Bochnera dowolnego odwzorowania  $F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V)$  spełnia relację

$$(30) \quad \left\| \int_{[a,b];V} F \right\|_V \leq \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|F(\cdot)\|_V \leq |b-a| \cdot \|F\|_\infty .$$

*Dowód:* W pierwszej kolejności należy upewnić się, że druga z całek występujących w Równ. (30) ma sens, tj. że  $\|F(\cdot)\|_V \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \mathbb{R})$ . W tym celu wybierzmy (dowolny) ciąg  $\sigma_{F, \cdot} : \mathbb{N} \rightarrow C_{\text{step}}([a, b]; V)$  zbieżny do  $F$ , a następnie przywołajmy Stw. 41, ażeby otrzymać oszacowanie

$$\begin{aligned} \left\| \|F(\cdot)\|_V - \|\sigma_{F,n}(\cdot)\|_V \right\|_{\infty} &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \left| \|F(t)\|_V - \|\sigma_{F,n}(t)\|_V \right| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|F(t) - \sigma_{F,n}(t)\|_V \\ &\equiv \|F - \sigma_{F,n}\|_{\infty}, \end{aligned}$$

które pokazuje dowodnie, że odwzorowanie  $\|F(\cdot)\|_V$  jest (jednostajną) granicą ciągu  $\|\sigma_{F, \cdot}(\cdot)\|_V : \mathbb{N} \rightarrow C_{\text{step}}([a, b]; \mathbb{R})$ , w szczególności więc jest odwzorowaniem regulowanym. Wykorzystując ciągłość normy, ustaloną w Stw. 44, oraz wcześniejsze oszacowania, jak również oczywiste własności sumocalki (a w istocie – subaddytywność normy  $\|\cdot\|_V$ ), sprawdzamy słuszność oszacowania (30) w bezpośrednim rachunku, oto bowiem z jednej strony

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a,b];V} F \right\|_V &\equiv \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b];V} \sigma_{F,n} \right\|_V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{[a,b];V} \sigma_{F,n} \right\|_V \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|\sigma_{F,n}\|_V \equiv \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|F\|_V \end{aligned}$$

a z drugiej –

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b];\mathbb{R}} \|\sigma_{F,n}\|_V &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |b-a| \cdot \|\sigma_{F,n}\|_{\infty} \leq |b-a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\|F - \sigma_{F,n}\|_{\infty} + \|F\|_{\infty}) \\ &= |b-a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|F\|_{\infty} \equiv |b-a| \cdot \|F\|_{\infty}. \end{aligned}$$

□

O naturalności wprowadzonej powyżej operacji całkowania w kategorii liniowej zaświadcza

**Stwierdzenie 58.** Przyjmijmy zapis dotychczasowy. Przyporządkowanie przestrzeni odwzorowań regulowanych nad  $[a, b]$  przestrzeniom Banacha rozszerza się w kanoniczny sposób do endofunktora kowariantnego

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \cdot) : \mathbf{Ban}_{\mathbb{K}} \curvearrowright .$$

Całka Cauchy’ego–Bochnera jest transformacją naturalną

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \cdot) & \\ & \curvearrowright & \\ \mathbf{Ban}_{\mathbb{K}} & \begin{array}{c} \int_{[a,b], \cdot} \\ \downarrow \\ \text{id}_{\mathbf{Ban}_{\mathbb{K}}} \end{array} & \mathbf{Ban}_{\mathbb{K}} . \end{array}$$

*Dowód:* Pierwsza część tezy jest oczywista – każde odwzorowanie  $\chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  indukuje odwzorowanie jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi) : \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_1) \rightarrow \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_2) : F \mapsto \chi \circ F.$$

Istotnie, jeśli  $\sigma_{F, \cdot} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V_1)$  jest ciągiem zbieżnym do  $F$ , przy czym dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  (i  $\chi \neq 0$  – przypadek odwzorowania zerowego jest trywialny) zachodzi

$$\exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_{\varepsilon} : \|F - \sigma_{F,n}\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{\|\chi\|_{\text{op}}},$$

to wówczas

$$\begin{aligned} \|\chi \circ F - \chi \circ \sigma_{F,n}\|_{\infty} &\equiv \sup_{t \in [a,b]} \|\chi((F - \sigma_{F,n})(t))\|_2 \leq \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|(F - \sigma_{F,n})(t)\|_1 \\ &\equiv \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|F - \sigma_{F,n}\|_{\infty} < \varepsilon, \end{aligned}$$

a zarazem

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|\chi \circ \sigma_{F,n}\|_{\infty} \equiv \sup_{t \in [a,b]} \|\chi(\sigma_{F,n}(t))\|_2 \leq \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in [a,b]} \|\sigma_{F,n}(t)\|_1$$

$$\equiv \|\chi\|_{\text{op}} \cdot \|\sigma_{F,n}\|_{\infty},$$

konstatujemy zatem, że  $\chi \circ \sigma_{F, \cdot} : (\mathbb{N}) \subset \mathbf{Map}_{\text{step}}([a, b], V_2) \subset \mathbf{Map}_b([a, b], V_2)$  i ciąg ten jest zbieżny do  $\chi \circ F$ , czyli  $\chi \circ F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_2)$ . Jest przy tym oczywiste, że dla dowolnej przestrzeni Banacha  $(V, \|\cdot\|_V)$  zachodzi tożsamość

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \text{id}_V) \equiv \text{id}_{\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V)},$$

a do tego dla dowolnej pary odwzorowań  $\chi_\beta \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_\beta, V_{\beta+1})$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$  między przestrzeniami Banacha  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  spełniony jest warunek

$$\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi_2 \circ \chi_1) = \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi_2) \circ \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi_1),$$

co przesądza o funktorialności  $\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \cdot)$ .

W następnej kolejności sprawdzamy naturalność całki Cauchy’ego–Bochnera, co sprowadza się do wykazania przemienności diagramów

$$\forall_{\substack{V_1, V_2 \in \text{Ob Ban}_{\mathbb{K}} \\ \chi \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_1) & \xrightarrow{\mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], \chi)} & \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_2) \\ \downarrow \int_{[a, b]; V_1} & & \downarrow \int_{[a, b]; V_2} \\ V_1 & \xrightarrow{\chi} & V_2 \end{array}$$

lub – innymi słowy – do wykazania tożsamości

$$\forall_{F \in \mathbf{Map}_{\text{reg}}([a, b], V_1)} : \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ F = \chi \left( \int_{[a, b]; V_1} F \right).$$

Ta jednak wynika wprost z ciągu równości (wykorzystujących wprowadzone wcześniej obserwacje i oznaczenia, jak również liniowość i ciągłość  $\chi$ )

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ F &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; V_2} \chi \circ \sigma_{F,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi \left( \int_{[a, b]; V_2} \sigma_{F,n} \right) \\ &= \chi \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]; V_2} \sigma_{F,n} \right) \equiv \chi \left( \int_{[a, b]; V_1} F \right). \end{aligned}$$

□

Jako prostą egzemplifikację powyższego odkrywamy

**Corollarium 1.** Przyjmijmy zapis Def.31 oraz Stw.47 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha, a nadto niech  $\chi \in C_{\text{reg}}([a, b], \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2))$ . Dla dowolnego wektora  $v \in V_1$  spełniona jest tożsamość

$$\int_{[a, b]; V_2} r_{\text{ev}}(v) \circ \chi = \left( \int_{[a, b]; \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)} \chi \right) (v).$$

*Dowód:* Teza wynika wprost z połączenia (drugiej części) Stw.47 ze Stw.58. □

Nietrywialnego przykładu zastosowania całki Cauchy’ego–Bochnera w konstrukcji odwzorowań różniczkowalnych pomiędzy przestrzeniami Banacha nader często spotykanej i wykorzystywanej w matematycznym modelowaniu ewolucji układów fizycznych dostarcza poniższe

**Stwierdzenie 59.** Przyjmijmy zapis Def.31 oraz Stw.46. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha i niech  $F \in C^k(V_1, V_2)$ ,  $k \in \mathbb{N}^\times$ , a nadto niech  $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$  będą dowolnymi liczbami spełniającymi relację  $a < t_0 < b$ . Odwzorowanie

$$\sigma_{F; t_0} : C([a, b], V_1) \longrightarrow C([a, b], V_2) : \gamma \longmapsto \int_{[t_0, \cdot]; V_2} F \circ \gamma$$

jest klasy  $C^k$ , przy czym

$$\forall_{\gamma, v \in C([a, b], V_1)} : D\sigma_{F; t_0}(\gamma)(v) = \int_{[t_0, \cdot]; V_2} DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot)).$$

*Dowód:* Oznaczmy na potrzeby niniejszego dowodu  $I := [a, b]$ . Dokonamy najpierw, przywoławszy (30), oszacowania normy jawnie  $\mathbb{K}$ -liniowego odwzorowania  $D\sigma_{F; t_0} \circ \gamma$ ,

$$\begin{aligned} \|D\sigma_{F; t_0} \circ \gamma\|_{\text{op}} &\equiv \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \frac{\|D\sigma_{F; t_0}(\gamma)(v)\|_{\infty}}{\|v\|_{\infty}} \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{t \in I} \left\| \int_{[t_0, t]; V_2} DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_2 \right) \\ &\leq \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{t \in I} |t - t_0| \cdot \|DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))\|_{\infty} \right) \\ &\leq (b - a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))(v(s))\|_2 \right) \\ &\leq (b - a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{s \in I} (\|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}} \cdot \|v(s)\|_1) \right) \\ &\leq (b - a) \cdot \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}} \cdot \sup_{t \in I} \|v(t)\|_1 \right) \\ &\leq (b - a) \cdot \sup_{s \in I} \|DF(\gamma(s))\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

Wobec ciągłości normy  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  (orzeczonej w Stw. 44) oraz założonej ciągłości  $DF$  i  $\gamma$  odwzorowanie  $\|DF(\gamma(\cdot))\|_{\text{op}} : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  jest ciągle, zatem jego obraz w  $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$  jest – w świetle Stw. 39 – zwarty, więc też – na mocy Stw. 52 – ograniczony, co wobec powyższego oszacowania przesądza o ograniczoności  $D\sigma_{F; t_0} \circ \gamma$ . W podobny sposób (i z wykorzystaniem powyższych wniosków) dowodzimy ciągłości rozpatrywanego tu odwzorowania  $D\sigma_{F; t_0} : C(I, V_1) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(C(I, V_1), C(I, V_2))$  w (dowolnym) punkcie  $\gamma \in C(I, V_1)$ , zauważając najpierw

$$\begin{aligned} &\|D\sigma_{F; t_0}(\gamma_1) - D\sigma_{F; t_0}(\gamma)\|_{\text{op}} \\ &\leq \sup_{v \in C(I, V_1) \setminus \{0\}} \left[ \frac{(b-a)}{\|v\|_{\infty}} \cdot \sup_{t \in I} (\|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}} \cdot \|v(t)\|_1) \right] \\ &\leq (b - a) \cdot \sup_{t \in I} \|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}}, \end{aligned}$$

a następnie wykorzystując wynikającą ze Stw. 45 jednostajną ciągłość  $DF$  na domknięciu kuli  $\overline{B_{V_1}(0; \|\gamma\|_{\infty} + 1)}$  (zakładamy, bez straty ogólności, że odległość  $\gamma_1$  od  $\gamma$  liczona w metryce na  $C(I, V_1)$  indukowanej przez normę supremum nie przekracza 1), która gwarantuje

$$\begin{aligned} &\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta_{\varepsilon}^{(DF)} > 0} \forall_{w_1, w_2 \in \overline{B_{V_1}(0; \|\gamma\|_{\infty} + 1)}} : \\ &(\|w_2 - w_1\|_{\infty} < \delta_{\varepsilon}^{(DF)}) \implies \|DF(w_2) - DF(w_1)\|_{\text{op}} < \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

i tym samym pozwala – przy ustalonym  $\varepsilon > 0$  – dokonać dla

$$\|\gamma_1(t) - \gamma(t)\| \leq \|\gamma_1 - \gamma\|_{\infty} < \min\{1, \delta_{\varepsilon}^{(DF)}\} =: \delta_{\varepsilon}, \quad t \in I$$

ostatecznego oszacowania

$$\|D\sigma_{F; t_0}(\gamma_1) - D\sigma_{F; t_0}(\gamma)\|_{\text{op}} \leq (b - a) \cdot \sup_{t \in I} \|DF(\gamma_1(t)) - DF(\gamma(t))\|_{\text{op}} < \varepsilon.$$

Na zakończenie pierwszej części dowodu przekonujemy się, że rozpatrywane tu odwzorowanie (o wszystkich pożądanach własnościach) jest w istocie pochodną (w sensie Frécheta) odwzorowania  $\sigma_{F; t_0}$ . W tym celu sprawdzamy zachowanie odnośnej reszty

$$\mathcal{R}\sigma_{F; t_0}(\gamma; v) := \sigma_{F; t_0}(\gamma + v) - \sigma_{F; t_0}(\gamma) - D\sigma_{F; t_0}(\gamma)(v)$$



w granicy

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma;v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \\
 &= \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \left\| \int_{[t_0, \cdot]; V_2} [F \circ (\gamma + v)(\cdot) - F(\gamma(\cdot)) - DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))] \right\|_\infty \\
 &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|F \circ (\gamma + v) - F \circ \gamma - DF(\gamma(\cdot))(v(\cdot))\|_\infty}{\|v\|_\infty} \\
 &\equiv (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\sup_{t \in I} \|F \circ (\gamma + v)(t) - F \circ \gamma(t) - DF(\gamma(t))(v(t))\|_2}{\|v\|_\infty}.
 \end{aligned}$$

Ciągła różniczkowalność  $F$  w połączeniu z ciągłością  $\gamma$  i  $v$  implikuje – na mocy argumentu analogicznego do tego użytego w dowodzie ograniczoności  $D\sigma_{F;t_0} \circ \gamma$  – istnienie punktu  $t_* \in I$ , w którym jest osiągnięte supremum występujące w liczniku, a zatem

$$\lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma;v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|F(\gamma(t_*)+v(t_*))-F(\gamma(t_*))-DF(\gamma(t_*))(v(t_*))\|_2}{\|v\|_\infty},$$

czyli też – raz jeszcze wobec różniczkowalności  $F$  (przy założeniu  $v(t_*) \neq 0$ , którego niespełnienie automatycznie implikuje pożądaną tezę) –

$$\begin{aligned}
 \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}\sigma_{F;t_0}(\gamma;v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|v(t_*)\|_1 \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*);v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1}}{\|v\|_\infty} \\
 &\leq (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*);v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1} \cdot \sup_{s \in I} \|v(s)\|_1}{\|v\|_\infty} \\
 &= (b-a) \cdot \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}F(\gamma(t_*);v(t_*))\|_2}{\|v(t_*)\|_1} = 0.
 \end{aligned}$$

Jest zatem odwzorowanie  $\sigma_{F;t_0}$  jednokrotnie różniczkowalne w sposób ciągły, przy czym pochodna ma postać zapostulowaną w treści dowodzonego stwierdzenia.

W przypadku  $k > 1$  ciągłej różniczkowalności  $\sigma_{F;t_0}$  klasy  $C^k$  dowodzimy przez indukcję względem stopnia  $r \in \overline{1, k}$ . Udowodniwszy słuszność tezy dla  $r = 1$ , założmy jej prawdziwość dla  $1 \leq r < k$ , a następnie powtórzmy rozumowanie z pierwszej części dowodu, zastępując po pierwsze ciągle odwzorowanie  $F$  takimż odwzorowaniem  $D^r F : V_1 \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^r(V_1, V_2)$  oraz odwzorowanie

$$\sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, V_2) : \gamma \mapsto \int_{[t_0, \cdot]; V_2} F \circ \gamma$$

odwzorowaniem (o definicji stanowiącej składową tezę indukcyjnej)

$$D^r \sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^r(V_1, V_2)) : \gamma \mapsto \int_{[t_0, \cdot]; \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^r(V_1, V_2)} D^r F \circ \gamma,$$

a po drugie – w konsekwencji poprzedniego – przestrzeń  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  przestrzenią  $(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}^r(V_1, V_2), \|\cdot\|_{\text{op}})$ . Opisane podstawienie prowadzi, w szczególności, do postulatu dotyczącego postaci odwzorowania

$$D^{r+1} \sigma_{F;t_0} : C(I, V_1) \rightarrow C(I, \mathcal{B}_{\mathbb{K}}^{r+1}(V_1, V_2))$$

wyrażonego wzorem

$$\begin{aligned}
 & \forall_{\gamma, v_1, v_2, \dots, v_{r+1} \in C(I, V_1)} : D^{r+1} \sigma_{F;t_0}(\gamma)(v_1, v_2, \dots, v_{r+1}) \\
 &= \int_{[t_0, \cdot]; V_2} D^{r+1} F(\gamma(\cdot))(v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_{r+1}(\cdot)).
 \end{aligned}$$

□

Na podstawie dotychczasowej analizy możemy już sformułować podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego dla odwzorowań (regulowanych) o wartościach w przestrzeni Banacha. Zaczynamy od

**Twierdzenie 12** (Podstawowe rachunku różniczkowego i całkowego). Przyjmijmy zapis Def. 31 i niechaj  $F \in C_{\text{reg}}([a, b], V)$ , przy czym zakładamy, że  $F$  jest ciągła w punkcie  $c \in [a, b]$ . Wówczas odwzorowanie

$$I_F : [a, b] \longrightarrow V : t \longmapsto \int_{[a, t]; V} F$$

jest różniczkowalne w  $c$ , a jego pochodna jest równa

$$DI_F(c) = F(c).$$

W szczególności

$$(31) \quad F(b) - F(a) = \int_{[a, b]; V} DF.$$

*Dowód:* Korzystając z Równ. (28) i (29), jak również z Cor. 1 (w odniesieniu do stałego odwzorowania  $[a, b] \ni t \mapsto \chi(t) \equiv \text{id}_V$ ), obliczamy wprost, dla dowolnego  $h \in \mathbb{R}$  o własności  $c + h \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c) &= \int_{[a, c+h]; V} F - \int_{[a, c]; V} F - \left( \int_{[c, c+h]; V} \text{id}_V \right) (F(c)) \\ &= \int_{[c, c+h]; V} F - \int_{[c, c+h]; V} r_{\text{ev}}(F(c)) \circ \text{id}_V \\ &\equiv \int_{[c, c+h]; V} (F - F(c)) \end{aligned}$$

i na tej podstawie, a w odwołaniu do Równ. (30), otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \|I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c)\|_V &= \left\| \int_{[c, c+h]; V} (F - F(c)) \right\|_V \\ &\leq |h| \cdot \sup_{t \in [c, c+h]} \|F(t) - F(c)\|_V, \end{aligned}$$

a stąd ostatecznie, uwzględnivszy ciągłość  $F$  w  $c$ , także pożądanv wynik

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|I_F(c+h) - I_F(c) - h \triangleright F(c)\|_V}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [c, c+h]} \|F(t) - F(c)\|_V = 0.$$

□

Pośród nieoczywistych zastosowań Podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego pojawia się

**Stwierdzenie 60** (Nierówność Grönwalla–Bellmana). Przyjmijmy zapis Def. 30 oraz 31 i ustalmy (dowolnie) liczby  $a, b \in \mathbb{R}$  spełniające warunek  $a < b$  oraz  $t_0 \in I := ]a, b[$ . Dla dowolnych funkcji  $f, \varphi \in C(I, [0, \infty[)$  i  $c \in [0, \infty[$  słuszną jest implikacja<sup>10</sup>

$$\forall t \in I : f(t) \leq c + \left| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f \right| \implies \forall t \in I : f(t) \leq c \cdot \exp \left( \left| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \right| \right).$$

*Dowód:* Rozpatrzmy najpierw przypadek  $t \in ]t_0, b[$ . W tym celu zdefiniujmy funkcję

$$F : ]t_0, b[ \longrightarrow [0, \infty[ : t \longmapsto c + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f.$$

W świetle Tw. 12 funkcja ta jest klasy  $C^1$  i spełnia nierówność

$$F'(t) = \varphi(t) f(t) \leq \varphi(t) F(t), \quad t \in ]t_0, b[,$$

<sup>10</sup>Nie chcąc wychodzić poza zakres pojęć wprowadzonych w niniejszym skrypcie, zapisaliśmy tezę stwierdzenia w terminach całki Cauchy'ego–Bochnera, jest jednak absolutnie oczywistym, że mamy tu w istocie do czynienia z standardową całką Riemanna.

a to wobec założonej relacji  $f(t) \leq F(t)$ . Powyższą nierówność możemy przepisać w zwartej postaci (tutaj  $D \equiv \frac{d}{dt}$ )

$$D\left(\exp\left(-\int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}} \varphi\right) \cdot F(\cdot)\right)(t) \leq 0,$$

a następnie – wobec ciągłej różniczkowalności wyrażenia różniczkowanego – scałkować na odcinku  $]t_0, \tau[$  dla dowolnego  $\tau \in ]t_0, b[$ , otrzymując w ten sposób

$$F(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi\right) - F(t_0) \leq 0,$$

czyli

$$F(\tau) \leq c \cdot \exp\left(\int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi\right),$$

skąd na mocy użytej wcześniej nierówności z założenia otrzymujemy oczekiwaną nierówność

$$f(\tau) \leq c \cdot \exp\left(\int_{[t_0, \tau]; \mathbb{R}} \varphi\right).$$

Analogiczne rozumowanie dla  $t \in ]a, t_0[$  bierze za punkt wyjścia funkcję

$$G : ]a, t_0[ \rightarrow [0, \infty[ : t \mapsto c + \int_{[t, t_0]; \mathbb{R}} \varphi \cdot f.$$

Przypadek  $t = t_0$  nie wymaga komentarza. □

Pośród oczywistych natomiast znajdujemy użyteczne

**Twierdzenie 13** (Rozwinięcie Taylora dla funkcji wielu zmiennych). Przyjmijmy zapis Def. 22, 30 oraz 31 i ustalmy (dowolnie)  $n \in \mathbb{N}^\times$ , a następnie wprowadźmy notację wielowskaźnikową, w której we współrzędnych kartezjańskich  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\times n}$  wektorowi  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{\times n}$ , o długości  $\|M\| \equiv \sum_{i=1}^n m_i$ , przyporządkowujemy operator pochodnej cząstkowej

$$D_M^{\|M\|} := \frac{\partial^{\|M\|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}},$$

formę  $\|M\|$ -liniową

$$\Lambda^M : \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R} : (r_1, r_2, \dots, r_n) \longmapsto \prod_{i=1}^n r_i^{m_i}$$

oraz symbol

$$M! := \prod_{i=1}^n m_i!.$$

Niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^{\times n})$  i niech  $x \in \mathcal{O}$  oraz  $h \in \mathbb{R}^{\times n}$ , przy czym zakładamy, że  $I_{x,h} := \{x + t \triangleright h \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathcal{O}$ . Dla dowolnej funkcji  $f \in C^{r+1}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$  spełniona jest równość

$$f(x+h) = \sum_{\|M\| \leq r} \frac{1}{M!} \Lambda^M(h) D_M^{\|M\|} f(x) + \mathcal{R}_{r+1} f(x; h),$$

w której ostatni człon jest resztą rzędu  $r+1$ , postaci<sup>11</sup>

$$\mathcal{R}_{r+1} f(x; h) = (r+1) \sum_{\|M\|=r+1} \frac{1}{M!} \Lambda^M(h) \int_{[0,1]; \mathbb{R}} (1-\cdot)^r D_M^{r+1} f(x + \cdot \triangleright h).$$

*Dowód:* Dla  $n=1$  sprowadza się do wielokrotnego użycia Tw. 12. Przypadek  $n > 1$  redukuje się do poprzedniego poprzez wprowadzenie – dla ustalonych  $x$  i  $h$  – funkcji pomocniczej  $g_{x,h} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(x + t \triangleright h)$ . □

W następnej kolejności natrafiamy na

<sup>11</sup>Patrz: przypis do treści Stw. 60.

**Twierdzenie 14** (O wartości średniej). Przyjmijmy zapis Def. 22, 30 oraz 31. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha i niech  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(V_1)$ , a do tego niech dla pewnych  $v \in \mathcal{O}$  i  $w \in V_1$  oraz dowolnego  $t \in [0, 1]$  zachodzi  $v +_1 t \triangleright w \in \mathcal{O}$ . Oznaczmy

$$\gamma_{v;w} : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{O} : t \longmapsto v +_1 t \triangleright w .$$

Dowolne odwzorowanie  $F \in C^q(\mathcal{O}, V_2)$  spełnia tożsamość

$$F(v +_1 w) - F(v) = \left( \int_{[0,1]; \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)} DF \circ \gamma_{v;w} \right) (w) ,$$

więc też

$$\|F(v +_1 w) - F(v)\|_2 \leq \|w\|_1 \cdot \|DF \circ \gamma_{v;w}\|_\infty .$$

*Dowód:* Nierówność w tezie twierdzenia wynika wprost z zapostulowanej w nim równości, ograniczoności całki Cauchy’ego–Bochnera oraz oszacowania (30), pozostaje zatem udowodnić rzeczoną równość. W tym celu wystarczy jednak zauważyć, że w świetle Stw. 56 zachodzi równość

$$\begin{aligned} D(F \circ \gamma_{v;w})(t) &= DF(\gamma_{v;w}(t)) \circ D\gamma_{v;w}(t) \equiv DF(\gamma_{v;w}(t))(w) \\ &\equiv r_{\text{ev}}(w) \circ (DF \circ \gamma_{v;w})(t) , \end{aligned}$$

zatem na mocy Równ. 31 oraz Cor. 1 otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\begin{aligned} F(v +_1 w) - F(v) &\equiv F \circ \gamma_{v;w}(1) - F \circ \gamma_{v;w}(0) = \int_{[0,1]; V} D(F \circ \gamma_{v;w}) \\ &= \int_{[0,1]; V} r_{\text{ev}}(w) \circ (DF \circ \gamma_{v;w}) \\ &= \left( \int_{[0,1]; \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)} DF \circ \gamma_{v;w} \right) (w) . \end{aligned}$$

□

Lipschitzowskość odwzorowania między przestrzeniami metrycznymi (rozumiana jak w (26)) implikuje – w świetle Stw. 42 – jego ciągłość. Dzięki powyższemu twierdzeniu możemy udokumentować sytuację, w której zachodzi implikacja odwrotna, co czynimy w

**Stwierdzenie 61.** Przyjmijmy zapis Def. 22, 30 oraz Przykł. 3 (1) i ustalmy  $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Niechaj  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}(\mathbb{R}^{n_1})$ , niech  $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^{n_2})$  i niech  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  będzie podzbiorem zwartym. Wówczas  $f$  spełnia globalnie na  $\mathcal{K}$  warunek Lipschitza (jak w Tw. 10),

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathcal{K} : \|f(x) - f(y)\|_{n_2} \leq L \cdot \|x - y\|_{n_1} .$$

*Dowód:* Każdy punkt  $x \in \mathcal{K}$  jest punktem wewnętrznym  $\mathcal{O}$ , przeto jest w tym ostatnim zawarty wraz z pewną otwartą kulą  $B^{n_1}(x; \varepsilon_x)$ ,  $\varepsilon_x > 0$ . Rodzina kul  $\{B^{n_1}(x; \frac{\varepsilon_x}{2})\}_{x \in \mathcal{K}}$  stanowi (otwarte) pokrycie  $\mathcal{K}$ , z którego możemy wybrać skończone podpokrycie  $\{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})\}_{i \in \overline{1, N}}$ . Każda z domkniętych kul  $\overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}$  jest (w świetle Stw. 52) zwarta i zawarta w  $\mathcal{O}$ , a nadto wypukła, możemy przeto odnieść do niej tezę Tw. 14, a ponieważ odwzorowanie  $\|Df(\cdot)\|_{\text{op}} \upharpoonright_{\overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}}$  jest ograniczone na mocy Stw. 39 i Stw. 52, otrzymujemy

$$\forall_{i \in \overline{1, N}} \exists_{M_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \forall_{x, y \in \overline{B^{n_1}(x_i; \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})}} : \|f(x) - f(y)\| \leq M_i \cdot \|x - y\| .$$

Wystarczy teraz położyć

$$L := \max_{i \in \overline{1, N}} \{M_i\} .$$

□

Twierdzenie o wartości średniej, mimo swą niezaprzeczną elementarność, otwiera nam drogę do

wyników stanowiących podstawę analizy lokalnej na rozmaitościach różniczkowalnych, z których nieraz przyjdzie nam korzystać w dalszej części kursu. Oto więc mamy

**Twierdzenie 15** (O lokalnej odwracalności odwzorowań). Przyjmijmy zapis Def. 30 i niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $\mathcal{U} \subset V_1$  podzbiorem otwartym,  $F : \mathcal{U} \rightarrow V_2$  zaś – odwzorowaniem klasy  $C^q$ ,  $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Niech dalej  $v_* \in \mathcal{U}$  i załóżmy, że pochodna (Frécheta)  $DF(v_*) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$  ma ograniczoną odwrotność. Wówczas  $F$  jest lokalnym izomorfizmem klasy  $C^q$ , tzn. istnieje otoczenie otwarte  $\mathcal{O}_{v_*} \subset \mathcal{U}$  wektora  $v_*$  oraz odwzorowanie  $G \in C^q(F(\mathcal{O}_{v_*}), \mathcal{O}_{v_*})$  spełniające warunki

$$F \circ G = \text{id}_{F(\mathcal{O}_{v_*})}, \quad G \circ F \upharpoonright_{\mathcal{O}_{v_*}} = \text{id}_{\mathcal{O}_{v_*}}.$$

*Dowód:* Po pierwsze zauważmy, że dokonując w razie potrzeby przesunięcia argumentu i wartości o stałe wektory oraz przeskalowania  $F \mapsto DF(v_*)^{-1} \circ F$ , możemy zawsze sprowadzić rozważane zagadnienie do takiego, w którym mamy do czynienia z odwzorowaniem  $F \in C^q(\mathcal{U}, V_1)$  spełniającym w  $v_* = 0_1$  warunki  $F(0_1) = 0_1$  i  $DF(0_1) = \text{id}_{V_1}$ , co też uczynimy poniżej. Rozważmy odwzorowanie (klasy  $C^q$ )

$$\Phi_F : \mathcal{U} \rightarrow V_1 : v \mapsto v - F(v),$$

spełniające warunek

$$D\Phi_F(0_1) = \text{id}_{V_1} - DF(0_1) \equiv 0,$$

przy czym wobec ograniczoności pochodnej istnieje takie  $r > 0$ , dla którego

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; 2r)}} : \|D\Phi_F(v)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{2}.$$

Na podstawie Tw. 14 stwierdzamy wówczas, że

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F(v)\|_1 \leq \frac{1}{2} \|v\|_1 < \frac{r}{2},$$

skąd wniosek:

$$\Phi_F(\overline{B_{V_1}(0_1; r)}) \subset \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}.$$

Pokażemy, że odwzorowanie  $\Phi_F : \overline{B_{V_1}(0_1; r)} \rightarrow \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}$  jest bijekcją. W tym celu wybierzmy (dowolnie)  $w \in \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}$  i rozważmy odwzorowanie

$$\Phi_F^w : \overline{B_{V_1}(0_1; r)} \rightarrow V_1 : v \mapsto w + \Phi_F(v).$$

Jako że  $2\|w\|_1, \|v\|_1 \leq r$ , mamy

$$\forall_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F^w(v)\|_1 \leq \|w\|_1 + \|\Phi_F(v)\|_1 \leq r,$$

więc w istocie  $\Phi_F^w(\overline{B_{V_1}(0_1; r)}) \subset \overline{B_{V_1}(0_1; r)}$ , a ponieważ  $\|D\Phi_F^w(v)\|_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)} \leq \frac{1}{2}$ , przeto

$$\begin{aligned} \forall_{v_1, v_2 \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} : \|\Phi_F^w(v_1) - \Phi_F^w(v_2)\|_1 &= \|\Phi_F^w(v_1 - v_2)\|_1 \\ &\leq \sup_{v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}} \|D\Phi_F^w(v)\|_{\text{op}} \cdot \|v_1 - v_2\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_1, \end{aligned}$$

więc też – na mocy Tw. 10 –  $\Phi_F^w$  ma jednoznacznie określony punkt stały  $v \in \overline{B_{V_1}(0_1; r)}$ , a w nim

$$v = \Phi_F^w(v) \equiv w + v - F(v) \quad \Leftrightarrow \quad w = F(v).$$

Ostatecznie wnioskujemy więc, że odwzorowanie  $F$  jest odwracalne na zbiorze domkniętym  $F^{-1}(\overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}) =: B$ . Bez trudu przekonujemy się o ograniczoności teźże lokalnej odwrotności  $G$ , oto bowiem dla dowolnego  $v_1, v_2 \in B$  spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} \|G(F(v_2)) - G(F(v_1))\|_1 &\equiv \|v_2 - v_1\|_1 = \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 \\ &\leq \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \|\Phi_F(v_2) - \Phi_F(v_1)\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \frac{1}{2} \|v_2 - v_1\|_1 \\ &\equiv \|F(v_2) - F(v_1)\|_1 + \frac{1}{2} \|G(F(v_2)) - G(F(v_1))\|_1, \end{aligned}$$

z której wynika lipschitzowskość  $G$ ,

$$\forall_{w_1, w_2 \in \overline{B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})}} : \|G(w_2) - G(w_1)\|_1 \leq 2\|w_2 - w_1\|_w,$$

z tej zaś – pożądana ciągłość  $G$ . W następnej kolejności dowodzimy różniczkwalności  $G$  w otwartej kuli  $B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$ . W tym celu ustalmy (dowolnie)  $w \in B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$  oraz  $h \in V_1$  na tyle małe, aby był spełniony warunek  $w +_1 h \in B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2})$ , a zatem aby istniały (dane jednoznacznie) wektory  $v = G(w) \in B_{V_1}(0_1; r)$  oraz  $u = G(w +_1 h) - G(w) \in V_1$ . Możemy teraz – w świetle poczynionych założeń – zdefiniować odwzorowanie

$$H := DF(v)^{-1} \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$$

i policzyć

$$\|G(w +_1 h) - G(w) - H(w +_1 h - w)\|_1 \equiv \|u - H(F(v +_1 u) - F(v))\|_1,$$

co wobec ciągłej różniczkwalności  $F$ ,

$$F(v +_1 u) - F(v) = DF(v)(u) + \mathcal{R}_2 F(v; u), \quad \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2 F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} = 0,$$

pozwala zapisać

$$\begin{aligned} \|G(w +_1 h) - G(w) - H(h)\|_1 &= \|u - H \circ DF(v)(u) - H(\mathcal{R}_2 F(v; u))\|_1 \\ &= \|H(\mathcal{R}F(v; u))\|_1 \leq \|H\|_{\text{op}} \cdot \|\mathcal{R}F(v; u)\|_1 \\ &\equiv \|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|G(w +_1 h) - G(w)\|_1, \end{aligned}$$

czyli też – biorąc pod uwagę stwierdzoną wcześniej ograniczoność  $G$  –

$$\begin{aligned} \|G(w +_1 h) - G(w) - H(h)\|_1 &\leq 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|w +_1 h - w\|_1 \\ &\equiv 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \cdot \|h\|_1. \end{aligned}$$

Powyższa formuła dowodzi różniczkwalności  $G$ , oto bowiem – skoro  $\|w\|_1 \leq 2\|h\|_V$  (jak wynika z lipschitzowskością  $G$ ) –

$$2\|H\|_{\text{op}} \cdot \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} \xrightarrow{\|h\|_1 \rightarrow 0} 2\|H\|_{\text{op}} \cdot \lim_{\|u\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}F(v; u)\|_1}{\|u\|_1} = 0,$$

a zarazem pozwala stwierdzić – zgodnie z oczekiwaniami – równość

$$(32) \quad DG(w) = H \equiv DF(G(w))^{-1}.$$

W konsekwencji ciągłości  $G, DF$  oraz operacji  $\text{Inv}$  brania odwrotności (odwzorowania liniowego), formuła powyższa zaświadcza o ciągłości odwzorowania  $DG = \text{Inv} \circ DF \circ G : B_{V_1}(0_1; \frac{r}{2}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1)$ . Wreszcie biorąc pod uwagę gładkość operacji brania odwrotności (i mając na względzie banachowską naturę przestrzeni  $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}^k(V_1, V_1)$ ,  $k \in \overline{1, q}$ ), drogą indukcji dowodzimy przynależności odwzorowania  $G$  do klasy  $C^q$ , wykorzystując Stw. 56 w rekurencyjnym wzorze  $D^k G \equiv D(D^{k-1} G)$ .  $\square$

Niepoślednią rolę odgrywa także

**Twierdzenie 16** (O odwzorowaniu uwikłanym). Przyjmijmy zapis Def.30. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ),  $\mathcal{U}_\beta \subset V_\beta, \beta \in \{1, 2\}$  podzbiórami otwartymi,  $F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow V_3$  zaś – odwzorowaniem klasy  $C^q$ ,  $q \in \mathbb{N}^\times \cup \{\infty\}$ . Niech dalej  $(v_*, w_*) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  i załóżmy, że  $F(v_*, w_*) = 0$  oraz że pochodna  $D_2 F(v_*, w_*) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_2, V_3)$  względem argumentu z  $\mathcal{U}_2$  ma ciągłą odwrotność. Wówczas istnieje takie otoczenie otwarte  $\mathcal{O} \ni v_*$ , na którym jest jednoznacznie określone odwzorowanie  $G \in C^q(\mathcal{O}, \mathcal{U}_2)$  o własnościach

$$G(v_*) = w_*, \quad \forall_{v \in \mathcal{O}} : F(v, G(v)) = 0.$$

*Dowód:* Przechodząc od  $F$  do  $D_2F(v_*, w_*)^{-1} \circ F$ , możemy zawsze doprowadzić do tego, że pochodna  $F$  względem drugiego argumentu jest w  $(v_*, w_*)$  odwzorowaniem tożsamościowym na  $V_3 \equiv V_2$ . Przyjawszy taki właśnie punkt wyjścia, rozważmy odwzorowanie

$$\Phi_F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow V_1 \times V_2 : (v, w) \longmapsto (v, F(v, w)).$$

Jego pochodna  $D\Phi_F : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2)$  przyjmuje w  $(v_*, w_*)$  prostą postać

$$D\Phi_F(v_*, w_*) = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ D_1F(v_*, w_*) & D_2F(v_*, w_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ D_1F(v_*, w_*) & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

jest zatem jawnie odwracalna,

$$D\Phi_F(v_*, w_*)^{-1} = \begin{pmatrix} \text{id}_{V_1} & 0 \\ -D_1F(v_*, w_*) & \text{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

co w świetle Tw. 15 oznacza istnienie na pewnym otoczeniu  $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \ni (v_*, w_*)$  odwzorowania

$$\Psi : \Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \equiv \mathcal{W}_1 \times F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \longrightarrow \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$$

klasy  $C^q$  spełniającego warunki

$$\Phi_F \circ \Psi = \text{id}_{\Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2)}, \quad \Psi \circ \Phi_F \upharpoonright_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2} = \text{id}_{\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2}.$$

Wobec oczywistej własności tego odwzorowania,

$$\text{pr}_1 \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{W}_1},$$

wniosujemy na tej podstawie o istnieniu odwzorowania  $\tilde{G} \in C_{\mathbb{K}}^q(\Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2), \mathcal{W}_2)$  spełniającego warunki

$$\forall_{(v,w) \in \Phi_F(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2)} \forall_{u \in \mathcal{W}_2} : [ F(v, \tilde{G}(v, w)) = w \quad \wedge \quad \tilde{G}(v, F(v, u)) = u ].$$

Powyższe formuły podpowiadają zdefiniowanie odwzorowanie

$$G : \mathcal{W}_1 \longrightarrow \mathcal{W}_2 : v \longmapsto \tilde{G}(v, 0_2)$$

klasy  $C^q$ , które w oczywisty sposób spełnia warunki z treści dowodzonego twierdzenia (dla  $\mathcal{O} \equiv \mathcal{W}_1$ ),

$$\forall_{v \in \mathcal{W}_1} : F(v, G(v)) \equiv F(v, \tilde{G}(v, 0)) = 0_2.$$

Na tym etapie pozostaje już tylko udowodnić jednoznaczność wyboru  $G$ , co jest konieczne, gdyż w powyższej definicji  $G$  dokonaliśmy arbitralnego wyboru przy przejściu od (danego jednoznacznie) odwzorowania  $\tilde{G}$  do  $G$ . Niech zatem  $G_*$  będzie dowolnym ciągłym odwzorowaniem określonym na pewnym otoczeniu otwartym  $\tilde{\mathcal{O}} \ni v_*$  i spełniającym warunki

$$G_*(v_*) = w_*, \quad \forall_{v \in \tilde{\mathcal{O}}} : F(v, G_*(v)) = 0_2.$$

Wówczas dla  $v \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{W}_1$  zachodzi tożsamość

$$\Phi_F(v, G_*(v)) = (v, F(v, G_*(v))) = (v, 0_2),$$

jeśli więc tylko  $G_*(v) \in \mathcal{W}_2$ , a wobec ciągłości  $G_*$  wartości  $G_*(v)$  są dowolnie bliskie  $w_*$ , to stwierdzamy równość

$$(v, G_*(v)) = \Psi \circ \Phi_F(v, G_*(v)) = \Psi(v, 0_2) = (v, G(v)),$$

czyli  $G_*(v) = G(v)$  dla  $v \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \mathcal{W}_1 \cap G_*^{-1}(\mathcal{W}_2)$ , przy czym to ostatnie przecięcie jest niepustym zbiorem otwartym (zawierającym w szczególności  $v_*$ ), co dowodzi lokalnej jednoznaczności  $G$ .  $\square$

Na zakończenie niniejszej zwięzłej rekapitulacji podstawowych twierdzeń dotyczących rachunku różniczkowego i całkowego na przestrzeniach Banacha przypomnimy jeszcze

**Twierdzenie 17** (O rzędzie odwzorowania). Przyjmijmy zapis Def. 30. Niechaj  $(V_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  będą przestrzeniami Banacha (nad ciałem  $\mathbb{K}$ ) wymiaru  $\dim_{\mathbb{K}} V_\alpha = N_\alpha \in \mathbb{N}$ , niech  $v \in V_1$  i niech  $\mathcal{U}_v \ni v$  będzie jego otwartym otoczeniem w  $V_1$ , wreszcie też niech  $F \in C^q(\mathcal{U}_v, V_2)$ ,  $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , przy czym zakładamy, że  $DF$  ma stały rząd  $\text{rk} DF = r$ , tj. odwzorowanie  $\mathcal{U}_v \rightarrow \mathbb{N} : v \mapsto \dim_{\mathbb{K}} \text{Im} DF(v)$  jest stałe. Wówczas istnieje otwarte otoczenie  $\mathcal{O}_v \subset \mathcal{U}_v$  wektora  $v$  oraz homeomorfizm

$$\iota_1 : \mathcal{O}_v \xrightarrow{\cong} B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$$

o własnościach  $\iota_1 \in C^q(\mathcal{U}_v, B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1))$  oraz  $\iota_1^{-1} \in C^q(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1), \mathcal{U}_v)$ , jak również otwarte otoczenie  $\mathcal{W} \supset F(\mathcal{U}_v)$  wektora  $F(v)$  oraz homeomorfizm

$$\iota_2 : B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}$$

o własnościach  $\iota_2 \in C^q(B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1), \mathcal{W})$  oraz  $\iota_2^{-1} \in C^q(\mathcal{W}, B_{\mathbb{K}^{n_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1))$ , które zadają rozkład  $F$  postaci

$$(33) \quad F = \iota_2 \circ \pi_{1,2,\dots,r} \circ \iota_1,$$

zapisany przy użyciu odwzorowania

$$\pi_{1,2,\dots,r} : \mathbb{K}^{n_1} \rightarrow \mathbb{K}^{n_2} : (k_1, k_2, \dots, k_{n_1}) \mapsto (k_1, k_2, \dots, k_r, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}).$$

*Dowód:* Bez straty ogólności możemy przyjąć, że  $v = 0_1$  oraz  $F(v) = 0_2$  (wystarczy zastąpić odwzorowanie  $F$  odwzorowaniem  $\mathcal{U}_v \rightarrow V_2 : w \mapsto F(v+w) - F(v)$ ), co też uczynimy. Dopelnienie proste  $\text{Ker} DF(0_1)$  w  $V_1$  jest  $r$ -wymiarową podprzestrzenią  $V_1$ , którą będziemy oznaczać symbolem  $\Delta_1$ ,

$$V_1 \cong \Delta_1 \oplus \text{Ker} DF(0_1).$$

Wybrawszy w  $V_1$  bazę  $\{v_i\}_{i \in \overline{1, n_1}} =: \mathcal{B}_1$  będącą konkatenacją baz:  $\{v_j\}_{j \in \overline{1, r}}$  w  $\Delta_1$  oraz  $\{v_{r+k}\}_{k \in \overline{1, n_1-r}}$  w  $\text{Ker} DF(0_1)$ , a wraz z nią – bazę dualną  $\{\varphi_i\}_{i \in \overline{1, n_1}}$  w  $V_1^*$ ,

$$\varphi_i(v_l) = \delta_{i,l}^{\mathbb{K}}, \quad i, l \in \overline{1, n_1},$$

definiujemy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\kappa_1 : V_1 \rightarrow \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{\times n_1-r} \subset \mathbb{K}^{\times n_1} : w \mapsto \sum_{k=1}^{n_1-r} \varphi_{r+k}(w) \triangleright_{\mathbb{K}^{n_1}} e_{r+k},$$

gdzie  $\{e_i\}_{i \in \overline{1, n_1}}$  jest bazą standardową w  $\mathbb{K}^{\times n_1}$ . Wybierzmy następnie w  $V_2$  bazę  $\{w_a\}_{a \in \overline{1, n_2}} =: \mathcal{B}_2$  będącą konkatenacją baz:  $\{w_b \equiv DF(0_1)(v_b)\}_{b \in \overline{1, r}}$  w  $\text{Im} DF(0)$  oraz  $\{w_{r+c}\}_{c \in \overline{1, n_2-r}}$  w dopelnieniu  $\Delta_2$  podprzestrzeni  $\text{Im} DF(0) \subset V_2$ ,

$$V_2 \cong \text{Im} DF(0) \oplus \Delta_2,$$

wraz z odnośną bazą dualną  $\{\psi_a\}_{a \in \overline{1, n_2}}$ ,

$$\psi_a(w_b) = \delta_{a,b}^{\mathbb{K}}, \quad a, b \in \overline{1, n_2},$$

po czym zdefiniujemy odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\kappa_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{K}^{\times r} \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\} \subset \mathbb{K}^{\times n_1} : w \mapsto \sum_{b=1}^r \psi_b(w) \triangleright_{\mathbb{K}^{n_1}} e_b,$$

Możemy już teraz określić odwzorowanie  $\mathbb{K}$ -liniowe

$$\Phi : \mathcal{U}_{0_1} \rightarrow \mathbb{K}^{\times n_1} : w \mapsto \kappa_2 \circ F(w) +_{\mathbb{K}^{n_1}} \kappa_1(w),$$

jawnie różniczkowalne w sposób ciągły, przy czym dla dowolnych  $w \in \mathcal{U}_{0_1}$  oraz  $u \in V_1$  zachodzi – wprost na mocy definicji odwzorowań  $\kappa_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  (i wobec  $\mathbb{K}$ -liniowości form  $\varphi_i$  oraz  $\psi_a$ ) – równość

$$(34) \quad D\Phi(w)(u) = \kappa_2(DF(w)(u)) +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \kappa_1(\text{id}_{V_1}(u)) \equiv \kappa_2(DF(w)(u)) +_{\mathbb{K}^{\times n_1}} \kappa_1(u),$$



a zatem w szczególności, dla dowolnego  $i \in \overline{1, n_1}$ ,

$$\begin{aligned} D\Phi(0_1)(v_i) &= \kappa_2(DF(0_1)(v_i)) +_{\mathbb{K}^{n_1}} \kappa_1(v_i) \\ &= \begin{cases} \kappa_2(w_i) +_{\mathbb{K}^{n_1}} \mathbf{0}_{n_1} = e_i, & \text{gdy } i \notin \overline{1, r} \\ \mathbf{0}_{n_1} +_{\mathbb{K}^{n_1}} \kappa_1(v_i) = e_i, & \text{gdy } i \in \overline{r+1, n_1} \end{cases} \\ &\equiv e_i. \end{aligned}$$

Macierz pochodnej  $D\Phi(0_1)$  względem baz  $\mathcal{B}_1$  i  $\mathcal{B}_2$  przyjmuje więc postać

$$[D\Phi(0_1)]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \mathbf{1}_{n_1},$$

a zatem odwzorowanie  $\Phi$  spełnia założenia Tw. 15, na mocy którego istnieje otwarte otoczenie  $\tilde{\mathcal{O}}_{0_1} \subset \mathcal{U}_{0_1}$  wektora  $v = 0_1$  takie, że  $\Phi|_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}}$  jest lokalnym izomorfizmem klasy  $C^q$  (wszak odwzorowania  $\kappa_\alpha$  są klasy  $C^\infty$ ). Co więcej, zważywszy ciągłość odwzorowania  $D\Phi : \mathcal{U}_{0_1} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(V_1, \mathbb{K}^{n_1})$  możemy wybrać  $\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$  na tyle małe, aby  $D\Phi(w)$  było liniową bijekcją dla każdego wektora  $w \in \tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$  – wystarczy przeciąć dowolne otwarte otoczenie  $0_1$ , na którym  $\Phi|_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}}$  jest lokalnym izomorfizmem klasy  $C^q$ , z przeciwobrazem (nieodzownie otwartym) dowolnego otwartego otoczenia odwzorowania  $D\Phi(0_1)$  w zbiorze liniowych izomorfizmów, o którego istnieniu przesądza Stw. 50. Skoro zaś  $\text{Im } DF(w)$  ma stały wymiar nad  $w \in \mathcal{U}_{0_1} \supset \tilde{\mathcal{O}}_{0_1}$ , przeto wobec równości  $D\Phi(w)(u) = \kappa_2(DF(w)(u))$  spełnionej dla dowolnego  $u \in \Delta_1$  (oraz bijektywności  $DF(w)$ ) odwzorowanie  $DF(w)$  jest nieodzownie liniową bijekcją  $r$ -wymiarowej podprzestrzeni  $\Delta_1$  na  $r$ -wymiarową podprzestrzeń  $\text{Im } DF(w)$ , ograniczenie  $\kappa_2|_{\text{Im } DF(w)}$  zaś – liniową bijekcją  $\text{Im } DF(w)$  na  $\text{Im } D\Phi(w) \cong \mathbb{K}^{r}$ . Oznaczmy

$$(35) \quad \Lambda_w := (\kappa_2|_{\text{Im } DF(w)})^{-1} : \mathbb{K}^{r} \xrightarrow{\cong} \text{Im } DF(w),$$

co uczyniwszy, otrzymujemy równość

$$DF(w) = \Lambda_w \circ \kappa_2 \circ DF(w).$$

Odwzorowanie  $\Phi|_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1}}$  zyskuje tu interpretację lokalnej mapy na dziedzinie  $F$  (w przestrzeni modelowej  $\mathbb{K}^{n_1}$ ), odwzorowanie  $\kappa_2|_{\text{Im } DF(w)}$  zaś – interpretację takiejż mapy na stycznej do obrazu  $F$ . Przejdziemy obecnie do uszczegółowienia tak zawiązanego opisu współrzędnego dziedziny i obrazu odwzorowania  $F$ .

W tym celu ustalmy  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  o własności  $B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R) \subset \Phi(\tilde{\mathcal{O}}_{0_1})$  i oznaczmy

$$\mathcal{O}_{0_1} := \Phi^{-1}(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R)) \in \mathcal{T}(V_1)$$

(otwarte otoczenie  $0_1$ ) oraz

$$\iota_1 := \ell_{\frac{1}{R}} \circ \Phi|_{\mathcal{O}_{0_1}} : \mathcal{O}_{0_1} \longrightarrow \ell_{\frac{1}{R}}(B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; R)) = B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1),$$

przy czym – podkreślmy – powyższe odwzorowanie (przeskalowana mapa lokalna) jest jawnie odwracalne (z racji odwracalności  $\Phi|_{\tilde{\mathcal{O}}_{0_1} \supset \mathcal{O}_{0_1}}$ ), pozwala więc zdefiniować

$$F_1 := F \circ \iota_1^{-1} : B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \longrightarrow V_2,$$

tj. zadać wygodną połowicznie (w dziedzinie) współrzędną lokalną prezentację odwzorowania  $F$ . Dokonując rozkładu dziedziny  $F_1$  wedle schematu

$$(36) \quad B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \equiv B_{\mathbb{K}^{n_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1) \cap (\mathbb{K}^{r} \times \mathbb{K}^{n_1-r}),$$

a następnie różniczkując obustronnie tożsamość (zapisaną w obrazie tegoż rozkładu)

$$(37) \quad F(w) = F_1\left(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)\right), \quad w \in \mathcal{O}_{0_1},$$

otrzymujemy – przywoławszy po drodze Stw. 56 oraz Równ. (34), a dla dowolnego  $u \in V_1$  –

$$\begin{aligned} \ell_R \circ DF(w)(u) &= D_1 F_1\left(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)\right) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2(DF(w)(u)) \\ &\quad +_2 D_2 F_1\left(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)\right) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u). \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że

$$\begin{aligned} & D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u) \\ &= (\ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w))) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2(DF(w)(u)). \end{aligned}$$

Obliczając powyższe dla  $u \in \Delta_1 \subset V_1$ , konstatujemy, że

$$(\ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w))) \circ \text{pr}_1 \circ \kappa_2 \circ DF(w) \upharpoonright_{\Delta_1} = 0,$$

ponieważ jednak  $\text{pr}_1 \circ \kappa_2 \circ DF(w) \upharpoonright_{\Delta_1} : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{K}^{xr} \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\} \rightarrow \mathbb{K}^{xr}$  jest – wprost z konstrukcji – (liniową) bijekcją, przeto stwierdzamy na tej podstawie równość

$$(38) \quad \ell_R \circ \Lambda_w - D_1 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) = 0.$$

Ta z kolei oznacza, że

$$D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) \circ \text{pr}_2 \circ \kappa_1(u) = 0_2$$

dla dowolnego wektora  $u \in V_1$ , co wobec surjektywności  $\text{pr}_2 \circ \kappa_1 : V_1 \rightarrow \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{xn_1-r} \rightarrow \mathbb{K}^{xn_1-r}$  pozwala wyprowadzić równość

$$D_2 F_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w), \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_1(w)) = 0.$$

Surjektywność odwzorowania  $\iota_1$  zapewnia – w obrazie rozkładu (36) – słuszność powyższej równości na całej kuli jednostkowej  $B_{\mathbb{K}^{xn_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$ , czyli

$$D_2 F_1 = 0.$$

Koniec końców możemy zatem zapisać – znów w obrazie rozkładu (36) –

$$F_1 = \tilde{F}_1 \circ \text{pr}_1$$

dla pewnego odwzorowania  $\tilde{F}_1 \in C^q(\text{pr}_1(B_{\mathbb{K}^{xn_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)), V_2) \equiv C^q(B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1), V_2)$ , gdzie  $B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1)$  należy rozumieć jako „dysk równikowy” będący miejscem zerowym współrzędnych o indeksach  $k \in \{r+1, \dots, n_1\}$  wewnątrz  $B_{\mathbb{K}^{xn_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$ , przeto także – w świetle Równ. (37) –

$$\forall_{u \in F(\mathcal{O}_{0_1})} : u = \tilde{F}_1((\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2)(u)).$$

Przywoławszy definicję odwzorowania  $\Phi$  (i ograniczywszy w niej dziedzinę do  $\mathcal{O}_{0_1}$  zgodnie z przedstawionym wyżej tokiem rozumowania), bez trudu zauważamy, że obrazem  $r$ -wymiarowej powierzchni  $F(\mathcal{O}_{0_1}) \subset V_2$  względem odwzorowania  $\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2$  jest dysk  $B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \equiv \text{pr}_1(B_{\mathbb{K}^{xn_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1))$ , ten zaś jest przez  $\tilde{F}_1$  (czyli – równoważnie – przez  $F_1$ ) przeprowadzany na  $F(\mathcal{O}_{0_1})$ , przy czym – wobec definicji (ograniczonej) lokalnej mapy  $\Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}$  – dowolny punkt dysku  $x \in B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \times \{\mathbf{0}_{n_1-r}\}$  jest przez  $\iota_1^{-1} \equiv \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_{0_1}}^{-1} \circ \ell_R$  odwzorowywany w punkt  $w_x \in \mathcal{O}_{0_1}$ , którego obraz  $F(w_x)$  spełnia oczywisty warunek

$$\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2(F(w_x)) \equiv \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2(F(w_x)) + \kappa_1(w_x) = x,$$

co zapiszemy zwięźle w postaci

$$\forall_{x \in B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1)} : (\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2)(\tilde{F}_1(x)) = x.$$

W podsumowaniu stwierdzamy, że  $\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \upharpoonright_{F(\mathcal{O}_{0_1})}$  jest izomorfizmem (klasy  $C^q$ ) między  $F(\mathcal{O}_{0_1})$  a  $B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \subset B_{\mathbb{K}^{xn_1}}(\mathbf{0}_{n_1}; 1)$  o odwrotności  $\tilde{F}_1$ .

Ostatni etap konstrukcji „kanonicznego” lokalnego opisu odwzorowania  $F$  o stałym rzędzie otwiera uzupełnienie dotychczasowej listy odwzorowań pomocniczych o  $\mathbb{K}$ -liniowy izomorfizm

$$\kappa_3 : \mathbb{K}^{xn_2-r} \xrightarrow{\cong} \Delta_2$$

między składową prostą  $\mathbb{K}^{xn_2-r} \cong \{\mathbf{0}_r\} \times \mathbb{K}^{xn_2-r}$  przestrzeni modelowej  $\mathbb{K}^{xr} \times \mathbb{K}^{xn_2-r} \equiv \mathbb{K}^{xn_2}$  dla przeciwdziedziny  $V_2$  w składową prostą  $\Delta_2$  tej ostatniej będącą dopełnieniem podprzestrzeni  $\text{Im } DF(0)$ , a następnie – o odwzorowanie

$$\iota_2 : B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{xn_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1) \rightarrow V_2 : (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \tilde{F}_1(\underline{x}) +_2 \kappa_3(\underline{y}),$$

jawnie różniczkowalne w sposób ciągły (klasy  $C^q$ ). W świetle wcześniejszych naszych obserwacji zachodzi tożsamość

$$\begin{aligned}\kappa_2 \circ \iota_2(\underline{x}, \underline{y}) &= \kappa_2 \circ \widetilde{F}_1(\underline{x}) \equiv \kappa_2 \circ F_1(\underline{x}, \mathbf{0}_{n_1-r}) \equiv \kappa_2 \circ F \circ \Phi \upharpoonright_{\mathcal{O}_1}^{-1} \circ \ell_R(\underline{x}, \mathbf{0}_{n_1-r}) \\ &= R \triangleright_{\mathbb{K}^{xr}} \underline{x},\end{aligned}$$

to jednak przesądza o iniektywności  $\iota_2$ , oto bowiem  $\iota_2(\widetilde{\underline{x}}, \widetilde{\underline{y}}) = \iota_2(\underline{x}, \underline{y})$  implikuje  $\widetilde{\underline{x}} = \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ \iota_2(\widetilde{\underline{x}}, \widetilde{\underline{y}}) = \ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ \iota_2(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}$ , a zatem także  $\kappa_3(\widetilde{\underline{y}}) = \kappa_3(\underline{y})$ , czyli – wobec bijektywności  $\kappa_3$  – ostatecznie  $(\widetilde{\underline{x}}, \widetilde{\underline{y}}) = (\underline{x}, \underline{y})$ . Na podstawie Równ. (38) i wyprowadzonej zeń analizy odwzorowania  $F_1$  stwierdzamy dalej, że

$$D\widetilde{F}_1(\text{pr}_1 \circ \iota_1(w)) \equiv D\widetilde{F}_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w)) = \ell_R \circ \Lambda_w,$$

czyli w obrazie wprowadzonego wcześniej rozkładu (36), w którym  $\iota_1(w) =: (\underline{x}, \underline{y})$ ,

$$D\widetilde{F}_1(\underline{x}) \equiv D\widetilde{F}_1(\ell_{\frac{1}{R}} \circ \kappa_2 \circ F(w)) = \ell_R \circ \Lambda_{\iota_1^{-1}(\underline{x}, \underline{y})}.$$

W takim jednak razie dla dowolnych  $(\underline{x}, \underline{y}) \in B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{xn_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1)$  otrzymujemy formułę

$$D\iota_2(\underline{x}, \underline{y}) : \mathbb{K}^{xr} \times \mathbb{K}^{xn_2-r} \longrightarrow V_2 : (\xi, \zeta) \longmapsto \ell_R \circ \Lambda_{\iota_1^{-1}(\underline{x}, \underline{y})}(\xi) +_2 \kappa_3(\zeta),$$

którą można przepisać, przywoławszy definiującą Równ. (35), w postaci

$$D\iota_2(\underline{x}, \underline{y})(\xi, \zeta) = (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(R \triangleright_{\mathbb{K}^{xr}} \xi) +_2 \kappa_3(\zeta),$$

a ponieważ podprzestrzenie  $\text{Im}(\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}$  i  $\text{Im } \kappa_3$  w przestrzeni  $V_2$  mają jednopunktowe przecięcie,

$$\begin{aligned}(\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(\widetilde{\xi}) = \kappa_3(\widetilde{\zeta}) &\implies \widetilde{\xi} = \kappa_2 \circ \kappa_3(\widetilde{\zeta}) = \mathbf{0}_{n_2} \\ &\implies (\kappa_2 \upharpoonright_{\text{Im } DF(w)})^{-1}(\widetilde{\xi}) = \mathbf{0}_2 = \kappa_3(\widetilde{\zeta}),\end{aligned}$$

a ich wymiary sumują się do wymiaru  $V_2$ , przeto  $D\iota_2(\underline{x}, \underline{y})$  jawi się liniowym homeomorfizmem. W konsekwencji tego faktu, a na mocy Tw. 15, każdy punkt ograniczenia  $B_{\mathbb{K}^{xn_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1) \subset B_{\mathbb{K}^{xr}}(\mathbf{0}_r; 1) \times B_{\mathbb{K}^{xn_2-r}}(\mathbf{0}_{n_2-r}; 1)$  dziedziny odwzorowania  $\iota_2$  ma otoczenie otwarte, które jest przez  $\iota_2$  odwzorowywane na swój obraz w sposób homeomorficzny (w klasie gładkości  $C^q$ ), a ponieważ  $\iota_2$  jest przy tym – jak to zostało pokazane wcześniej – iniekcją, przeto  $\iota_2$  jest homeomorfizmem klasy  $C^q$  (o odwrotności różniczkowalnej w sposób ciągły) na całym zbiorze  $B_{\mathbb{K}^{xn_2}}(\mathbf{0}_{n_2}; 1)$ . Tożsamość (33) wynika już wprost z opisanej tu szczegółowo konstrukcji.  $\square$

Na zakończenie niniejszego zwięzłego przeglądu podstawowych narzędzi i metod analitycznych, do których przyjdzie nam odwoływać się w dyskusji rozmaitych form geometryzacji pojęć algebraicznych, a zarazem w charakterze ilustracji wielu z tych przedstawionych dotychczas wysłowimy obecnie kilka fundamentalnych wyników teorii równań różniczkowych zwyczajnych (i towarzyszących stwierdzeń pomocniczych). Już wkrótce przyjdzie nam zastosować je w analizie istotnych – także z fizycznego punktu widzenia (jak choćby w nader bogatym i ważnym kontekście rozważań nad symetrami nad zjawisk fizycznych) – relacji między polami wektorowymi na rozmaitościach i dyfeomorfizmami oraz w badaniu grup topologicznych ze strukturą różniczkową. Zaczniemy od fundamentalnego

**Twierdzenie 18** (Picarda–Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego). Przyjmijmy zapis Def. 22, 30 oraz Przykł. 3 (1) i ustalmy (dowolnie)  $N \in \mathbb{N}^x$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^{xN}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  oraz  $\varepsilon, r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Niechaj będzie dane odwzorowanie

$$f : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)} \longrightarrow \mathbb{R}^{xN}$$

ciągłe w pierwszym argumentie i spełniające warunek Lipschitza (26) w drugim argumentie ze stałą Lipschitza  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , a nadto oznaczmy

$$\sup_{y \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)}} \|f(y)\|_N =: M.$$

Wówczas **zagadnienie początkowe**

$$(39) \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie  $x \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)})$ , o ile

$$(40) \quad 0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}.$$

W konsekwencji powyższego dla dowolnego podzbioru zwartego  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{1+N}$  zawartego w otwartej dziedzinie  $\mathcal{O}$  ciągłości funkcji  $f$  istnieje stała  $\varepsilon_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}_{>0}$  taka, że dla dowolnego punktu  $(t_0, x_0) \in \mathcal{K}$  zagadnienie początkowe (39) ma dokładnie jedno rozwiązanie na odcinku  $]t_0 - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_0 + \varepsilon_{\mathcal{K}}[$ .

*Dowód:* Zaczniemy od takiego przeformułowania zagadnienia początkowego (39), które pozwoli na zastosowanie Tw. 10 wobec odwzorowania zwięzającego realizującego iteracyjną metodę odcałkowania (39). Oto więc na podstawie założenia o ciągłości  $f$  (zwróćmy uwagę na to, że warunek Lipschitza względem drugiego argumentu implikuje ciągłość  $f$  w tymże argumentcie), możemy przepisać (39) w równoważnej postaci całkowej

$$x(t) = x_0 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{1+N}} f(\cdot, x(\cdot)).$$

Istotnie, jeśli poszukiwane rozwiązanie jest różniczkowalne w sposób ciągły w  $t$  (a takie jest wprost z definicji), to jest też ciągłe w  $t$  i możemy odcałkować prawą stronę równania różniczkowego (39). I odwrotnie, jeśli znajdziemy rozwiązanie wypisanego powyżej zagadnienia całkowego ciągłe w  $t$ , to – jak łatwo widać wprost – będzie ono także różniczkowalne w sposób ciągły<sup>12</sup>. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)} &: C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}) \longrightarrow C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}) \\ &: g \longmapsto \left( t \longmapsto x_0 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{1+N}} f(\cdot, g(\cdot)) \right), \end{aligned}$$

zwane **funkcjonałem Picarda**. Funkcja  $\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}[g]$  jest jawnie ciągła, pozostaje jedynie sprawdzić, że jej wartości są zawarte w kuli  $\overline{B^N(x_0; r)}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g)(t) - x_0\|_N &= \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{1+N}} f(\cdot, g(\cdot)) \right\|_N \leq M \cdot |t - t_0| \\ &\leq M\varepsilon < r, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystaliśmy oszacowanie (30) oraz założenie (40). Następnie bez trudu przekonujemy się, że funkcjonal Picarda jest odwzorowaniem zwięzającym – istotnie, dla dowolnych dwóch odwzorowań  $g_1, g_2 \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)})$  norma różnicy  $\|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2)(\cdot) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)(\cdot)\|_N$  jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  i jako taka osiąga – w świetle Stw. 39 oraz 52 – swoje kresy, w szczególności istnieje punkt  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  o własności

$$\|(\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1))(t)\|_N = \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)\|_{\infty},$$

możemy więc zapisać, przywołując Równ. (30) oraz warunek Lipschitza dla  $f$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_2) - \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(g_1)\|_{\infty} &= \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{1+N}} [f(\cdot, g_2(\cdot)) - f(\cdot, g_1(\cdot))] \right\| \\ &\leq |t - t_0| \cdot \sup_{s \in [t_0, t]} \|f(s, g_2(s)) - f(s, g_1(s))\|_N \\ &\leq L \cdot |t - t_0| \cdot \sup_{s \in [t_0, t]} \|g_2(s) - g_1(s)\|_N \\ &\leq L \cdot \varepsilon \cdot \|g_2 - g_1\|_{\infty} < \|g_2 - g_1\|_{\infty}. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>W przypadku zagadnienia **autonomicznego** klasy  $C^k$ , tj. takiego, w którym funkcja  $f$  zależy od  $t$  tylko poprzez zależność od  $x$  i ta ostatnia jest klasy  $C^k$ , rozwiązanie klasy  $C$  względem  $t$ , będąc – jak w przypadku ogólnym – klasy  $C^1$ , jest automatycznie klasy  $C^2$ , a zatem także klasy  $C^3$  itd., przy czym jedynym ograniczeniem tego ciągu wyników jest stopień ciągłej różniczkowości  $f$ . Widzimy więc, że rozwiązanie klasy  $C$  w  $t$  jest zarazem klasy  $C^{k+1}$ .

Na podstawie dotychczasowych ustaleń stwierdzamy w świetle Tw. 10 odniesionego tutaj do przestrzeni metrycznej  $(C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \overline{B^N(x_0; r)}), \|\cdot\|_\infty)$ , o której zupełności przesądza Stw. 46, że funkcjonal Picarda ma dokładnie jeden punkt stały,

$$x_0 + \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{N \times N}} f(\cdot, x(\cdot)) = \mathcal{P}_{f; (t_0, x_0)}(x)(\cdot) = x(\cdot),$$

ten zaś jest właśnie rozwiązaniem zagadnienia początkowego (39) przewidzianym w tezie dowodzonego twierdzenia.

Przejdźmy następnie do drugiej części tezy. Odwzorowanie  $f$  jest teraz określone (i ciągłe) na pewnym zbiorze otwartym  $\mathcal{O}$  zawierającym zwarty podzbiór  $\mathcal{K}$ , a nadto spełnia na  $\mathcal{O}$  warunek Lipschitza w drugim argumencie ze stałą  $L$ . Niechaj  $\tilde{\mathcal{K}}$  i  $(h, r)$  będą jak w tezie Stw. 55. Zastępując zbiór  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B^N(x_0; r)}$  w definicji stałej  $M$  zbiorem zwartym  $\tilde{\mathcal{K}}$  (na którym także funkcja  $f$  osiąga supremum), pożądaną tezę otrzymujemy wprost z wcześniejszych rozważań, o ile tylko wybierzemy (dowolnie)

$$0 < \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq \min\left\{h, \frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}.$$

□

Pierwszym z pytań, przed jakimi stawia nas powyższe twierdzenie, jest to dotyczące możliwości zszywania rozwiązań lokalnych i jednoznaczności otrzymanego tą drogą wzajemnego przedłużenia tychże rozwiązań na sumę mnogościową (nakładających się na siebie) odnośnych przedziałów określoności. Odpowiedzi na tak postawione pytanie udziela

**Twierdzenie 19** (O jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego w dziedzinie określoności). Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 18. Niechaj  $I_\alpha := [t_{0\alpha} - \varepsilon_\alpha, t_{0\alpha} + \varepsilon_\alpha] \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  i niech odwzorowania  $x_\alpha : I_\alpha \rightarrow \overline{B^N(x_{0\alpha}; r_\alpha)}$  będą odnośnymi rozwiązaniami zagadnienia początkowego (39) (przy podstawieniu  $(t_0, x_0) \mapsto (t_{0\alpha}, x_{0\alpha})$ ). Ilekroć istnieje  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ , w którym  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ , wówczas zachodzi równość

$$(x_2 - x_1) \upharpoonright_{I_1 \cap I_2} = 0,$$

a odwzorowanie

$$x : I_1 \cup I_2 \rightarrow \overline{B^N(x_{01}; r_1)} \cup \overline{B^N(x_{02}; r_2)} : t \mapsto \begin{cases} x_1(t) & \text{dla } t \in I_1 \\ x_2(t) & \text{dla } t \in I_2 \end{cases}$$

jest rozwiązaniem zagadnienia na  $I_1 \cup I_2$ .

*Dowód:* Wobec zwartości  $I_A$  także  $I_1 \cap I_2$  jest zwarty, co wobec ciągłości  $x_A$  implikuje zwartość zbioru  $\Gamma := (\text{id}_{\mathbb{R}}, x_1)(I_1 \cap I_1) \cup (\text{id}_{\mathbb{R}}, x_2)(I_1 \cap I_1)$  na mocy Stw. 39. Niechaj  $L$  będzie stałą Lipschitza dla  $f$  na  $\Gamma$ , a wtedy w dowolnym punkcie  $t \in I_1 \cap I_2$  stwierdzamy – w odwołaniu do (liniowości całki Cauchy'ego–Bochnera oraz) oszacowania (30) – równość

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\|_N &= \left\| x_2(t_0) + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{N \times N}} f(\cdot, x_2(\cdot)) - x_1(t_0) - \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{N \times N}} f(\cdot, x_1(\cdot)) \right\|_N \\ &= \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{N \times N}} [f(\cdot, x_2(\cdot)) - f(\cdot, x_1(\cdot))] \right\|_N \\ &\leq \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} \|f(\cdot, x_2(\cdot)) - f(\cdot, x_1(\cdot))\|_N \\ &\leq \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}} L \|(x_2 - x_1)(\cdot)\|_N, \end{aligned}$$

przy czym wykorzystaliśmy równania całkowe definiujące  $x_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$ , które pozwalają zapisać

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= x_{0\alpha} + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \equiv x_\alpha(t_{0\alpha}) + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \\ &= x_\alpha(t_0) - x_\alpha(t_{0\alpha}) - \int_{[t_{0\alpha}, t_0]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) + x_\alpha(t_{0\alpha}) + \int_{[t_{0\alpha}, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)) \end{aligned}$$

$$= x_\alpha(t_0) + \int_{[t_0, t]; V} f(\cdot, x_\alpha(\cdot)).$$

Funkcje  $(f, \varphi) = (\|x_2(\cdot) - x_1(\cdot)\|_N, L)$  spełniają założenia Stw. 60 przy  $I = \text{Int}(I_1 \cap I_2)$  dla  $c = 0$ , co prowadzi do wniosku, że

$$\forall t \in \text{Int}(I_1 \cap I_2) : \|x_2(t) - x_1(t)\|_N = 0,$$

czyli wobec ciągłości obu rozwiązań

$$\forall t \in I_1 \cap I_2 : x_2(t) = x_1(t).$$

Odwzorowanie  $x$  z treści dowodzonego twierdzenia jest zatem dobrze określone, klasy  $C^r$  i stanowi – w rzeczy samej – rozwiązanie zagadnienia na  $I_1 \cup I_2$ .  $\square$

Granice opisanej przez nas procedury przedłużania rozwiązań nakreśla następne twierdzenie, które ukazuje zarazem pewną globalną regularność zachowania rozwiązań.

**Twierdzenie 20** (O przedłużaniu rozwiązania zagadnienia Cauchy’ego). Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 18. Dla każdego  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$  rozwiązanie zagadnienia początkowego (39) przedłuża się do pewnego maksymalnego przedziału określoności  $I_f(t_0, x_0) = ]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[ \subset \mathbb{R}$ . Ponadto jeśli  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  jest zbiorem zwartym zawierającym  $(t_0, x_0)$ , to istnieją liczby  $a_f(\mathcal{K}), b_f(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}$  spełniające warunek  $a_f(t_0, x_0) < a_f(\mathcal{K}) < b_f(\mathcal{K}) \leq b_f(t_0, x_0)$ , dla których zachodzi implikacja

$$\forall t \in I_f(t_0, x_0) \setminus [a_f(\mathcal{K}), b_f(\mathcal{K})] : (t, x(t)) \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{K}.$$

*Dowód:* Zdefiniujmy  $\mathcal{A}$  jako zbiór wszystkich przedziałów otwartych  $I \subset \mathbb{R}$  zawierających  $t_0$ , na których są określone odnośne rozwiązania  $x_I : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  zagadnienia początkowego (39). Na mocy Tw. 18 zbiór ten jest niepusty, przeto możemy zdefiniować podzbiór otwarty

$$I_f(t_0, x_0) := \bigcup_{I \in \mathcal{A}} I \subset \mathbb{R}.$$

Skoro  $t_0 \in I$ , jest jasnym, że  $I_f(t_0, x_0)$  jest przedziałem (otwartym),  $I_f(t_0, x_0) = ]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[$ , przy czym może to być przedział jedno- lub obustronnie nieograniczony. Rozważmy dowolny punkt  $t \in I_f(t_0, x_0)$ . Wprost z definicji istnieje  $I \in \mathcal{A}$  taki, że  $t \in I$ , a zatem także rozwiązanie  $x_I$  na  $I$ . Jeśli także  $I' \in \mathcal{A}$  zawiera  $t$ , to na mocy Tw. 19 jest  $(x_{I'} - x_I)|_{I \cap I'} = 0$ , czyli w szczególności  $x_{I'}(t) = x_I(t)$ . Oznacza to, że możemy zdefiniować odwzorowanie

$$x : I_f(t_0, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^N : t \longmapsto x_I(t),$$

gdzie  $I \in \mathcal{A}$  jest dowolnym przedziałem zawierającym  $t$ . Tak określone odwzorowanie jest – w świetle Tw. 18 – (jedynym) rozwiązaniem zagadnienia początkowego na  $I_f(t_0, x_0)$ , co przesądza o maksymalności  $I_f(t_0, x_0)$ .

Jeśli teraz  $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$  jest zbiorem zwartym zawierającym  $(t_0, x_0)$ , to możemy zdefiniować zbiór

$$G(\mathcal{K}) := \{ t \in I_f(t_0, x_0) \mid (t, x(t)) \in \mathcal{K} \},$$

który na mocy Tw. 18 jest niepusty. Jako że  $\mathcal{K}$  jest zwarty, przeto – w świetle Stw. 52 –  $G(\mathcal{K})$  jest ograniczony, a w takim razie

$$b_f(\mathcal{K}) := \sup G(\mathcal{K}) < \infty.$$

Wystarczy pokazać, że  $b_f(\mathcal{K}) < b_f(t_0, x_0)$ . Niechaj więc  $t_* \in G(\mathcal{K})$ , co oznacza, że  $(t_*, x_*) := (t_*, x(t_*)) \in \mathcal{K}$ . W odwołaniu do Tw. 18 możemy zatem znaleźć na przedziale  $]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[ \ni t$  (jedyne) rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_*) = x_*,$$

które w świetle Tw. 19 spełnia warunek

$$(y - x)|_{I_f(t_0, x_0) \cap ]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[} = 0$$

i przedłuża się do  $x$  na  $I_f(t_0, x_0) \cup ]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[$ . Jednakowoż przedział  $I_f(t_0, x_0)$  jest maksymalny, więc koniecznie  $I_f(t_0, x_0) \cup ]t_* - \varepsilon_{\mathcal{K}}, t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}[ = I_f(t_0, x_0)$ , to zaś oznacza, że (każde)  $t_*$  spełnia

nierówność  $t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq b_f(t_0, x_0)$ , więc też  $\sup_{t_* \in G(\mathcal{K})} (t_* + \varepsilon_{\mathcal{K}}) \leq \sup_{t_* \in G(\mathcal{K})} b_f(t_0, x_0)$ , a to pozwala stwierdzić, że

$$b_f(\mathcal{K}) + \varepsilon_{\mathcal{K}} \leq b_f(t_0, x_0) \quad \implies \quad b_f(\mathcal{K}) < b_f(t_0, x_0).$$

Analogicznie rozumiemy w odniesieniu do

$$a_f(\mathcal{K}) := \inf G(\mathcal{K}) > -\infty,$$

przekonując się, że  $a_f(\mathcal{K}) > a_f(t_0, x_0)$ . □

Dotychczasowe nasze rozważania przygotowują grunt pod szczegółową analizę funkcjonalnej natury zależności rozwiązań zagadnienia początkowego od danych początkowych  $(t_0, x_0)$ . Wyniki tej analizy mają absolutnie kapitalne znaczenie zarówno dla zastosowań równań różniczkowych zwyczajnych w modelowaniu dynamiki układów fizycznych, jak i dla zrozumienia relacji między (gładkimi) rozkładami wektorów na nietrywialnych geometriach (tzw. gładkimi polami wektorowymi) i przekształceniami tych ostatnich, która stanowi punkt wyjścia chociażby do opisu geometrii w terminach topologii różniczkowej, dostarczając – ze swej strony – głębokiej inspiracji dla konstrukcji funktorialnego schematu kwantowania. Mając to wszystko na uwadze, przechodzimy obecnie do dokładnego omówienia rzeczowej zależności, zaczynając od

**Twierdzenie 21** (O ciągłej zależności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego od danych początkowych). Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 18 i 20. **Dziedzina całkowalności zagadnienia początkowego** (39) o danych początkowych z  $\mathcal{O}$ ,

$$(41) \quad \mathcal{D}_f := \{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O} \mid t \in I_f(t_0, x_0) \},$$

jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^{2+N}$ , a odwzorowanie

$$\Phi_f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}^N : (t, t_0, x_0) \longmapsto x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

zwane **potokiem odwzorowania**  $f$ , jest ciągle. Ponadto funkcja

$$b_f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} : (t_0, x_0) \longmapsto b_f(t_0, x_0)$$

jest półciągła z dołu, a funkcja

$$a_f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} : (t_0, x_0) \longmapsto a_f(t_0, x_0)$$

jest półciągła z góry.

*Dowód:* Nasz dowód twierdzenia zasadza się na słuszności poniższego

**Lemat 1.** Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 21 i niechaj  $I = [a, b]$  będzie dowolnym przedziałem spełniającym warunek  $t_0 \in I \subset I_f(t_0, x_0)$ . Dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie otoczenie otwarte  $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{O}$  punktu  $(t_0, x_0)$ , że dla dowolnego  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$  rozwiązanie zagadnienia początkowego (39) dla danych początkowych  $(t_1, x_1)$  (tj. przy warunku początkowym  $x(t_1) = x_1$ ) jest dobrze określone na  $I$ , przy czym potok  $f$  spełnia relację

$$\forall t \in I : \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon.$$

*Dowód Lematu 1.* Ustalmy  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$  i niech  $I = [a, b]$  będzie jak w treści lematu. Rozważmy zbiór zwarty

$$\mathcal{K} := \{ (t, \Phi_f(t, t_0, x_0)) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid t \in I \}$$

i niech  $\tilde{\mathcal{K}}$  będzie zwartym pokryciem  $\mathcal{K}$  w  $\mathcal{O}$  dla pary  $(h, r) \in ]0, \infty[^{\times 2}$ , którego istnienie orzeka Stw. 55. Wreszcie też niech

$$M := \sup_{(t,x) \in \tilde{\mathcal{K}}} \|f(t, x)\|_N$$

(istnienie  $M$  zapewnia ciągłość  $f$  w połączeniu ze zwartością  $\tilde{\mathcal{K}}$ , a to na mocy Stw. 44, 39 oraz 52) i niech  $L$  będzie stałą Lipschitza dla  $f$  (w drugim argumentcie). Ustalwszy (dowolnie)  $\varepsilon > 0$  przy  $r > \varepsilon$  (warunek ten charakteryzuje  $r$ ), dobierzemy następnie  $\delta > 0$  na tyle małe, iżby otoczenie

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid |t - t_0| < \delta \quad \wedge \quad \|x - x_0\|_N < \delta \}$$

spełniało warunki wymienione w tezie dowodzonego lematu. Oto więc niech  $\delta > 0$  będzie dowolną liczbą spełniającą układ relacji

$$\delta < \min\{h, r\} \quad \wedge \quad ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \subset [a, b] \quad \wedge \quad \delta \cdot (M + 1) \cdot e^{L \cdot (b-a)} < \varepsilon < r,$$

co pociąga za sobą natychmiast relację

$$\mathcal{U}_\varepsilon \subset C_{(h,r)}(t_0, x_0) := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid |t - t_0| < h \quad \wedge \quad \|x - x_0\|_N < r \} \subset \tilde{\mathcal{K}}.$$

Ustalmy (dowolnie)  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$  i niech  $J = [a_1, b_1]$  będzie największym podprzedziałem w  $I_f(t_1, x_1)$ , dla którego spełniona jest relacja

$$\{ (s, \Phi_f(s, t_1, x_1)) \in \mathbb{R}^{1+N} \mid s \in J \} \subset \tilde{\mathcal{K}},$$

przy czym Tw. 18 przesądza o tym, że  $J \neq \emptyset$ , w szczególności zaś  $t_1 \in J$ . Skoro przy tym  $|t_1 - t_0| < \delta$ , to także  $t_1 \in I$ , zatem  $I \cap J \neq \emptyset$ , a ponieważ na mocy Tw. 20 dla dostatecznie dużych (i dostatecznie małych) wartości  $t$  punkty  $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$  leżą poza  $\tilde{\mathcal{K}}$ , przeto  $J \not\subset I_f(t_1, x_1)$ . Skoro jednak dla dowolnego  $t \in I_f(t_\alpha, x_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{0, 1\}$  mamy równości

$$\Phi_f(t, t_\alpha, x_\alpha) = x_\alpha + \int_{[t_\alpha, t]; \mathbb{R}^{1+N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_\alpha, x_\alpha)),$$

to dla  $t \in I \cap J$  otrzymujemy relację

$$\begin{aligned} & \Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0) \\ &= x_1 - x_0 + \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{1+N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{1+N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)) \\ &\equiv x_1 - x_0 - \int_{[t_0, t_1]; \mathbb{R}^{1+N}} f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)) \\ & \quad + \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{1+N}} [f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0))]. \end{aligned}$$

Zważywszy, że dla wszystkich  $t \in I \cap J$  oba rozwiązania pozostają w  $\tilde{\mathcal{K}}$  (w przypadku  $(t_0, x_0)$  rozwiązanie pozostaje wręcz w  $\mathcal{K}$ , wprost na mocy definicji tego zbioru), a ponadto cały odcinek  $I_{01}$  zawarty między  $t_0$  i  $t_1$  zawiera się wewnątrz  $I$ , przeto  $\Phi_f(I_{01}, (t_0, x_0)) \subset \mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{K}}$ , otrzymujemy – w świetle Stw. 57 – oszacowanie

$$\begin{aligned} & \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \\ &\leq \|x_1 - x_0\|_N + |t - t_0| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|f(s, \Phi_f(s, t_0, x_0))\|_N \\ & \quad + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{1+N}} \|f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_1, x_1)) - f(\cdot, \Phi_f(\cdot, t_0, x_0))\|_N \right| \\ &\leq \delta + M \cdot |t_1 - t_0| + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{1+N}} L \cdot \|\Phi_f(\cdot, t_1, x_1) - \Phi_f(\cdot, t_0, x_0)\|_N \right| \\ &\leq \delta \cdot (1 + M) + \left| \int_{[t_1, t]; \mathbb{R}^{1+N}} L \cdot \|\Phi_f(s, t_1, x_1) - \Phi_f(s, t_0, x_0)\|_N \right|, \end{aligned}$$

z którego na podstawie Stw. 60 (i dotychczasowych założeń) wyprowadzamy

$$\|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \leq \delta \cdot (1 + M) \cdot e^{L \cdot |t - t_1|}.$$

Skoro jednak  $t \in I \cap J \subset I \equiv [a, b]$  oraz  $t_1 \in I$ , to  $|t - t_1| \leq b - a$ , a w takim razie – wprost na mocy poczynionych założeń –

$$\|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N \leq \delta \cdot (1 + M) \cdot e^{L \cdot (b-a)} < \varepsilon < r.$$

Nasze rozumowanie pokazuje dowodnie, że na całym odcinku  $I \cap J \ni t$  trajektoria  $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$  pozostaje wewnątrz  $C_{(h,r)}(t_0, x_0)$ , czyli też wewnątrz  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Jednakowoż oba przedziały:  $I$  i  $J$  są nie tylko domknięte, ale także spójne, więc też sytuacja, w której któryś z końców  $k \in \{a_1, b_1\}$  byłby punktem wewnętrznym  $I$  byłaby równoważna temu, że punkt  $(k, \Phi_f(k, t_1, x_1))$  leży na granicy  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Tymczasem pokazaliśmy właśnie, że punkt ten – jak wszystkie punkty na trajektorii będące obrazami punktów z przecięcia  $I \cap J$  – leży *wewnątrz*  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Wyciągamy stąd prosty wniosek, że



$I \subset J$ , a stąd już wprost wynika konkluzja, że  $\Phi_f(t, t_1, x_1)$  jest dobrze określone (jako rozwiązanie rozważanego zagadnienia początkowego dla danych początkowych  $(t_1, x_1)$ ) dla dowolnego  $t \in I$ , nierówności

$$a(t_1, x_1) < a_1 \leq a, \quad b \leq b_1 < b(t_1, x_1)$$

oraz relacja

$$\forall t \in I : \|\Phi_f(t, t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon.$$

□

Udowodniwszy lemat, możemy powrócić do dowodu twierdzenia. Zaczniemy od wykazania ciągłości  $\Phi_f$  na  $\mathcal{D}_f$ . W tym celu ustalmy punkt  $(t, t_0, x_0) \in \mathcal{D}_f$  i wybierzmy stałą  $\varepsilon > 0$  oraz przedział  $I = [a, b] \subset I_f(t_0, x_0)$  taki, by było  $a < t < b$ . Następnie ograniczymy rozważania do otoczenia  $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset \mathcal{O}$  punktu  $(t_0, x_0)$ , o którym mowa w tezie Lematu 1. Wybierzmy punkt  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ , a wtedy dla dowolnego  $t' \in I$  otrzymamy oszacowanie

$$\|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t', t_0, x_0)\|_N < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ciągłość  $\Phi_f(t', t_0, x_0)$  w zmiennej  $t' \in I$ , wynikająca z inkluzji  $I \subset I_f(t_0, x_0)$  (oznaczającej, że odwzorowanie to jest na  $I$  rozwiązaniem zagadnienia początkowego (39) przy warunku początkowym  $(t_0, x_0)$ ), pozwala stwierdzić istnienie  $\delta > 0$  o własności  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \subset I$ , dla którego spełniony jest warunek

$$\|\Phi_f(t', t_0, x_0) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \frac{\varepsilon}{2},$$

o ile tylko  $|t' - t| < \delta$ . W sumie więc dla dowolnego  $(t', t_1, x_1) \in ]t - \delta, t + \delta[ \times \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$  obliczamy

$$\|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N$$

$$\leq \|\Phi_f(t', t_1, x_1) - \Phi_f(t', t_0, x_0)\|_N + \|\Phi_f(t', t_0, x_0) - \Phi_f(t, t_0, x_0)\|_N < \varepsilon,$$

dowodząc tym samym ciągłości potoku  $f$  na  $\mathcal{D}_f$  w rozumieniu Stw. 42. Zauważmy zarazem, że skonstruowany tu zbiór  $]t - \delta, t + \delta[ \times \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}$  jest otwartym otoczeniem (dowolnego) punktu dziedziny  $(t, t_0, x_0)$  w niej zawartym, skąd wniosek, że  $\mathcal{D}_f$  jest w istocie zbiorem otwartym.

Na koniec zajmijmy się zależnością  $b_f$  (wzgl.  $a_f$ ) od argumentu  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$ . Wybierzmy (dowolnie)  $b < b_f(t_0, x_0)$ , a wtedy – na mocy Lematu 1 – istnieje takie otoczenie otwarte  $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathcal{O}$  punktu  $(t_0, x_0)$ , którego dowolny punkt  $(t_1, x_1) \in \mathcal{U}_\varepsilon$  ma dobrze określoną trajektorię  $(t, \Phi_f(t, t_1, x_1))$  dla dowolnego  $t \in [t_1, b]$ , co oznacza, że  $b_f(t_1, x_1) \geq b$ . Takie zachowanie funkcji  $b_f$  w otoczeniu dowolnego punktu  $(t_0, x_0)$  jej dziedziny  $\mathcal{O}$  jest równoznaczne z jej półciągłością z dołu. Analogicznie dowodzimy półciągłości z góry funkcji  $a_f$ . □

W konkretnych przypadkach zagadnienia początkowego, które przyjdzie nam rozważać w dalszej części niniejszego kursu, zależność odwzorowania definiującego  $f$  od parametru ewolucji (pierwszego argumentu) będzie trywialna, nawet jednak w takich okolicznościach droga do odpowiedzi na pytanie o gładkość zależności potoku od danych początkowych wiedzie przez (pomocnicze) zagadnienie początkowe, w którym pojawia się jawna zależność nie tylko od parametru ewolucji, ale wręcz – od parametrów z pewnej topologicznej przestrzeni wektorowej. Tytułem przygotowania do dyskusji przedstawimy

**Twierdzenie 22** (O redukcji zagadnienia Cauchy'ego do postaci autonomicznej). Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 21. Zagadnienie początkowe określone przez odwzorowanie  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}$  o nietrywialnej zależności od argumentu z  $\text{pr}_1(\mathcal{O})$ , zwane **zagadnieniem nieautonomicznym**, jest równoważne zagadnieniu określone przez odwzorowanie  $\tilde{f} := (1, f) \circ \text{pr}_{2,3} : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N}$ , niezależne od pierwszego argumentu, zwane **zagadnieniem autonomicznym**. Podobnie **parametryczne zagadnienie początkowe** określane przez odwzorowanie  $f : \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}$  zależne (w sposób ciągły) od parametrów z otwartego podzbioru  $\Pi$  topologicznej przestrzeni wektorowej  $V$  jest równoważne zagadnieniu określone przez niezależne od parametrów odwzorowanie  $\hat{f} := (f, \cdot) : \hat{\mathcal{O}} := \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{\times N} \times V$  o dziedzinie ciągłości  $\hat{\mathcal{O}}$ .

*Dowód:* Zajmiemy się najpierw zagadnieniem nieautonomicznym

$$D_1\Phi_f(t, t_0, x_0) = f(t, \Phi_f(t, t_0, x_0)), \quad \Phi_f(t_0, t_0, x_0) = x_0 \in \text{pr}_2(\mathcal{O}).$$

Zdefiniowawszy odwzorowanie  $\tilde{f}$  jak w treści twierdzenia, otrzymujemy zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) = \tilde{f}(t, \Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0)), \quad \Phi_{\tilde{f}}(t_0, t_0, s_0, x_0) = (s_0, x_0) \in \mathcal{O}.$$

Jako że  $\Phi_{\tilde{f}}$  przyjmuje wartości w  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times N}$ , możemy zapisać

$$\Phi_{\tilde{f}} = (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2),$$

przy czym odwzorowania

$$\Phi_{\tilde{f}}^1 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times N}$$

spełniają równania

$$\begin{aligned} D_1\Phi_{\tilde{f}}^1(t, t_0, s_0, x_0) &= \text{pr}_1 \circ \tilde{f}(t, (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= \text{pr}_1 \circ (1, f \circ (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) = 1, \\ D_1\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0) &= \text{pr}_2 \circ \tilde{f}(t, (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= \text{pr}_2 \circ (1, f \circ (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0)) \\ &= f \circ (\Phi_{\tilde{f}}^1, \Phi_{\tilde{f}}^2)(t, t_0, s_0, x_0) \end{aligned}$$

przy warunkach początkowych

$$\Phi_{\tilde{f}}^1(t_0, t_0, s_0, x_0) = s_0, \quad \Phi_{\tilde{f}}^2(t_0, t_0, s_0, x_0) = x_0,$$

których rozwiązanie, jednoznaczne na mocy Tw. 18, to

$$\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) = (t - t_0 + s_0, \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)),$$

wobec czego druga składowa zagadnienia nowego początkowego przyjmuje postać

$$D_1\Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0) = f(t - t_0 + s_0, \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)).$$

Oznaczmy

$$\Psi_f(t - t_0 + s_0, s_0, x_0) := \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)$$

i dokonajmy trywialnego przesunięcia  $t \mapsto t + t_0 - s_0$ , a wtedy dostajemy zagadnienie początkowe

$$D_1\Psi_f(t, s_0, x_0) = f(t, \Psi_f(t, s_0, x_0)),$$

$$\Psi_f(s_0, s_0, x_0) \equiv \Phi_{\tilde{f}}^2(t_0, t_0, s_0, x_0) = \text{pr}_2 \circ \Phi_{\tilde{f}}(t_0, t_0, s_0, x_0) = \text{pr}_2(s_0, x_0) = x_0,$$

skąd wniosek, że  $\Psi_f$  jest potokiem określonym przez wyjściowe odwzorowanie  $f$ , czyli

$$\Psi_f(t, s_0, x_0) \equiv \Phi_f(t - s_0 + t_0, t_0, x_0),$$

a dalej

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0) &= (t - t_0 + s_0, \Phi_{\tilde{f}}^2(t, t_0, s_0, x_0)) \equiv (t - t_0 + s_0, \Psi_f(t - t_0 + s_0, s_0, x_0)) \\ &= (t - t_0 + s_0, \Phi_f(t, t_0, x_0)). \end{aligned}$$

W szczególności więc ilekroć  $\Phi_f(t, t_0, x_0)$  jest dobrze określone (dla pewnego  $x_0 \in \text{pr}_2(\mathcal{O})$ ), także  $\Phi_{\tilde{f}}(t, t_0, s_0, x_0)$  jest dobrze określone.

Następnie przechodzimy do omówienia zagadnienia parametrycznego

$$D_1\Phi_f(t, t_0, x_0, \pi) = f_\pi(t, \Phi_f(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_f(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0.$$

W tym przypadku natrafiamy na stowarzyszone (wg przepisu z treści dowodzonego twierdzenia) zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\widehat{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = \widehat{f}(t, \Phi_{\widehat{f}}(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_{\widehat{f}}(t_0, t_0, x_0, \pi) = (x_0, \pi) \in \text{pr}_2(\mathcal{O}) \times \Pi,$$

a ponieważ przeciwdziedzina  $\Phi_{\widehat{f}}$  jest tym razem  $\mathbb{R}^{\times N} \times X$ , przeto możemy rozłożyć

$$\Phi_{\widehat{f}} = (\Phi_{\widehat{f}}^1, \Phi_{\widehat{f}}^2)$$

w terminach pewnych odwzorowań

$$\Phi_{\widehat{f}}^1 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{\times N}, \quad \Phi_{\widehat{f}}^2 : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \Pi \rightarrow V,$$

spełniających równania (nieautonomiczne)

$$D_1\Phi_{\widehat{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi) = f_{\Phi_{\widehat{f}}^2}(t, t_0, x_0, \pi)(t, \Phi_{\widehat{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi)), \quad D_1\Phi_{\widehat{f}}^2(t, t_0, x_0, \pi) = 0_V$$

przy warunkach początkowych

$$\Phi_{\widehat{f}}^1(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0, \quad \Phi_{\widehat{f}}^2(t_0, t_0, x_0, \pi) = \pi.$$

Ich rozwiązanie jest postaci

$$\Phi_{\widehat{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = (\Phi_{\widehat{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi), \pi),$$

przy czym  $\Phi_{\widehat{f}}^1$  jest określone przez zagadnienie początkowe

$$D_1\Phi_{\widehat{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi) = f_{\pi}(t, \Phi_{\widehat{f}}^1(t, t_0, x_0, \pi)), \quad \Phi_{\widehat{f}}^1(t_0, t_0, x_0, \pi) = x_0,$$

które prowadzi wprost do identyfikacji

$$\Phi_{\widehat{f}}^1 \equiv \Phi_f,$$

a ta – do ostatecznego odszyfrowania postaci potoku stowarzyszonego z nowym odwzorowaniem:

$$\Phi_{\widehat{f}}(t, t_0, x_0, \pi) = (\Phi_f(t, t_0, x_0, \pi), \pi).$$

□

Zwieńczeniem naszej analizy zagadnień początkowych opisywanych przez równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu jest poniższe twierdzenie, w którym ustalamy klasę gładkości funkcjonalnej zależności potoku od warunków początkowych.

**Twierdzenie 23** (O różniczkowalności rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego). Przyjmijmy oznaczenia i założenia Tw. 21 i 22. Jeżeli rozważany układ ma charakter autonomiczny i funkcja  $f$  jest klasy  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^{\times} \cup \{\infty\}$  (w drugim argumentie, od którego – jako jedyne, wprost z założenia – zależność jest nietrywialną), to wówczas zależność potoku  $\Phi_f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}^N$  od warunku początkowego i parametru  $t$ , zwanego dalej **czasem**, także jest klasy  $C^k$  (przy ustalonym czasie początkowym).

*Dowód:* Zaczniemy od uwagi porządkującej: autonomiczny charakter zagadnienia oznacza trywialną zależność  $f$  od pierwszego argumentu, co podkreślimy w dalszej części naszego wywodu zastępując funkcję  $f$  funkcją  $\underline{f} \in C^k(\underline{\mathcal{Q}}, \mathbb{R}^N)$ ,  $\underline{\mathcal{Q}} \equiv \text{pr}_2(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^{\times N}$ , dla której

$$f(s, y(s)) \equiv \underline{f}(y(s)).$$

Ustalmy dane początkowe  $(t_0, x_0) \in \mathcal{O}$  i rozważmy odnośny maksymalny przedział czasowy  $I_f(t_0, x_0) = ]a_f(t_0, x_0), b_f(t_0, x_0)[$ , którego istnienie orzeka Stw. 20. Wybierzmy (dowolnie) otwarte otoczenie  $\mathcal{U}_{x_0} \subset \underline{\mathcal{Q}}$  punktu  $x_0$ , na którym funkcja  $\underline{f}$  spełnia warunek

$$M_{x_0} := \sup_{x \in \mathcal{U}_{x_0}} \|\underline{D}\underline{f}(x)\|_{\text{op}} < \infty$$

(wystarczy wybrać wewnątrz dowolnego zbioru zwartego, na którym  $\underline{f}$ , z założenia różniczkowalna w sposób ciągły na  $\underline{\mathcal{Q}}$ , spełnia ten warunek), a następnie podprzedział  $I = [a, b] \subset I_f(t_0, x_0)$  o długości

$$b - a < M_{x_0}$$

zawierający  $t_0$  jako punkt wewnętrzny,

$$a_f(t_0, x_0) < a < t_0 < b < b_f(t_0, x_0).$$

Otoczenie  $\mathcal{U}_{x_0}$  będziemy przy tym rozpatrywać jako podzbiór przestrzeni Banacha  $(\mathbb{R}^{\times N}, \|\cdot\|_N)$  ze standardową normą euklidesową jak w Przykł. 3 (1). Rozważmy dalej otwarty podzbiór<sup>13</sup>

$$\mathcal{V}_{x_0} := \{ \gamma \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \mid \gamma(I) \subset \mathcal{U}_{x_0} \}$$

przestrzeni Banacha  $(C(I, \mathbb{R}^{\times N}), \|\cdot\|_\infty)$  i wreszcie zdefiniujemy odwzorowanie

$$T_{f;t_0} : \mathcal{U}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_0} \rightarrow C(I, \mathbb{R}^{\times N}) : (x_1, \gamma) \mapsto \gamma(\cdot) - x_1 - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} \underline{f} \circ \gamma,$$

którego znaczenie dla naszych rozważań ujawnia oczywista obserwacja: poziomica zera  $T_{f;t_0}$  jest zbiorem (jednoznacznych) lokalnych rozwiązań rozpatrywanego zagadnienia początkowego przy warunkach początkowych z otoczenia  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Odnosząc Stw. 59 do odwzorowania  $F$  będącego dowolnym rozszerzeniem  $\underline{f}$  do całej przestrzeni Banacha  $(\mathbb{R}^{\times N}, \|\cdot\|_N)$ , stwierdzamy ciągłą różniczkowalność klasy  $C^k$  odwzorowania  $T_{f;t_0}$ , przy czym

$$\begin{aligned} DT_{f;t_0}(x_1, \gamma)(\bullet_1, \bullet_2) &= -\text{id}_{\mathbb{R}^{\times N}}(\bullet_1) \oplus \left( \text{id}_{C(I, \mathbb{R}^{\times N})}(\bullet_2) - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \right) \\ &\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N} \oplus C(I, \mathbb{R}^{\times N}), C(I, \mathbb{R}^{\times N})). \end{aligned}$$

Proste oszacowanie

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \right\|_{\text{op}} \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \left\| \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_\infty \right) \\ &\equiv \sup_{v \in C(I, \mathbb{R}^{\times N}) \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\|v\|_\infty} \cdot \sup_{t \in I} \left\| \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(v(\cdot)) \right\|_N \right) \\ (42) \quad &\leq (b - a) \cdot M_{x_0} < 1 \end{aligned}$$

dowodzi – na gruncie Stw. 49 – odwracalności na zbiorze otwartym  $\mathcal{U}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_0} \ni (x_1, \gamma)$  ciągłego odwzorowania  $\mathbb{R}$ -liniowego

$$D_2 T_{f;t_0}(x_1, \gamma)(\bullet_2) = \text{id}_{C(I, \mathbb{R}^{\times N})}(\bullet_2) - \int_{[t_0, \cdot]; \mathbb{R}^{\times N}} D\underline{f}(\gamma(\cdot))(\bullet_2(\cdot)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(C(I, \mathbb{R}^{\times N})).$$

<sup>13</sup>Otwartość  $\mathcal{V}_{x_0}$  jest prostym następstwem tego, że każdy punkt ścieżki  $\gamma(I)$  leżącej w otwartym zbiorze  $\mathcal{U}_{x_0}$  zawiera się w nim wraz z pewną kulą otwartą, suma zaś tych kul wzięta po wszystkich punktach ścieżki definiuje jej otwarte otoczenie w  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Zastępując każdą z kul koncentryczną z nią kulą o dwukrotnie mniejszym promieniu, uzyskujemy pokrycie ścieżki o tej własności, że jego domknięcie, otrzymane przez zastąpienie każdej z kul otwartych jej domknięciem, zawiera się w  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Z pokrycia tego możemy – wobec zwartości ścieżki, będącej w świetle Stw. 39 konsekwencją ciągłości  $\gamma$  i zwartości  $I$  – wybrać podpokrycie skończone będące rodziną kul  $\mathcal{B} := \{B_i^N\}_{i \in \overline{1, M}}$ ,  $M \in \mathbb{N}^\times$ . Domknięcie  $\overline{\Sigma}$  ich (otwartej) sumy mnogościowej  $\Sigma$  jest w oczywisty sposób ograniczone w  $\mathbb{R}^{\times N}$  (zawiera się w kuli o środku w  $\gamma(a)$  i promieniu większym od  $\max_{i \in \overline{1, M}} \sup_{x_i \in B_i^N} \|\gamma(a) - x_i\|_N$ ), a jego brzeg  $\partial \overline{\Sigma}$  jest nie tylko ograniczony (jako podzbiór  $\overline{\Sigma}$ ), lecz także domknięty jako przecięcie  $\overline{\Sigma} \cap (\mathbb{R}^{\times N} \setminus \Sigma)$ , więc zwarty na mocy Stw. 52. Przywoławszy Stw. 41 oraz 39 i 52, wyznaczamy odległość między  $\partial \overline{\Sigma}$  i  $\gamma(I)$ , daną jako  $\inf_{(x, y) \in \gamma(I) \times \partial \overline{\Sigma}} \|x - y\|_N =: \varepsilon_\gamma$ , a ponieważ w zwartym podzbiore  $\gamma(I) \times \partial \overline{\Sigma} \subset \mathbb{R}^{\times N} \times \mathbb{R}^{\times N}$  istnieje punkt, w którym infimum to jest osiągnięte, przeto nieodzownie jest ono niezerowe,  $\varepsilon_\gamma > 0$  (w przeciwnym razie rodzina  $\mathcal{B}$  nie byłaby pokryciem otwartym ścieżki). Jest oczywiste, że kula otwarta w  $C(I, \mathbb{R}^{\times N})$  o środku w  $\gamma$  i promieniu  $\varepsilon_\gamma$  zawiera się w  $\mathcal{V}_{x_0}$ .

Przywołując tezę Tw. 16, którego założenia są tutaj w oczywisty sposób spełnione dla  $V_1 = \mathbb{R}^{\times N}$ ,  $V_2 = C(I, \mathbb{R}^{\times N})$ ,  $U_1 = \mathcal{U}_{x_0}$ ,  $U_2 = \mathcal{V}_{x_0}$  oraz  $F = T_{f; t_0}$ , wnioskujemy o istnieniu otwartego otoczenia  $\mathcal{O}_{x_0} \subset \mathcal{U}_{x_0}$  warunku początkowego  $x_0$ , na którym jest określone odwzorowanie klasy  $C^k$

$$\Gamma_{x_0}^{(t_0)} : \mathcal{O}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{V}_{x_0} : x_1 \longmapsto \gamma_{x_1}^{(t_0)},$$

$$(43) \quad \gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) = x_1 + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \underline{f} \circ \gamma_{x_1}^{(t_0)} \equiv \Phi_f(t, t_0, x_1).$$

Z powyższego wywiedziemy wniosek<sup>14</sup> o różniczkowalności klasy  $C^k$  zależności potoku  $\Phi_f$  od argumentów  $(t, x_1)$  przy ustalonym czasie początkowym  $t_0$ . Tytułem rozgrzewki powtórzmy najpierw dowód ciągłości potoku przy ustalonym  $t_0$ , z której nie korzystaliśmy w dotychczasowych rozważaniach. Oto więc dla dowolnych  $(s, x_1), (t, x_2) \in I \times \mathcal{O}_{x_0}$  obliczamy

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(t, t_0, x_2) - \Phi_f(s, t_0, x_1)\|_N &\leq \|\Phi_f(t, t_0, x_2) - \Phi_f(t, t_0, x_1)\|_N \\ &\quad + \|\Phi_f(t, t_0, x_1) - \Phi_f(s, t_0, x_1)\|_N \\ &\equiv \|\gamma_{x_2}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(t)\|_N + \|\gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(s)\|_N \\ &\equiv \|\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2)(t) - \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(t)\|_N \\ &\quad + \|\gamma_{x_1}^{(t_0)}(t) - \gamma_{x_1}^{(t_0)}(s)\|_N. \end{aligned}$$

Wobec ciągłości (danych lokalnie) ścieżek  $\gamma_{x_1}^{(t_0)}$  oraz ciągłości odwzorowania  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  na  $\mathcal{O}_{x_0}$ , majorantę pojawiającą się po prawej stronie powyższej nierówności możemy uczynić dowolnie małą, co dowodzi ciągłości potoku w otoczeniu  $(t_0, x_0)$  (przy ustalonym  $t_0$ ). Na mocy swej definicji potok, określony w terminach lokalnych odwzorowań  $\gamma_{x_1}^{(t_0)}$ , jest różniczkowalny, a ponieważ pochodna w argumentie czasowym

$$D_1 \Phi_f(t, t_0, x_1) = \underline{f}(\Phi_f(t, t_0, x_1))$$

jest superpozycją funkcji ciągłych, przeto sama jest funkcją ciągłą. Rozważmy następnie pochodną

$$D\Gamma_{x_0}^{(t_0)} : \mathcal{O}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N}, C(I, \mathbb{R}^{\times N})),$$

która – jak wynika wprost z konstrukcji odwzorowania  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  – jest klasy  $C^{k-1}$ , a przy tym spełnia relację (definiującą)

$$(44) \quad \gamma_{x_1+v}^{(t_0)} - \gamma_{x_1}^{(t_0)} = D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v) + \mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v), \quad v \in \mathbb{R}^{\times N},$$

gdzie

$$\lim_{\|v\|_N \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v)\|_{\infty}}{\|v\|_N} = 0.$$

Obliczając obie strony relacji (44) w chwili  $t \in I$ , otrzymujemy równość

$$\Phi_f(t, t_0, x_1 + v) - \Phi_f(t, t_0, x_1) = (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) + \mathcal{R}_2\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; v)(t),$$

na podstawie której identyfikujemy

$$D_3\Phi_f(t, t_0, x_1)(v) = (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t),$$

a stąd – wobec założonej ograniczoności  $D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_\alpha)$ ,  $\alpha \in \{1, 2\}$  –

$$\begin{aligned} &\|D_3\Phi_f(t, t_0, x_2)(v) - D_3\Phi_f(s, t_0, x_1)(v)\|_N \\ &\leq \|(D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2)(v))(t) - (D\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t)\|_N \end{aligned}$$

---

<sup>14</sup>Należy podkreślić, że istnienie *lokalnych* odwzorowań  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  klasy  $C^k$  przyporządkowujących warunkom początkowym z otoczenia  $x_0$  odnośne (lokalne) rozwiązania zagadnienia początkowego nie przesądza automatycznie o różniczkowalności globalnie (na  $\mathcal{D}_f$ ) zadanego potoku  $\Phi_f$ , będącego odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami topologicznymi odmiennymi od (podzbiorów) dziedziny i przeciwdziedziny  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ .

$$\begin{aligned}
& + \left\| (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \right\|_N \\
& \leq \left\| (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1))(v) \right\|_\infty \\
& + \left\| (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \right\|_N \\
& \leq \left\| \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1) \right\|_{\mathrm{op}} \cdot \|v\|_N \\
& + \left\| (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \right\|_N .
\end{aligned}$$

Ażeby wygodnie oszacować drugi składnik sumy występującej po prawej stronie powyższej nierówności, musimy zbadać nieco dokładniej elementarne własności potoku  $\Phi_f$  wynikające z konstrukcji odwzorowania  $\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$ . W tym celu dla ustalonych  $w \in \mathbb{R}^{\times N}$  oraz  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  dokonajmy we wzorze (43) podstawienia  $x_1 \mapsto x_1 + \lambda \triangleright w$ , po czym obliczmy (korzystając z  $\mathbb{R}$ -liniowości całki)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda} \triangleright (\Phi_f(t, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w) - \Phi_f(t, t_0, x_1)) \\
& = w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \frac{1}{\lambda} \triangleright [\underline{f}(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w)) - \underline{f}(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1))] .
\end{aligned}$$

Oznaczmy dla wygody

$$\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)} := \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w) + \frac{1}{\lambda} \triangleright \mathcal{B}_2 \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w) .$$

Uwzględniając relację (44) i wzięwszy pod uwagę  $\mathbb{R}$ -liniowość odwzorowania  $\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)$ , a nadto przywoławszy Tw. 14 (w połączeniu z Cor. 1) w odniesieniu do funkcji  $\underline{f}$  (klasy  $C^1$ ) w formie

$$\begin{aligned}
& \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1 + \lambda \triangleright w)) - \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1)) \\
& = \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1) + \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) - \underline{f}(\Phi_f(s, t_0, x_1)) \\
& = \left( \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} \mathrm{D}\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(s, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)} \right) (\lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) \\
& = \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} r_{\mathrm{ev}}(\lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)) \circ \mathrm{D}\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(s, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(s)}
\end{aligned}$$

otrzymujemy tym sposobem równość (indeks  $\alpha \in \{1, 2\}$  w oznaczeniu  $\cdot_\alpha$  identyfikuje całkę, opatrzoną tym samym indeksem umieszczonym w nawiasie, której odpowiada zmienna symbolizowana przez  $\cdot_\alpha$ )

$$\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(t) = w$$

$$+ \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}}^{(1)} \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})}^{(2)} r_{\mathrm{ev}}(\Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(\cdot_1)) \circ \mathrm{D}\underline{f} \circ \gamma_{\Phi_f(\cdot_1, t_0, x_1), \lambda \triangleright \Delta_{x_1, w, \lambda; (t_0, x_0)}(\cdot_1)}(\cdot_2)$$

a ponieważ graniczne zachowanie reszty (przy  $\lambda \triangleright w \rightarrow 0$ ) implikuje

$$\frac{1}{\lambda} \triangleright \mathcal{B}_2 \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w) \equiv \left( \frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot \|w\|_N \right) \triangleright \frac{1}{\|\lambda \triangleright w\|_N} \triangleright \mathcal{B}_2 \Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1; \lambda \triangleright w) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 ,$$

więc też przechodząc obustronnie do granicy  $\lambda \rightarrow 0$  w poprzedniej równości (z uwzględnieniem liniowości i ciągłości  $\mathrm{D}\underline{f}$  oraz obu całek, a także ciągłości pozostałych wykorzystanych powyżej odwzorowań) znajdujemy relację

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(t) \\
& = w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}}^{(1)} \int_{[0, 1]; \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})}^{(2)} r_{\mathrm{ev}}((\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(\cdot_1)) \circ \mathrm{D}\underline{f}(\Phi_f(\cdot_1, t_0, x_1)) \\
& \equiv w + \int_{[t_0, t]; \mathbb{R}^{\times N}} \mathrm{D}\underline{f}(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1))((\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(w))(\cdot)) .
\end{aligned}$$

W świetle (42) daje nam to oszacowanie

$$\begin{aligned}
 & \left\| (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(t) - (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(s) \right\|_N \\
 &= \left\| \int_{[s,t];\mathbb{R}^{\times N}} \underline{\mathrm{D}}f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1)) \left( (\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)(v))(\cdot) \right) \right\|_N \\
 &\leq |t-s| \cdot (b-a) \cdot M_{x_0} \cdot \left\| \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1) \right\|_{\mathrm{op}} \cdot \|v\|_N < |t-s| \cdot \left\| \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1) \right\|_{\mathrm{op}} \cdot \|v\|_N,
 \end{aligned}$$

z którego ostatecznie wynika pożądana nierówność

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathrm{D}_3\Phi_f(t, t_0, x_2) - \mathrm{D}_3\Phi_f(s, t_0, x_1) \right\|_{\mathrm{op}} \\
 &\leq \left\| \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_2) - \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1) \right\|_{\mathrm{op}} + |t-s| \cdot \left\| \mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1) \right\|_{\mathrm{op}}
 \end{aligned}$$

dowodząca – wobec ograniczoności (więc i ciągłości)  $\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}$  oraz  $\mathrm{D}\Gamma_{x_0}^{(t_0)}(x_1)$  – ciągłości pochodnej  $\mathrm{D}_3\Phi_f$  (przy ustalonym  $t_0$ ). W połączeniu z wcześniejszym dowodem ciągłości, prowadzi nas to do wniosku, iż  $\Phi_f$  jest klasy  $C^1$  w otoczeniu  $(t_0, x_0)$  (przy ustalonym  $t_0$ ). Podkreślmy przy tym, że w dowodzie wykorzystaliśmy jedynie ciągłą różniczkowalność odwzorowania  $f$ .

Dotychczasowa dyskusja pozwala nam przeprowadzić indukcyjny (względem stopnia ciągłej różniczkowalności  $f$ ) dowód różniczkowalności wyższego stopnia potoku (przy ustalonym  $t_0$ ), do którego punktem wyjścia jest następująca obserwacja:

$$\begin{aligned}
 \mathrm{D}_3\Phi_f(t, t_0, x_1) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + \int_{[t_0,t];\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} \mathrm{D}_3(\underline{f} \circ \Phi_f)(\cdot, t_0, x_1) \\
 &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times N}} + \int_{[t_0,t];\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} \underline{\mathrm{D}}f(\Phi_f(\cdot, t_0, x_1)) \circ \mathrm{D}_3\Phi_f(\cdot, t_0, x_1),
 \end{aligned}$$

wykorzystująca ciągłość pierwszej pochodnej potoku (przy różniczkowaniu wyrażenia podcałkowego z wykorzystaniem Stw. 59 oraz 56). Porównując ją z równaniem całkowym

$$\Phi_f(t, t_0, x_1) = x_1 + \int_{[t_0,t];\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\times N})} \underline{f} \circ \Phi_f(\cdot, t_0, x_1),$$

konstatujemy, że  $\mathrm{D}_3\Phi_f$  jest rozwiązaniem, przy warunku początkowym

$$\mathrm{D}_3\Phi_f(t_0, t_0, x_1) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\times N}},$$

(nieautonomicznego, parametrycznego)  $\mathbb{R}$ -liniowego zagadnienia początkowego

$$(45) \quad \mathrm{D}_1(\mathrm{D}_3\Phi_f)(t, t_0, x_1) = \underline{\mathrm{D}}f(\Phi_f(t, t_0, x_1)) \circ \mathrm{D}_3\Phi_f(t, t_0, x_1).$$

Na podstawie Tw. 22 stwierdzamy, że zagadnienie to jest różniczkowo równoważne pewnemu autonomicznemu bezparametrycznemu zagadnieniu początkowemu, możemy więc odnieść do niego wprost tezę dowodzonego twierdzenia w ujęciu indukcyjnym: oto założmy, że teza ta została wykazana dla odwzorowań klasy  $C^l$  dla  $l \in 1, k-1$ , a wtedy – wobec przynależności rozważanego przez nas  $f$  do klasy  $C^{k-1}$  (jako odwzorowania klasy  $C^k$ ) – wiemy na pewno, że zależność argumentu odwzorowania  $\underline{\mathrm{D}}f$  od  $(t, x_0)$  jest klasy  $C^{k-1}$  ( $x_1$  pełni tutaj rolę ciągłego parametru wektorowego), a nadto samo odwzorowanie  $\underline{\mathrm{D}}f$  jest klasy  $C^{k-1}$ , więc też  $\mathbb{R}$ -liniowe odwzorowanie określające zagadnienie początkowe (45) jest tej klasy, co przy powtórny zastosowaniu założenia indukcyjnego implikuje natychmiast ciągłą różniczkowalność stopnia  $k-1$  potoku  $\mathrm{D}_3\Phi_f$  w  $(t, x_0)$  przy ustalonym  $t_0$ . Łącząc tę konkluzję z obserwacją (również wykorzystującą hipotezę indukcyjną)

$$\mathrm{D}_1\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot) = \underline{f} \circ \Phi_f(\cdot, t_0, \cdot) \in C^{k-1}(I \times \mathrm{pr}_2(\mathcal{O}_{x_0}), \mathbb{R}^{\times N}),$$

wniosujemy, że  $\mathrm{D}\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot)$  (przy ustalonym  $t_0$ ) jest klasy  $C^{k-1}$ , zatem sam potok  $\Phi_f(\cdot, t_0, \cdot)$  jest klasy  $C^k$ , co należało pokazać.  $\square$

Udowodnione przez nas z mozołem twierdzenie o gładkości potoku odwzorowania definiującego zagadnienie początkowe, tej samej klasy co gładkość tegoż odwzorowania, będzie przez nas wielokrotnie wykorzystywane w dyskusji zastosowań zgromadzonych przez nas metod w geometryzacji wyższych struktur algebraicznych.

LITERATURA

- [Die65] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse*, volume 1. Gauthier–Villars, 1965.  
[Wei52] A. Weil. “Sur les théorèmes de de Rham”. *Comment. Math. Helv.*, 26:119–145, 1952.