WIELOMIANY LEGENDRE'A
(DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$R \int R$

Rozważmy przestrzeń wektorową $\mathcal{V} := \mathbb{R}_\bullet[\cdot]_{[-1,1]}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ (wielomiany dowolnego stopnia na odcinku domkniętym $[-1,1]$), wyposażoną w formę kwadratową

$$Q\ :\ \mathcal{V} \to \mathbb{R}\ :\ w \mapsto \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\ [w(t)]^2\ .$$

Forma ta, będąc jawnie (ściśle) dodatnio określoną, o czym można się też przekonać na podstawie analizy[1] symetrycznej formy dwuliniowej b_Q stowarzyszonej z Q poprzez formułę polaryzacyjną

$$\begin{aligned} b_Q\ :\ \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}\ :\ (w_1, w_2) \mapsto b_Q(w_1, w_2) &:= \frac{1}{2}\,[Q(w_1 + w_2) - Q(w_1) - Q(w_2)] \\ &\equiv \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, w_1(t)\, w_2(t)\,, \end{aligned}$$

indukuje iloczyn skalarny na $\mathcal{V}$, dany wzorem

$$(w_1|w_2)_Q := b_Q(w_1, w_2)\,.$$

W szczególności możemy rozpatrywać bazy $\mathcal{V}$ ortogonalne względem $(\cdot|\cdot)_Q$ (tj. diagonalizujące b_Q). Bodaj najprostszą metodą konstrukcji takiej bazy jest algorytm Grama–Schmidta, który przećwiczymy na najbliższych zajęciach.

Zad. 1. Zortogonalizować bazę jednomianową

$$\{e_k\}_{k\in\overline{0,4}}\,, \qquad e_k(t) := t^k$$

podprzestrzeni $\mathbb{R}_4[\cdot]_{[-1,1]} \subset \mathcal{V}$ (wielomiany stopnia równego co najwyżej 4) biorąc za pierwszy wektor bazy ortogonalnej $f_0 := e_0$.

Rozw. W wyniku procedury ortogonalizacji uzyskujemy bazę

$$f_0 = e_0\,, \qquad f_1 = e_1\,, \qquad f_2 = e_2 - \frac{1}{3}\,e_0\,, \qquad f_3 = e_3 - \frac{3}{5}\,e_1\,, \qquad f_4 = e_4 - \frac{6}{7}\,e_2 + \frac{3}{35}\,e_0\,.$$

W bazie $\{f^k\}^{k\in\overline{0,4}}$ dualnej do $\{f_k\}_{k\in\overline{0,4}}$ forma b_Q przybiera postać

$$b_Q = 2\,f^0 \otimes f^0 + \frac{2}{3}\,f^1 \otimes f^1 + \frac{8}{45}\,f^2 \otimes f^2 + \frac{8}{175}\,f^3 \otimes f^3 + \frac{128}{11025}\,f^4 \otimes f^4\,.$$

Powyższa procedura daje nam (z dokładnością do normalizacji, którą ustalamy w zgodzie z powszechnie przyjętą konwencją) pierwszych pięć **wielomianów**

[1]Tj. przez bezpośrednią diagonalizację metodą Lagrange'a, bądź też w odwołaniu do kryterium wyznacznikowego Sylvestera–Jacobiego.

Legendre'a

$$P_0 := f_0\,, \qquad P_1 := f_1\,, \qquad P_2 := \frac{3}{2}\,f_2\,, \qquad P_3 := \frac{5}{2}\,f_3\,, \qquad P_4 := \frac{35}{8}\,f_4\,.$$

W celu ustalenia postaci wielomianu P_n dla dowolnej wartości indeksu $n \in \mathbb{N}$ warto poczynić banalną obserwację: dopełnienie ortogonalne (względem $(\cdot|\cdot)_Q$) podprzestrzeni $\mathbb{R}_{n-1}[\cdot]_{[-1,1]}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_{n-1}[\cdot]_{[-1,1]} = n$ w przestrzeni $\mathbb{R}_n[\cdot]_{[-1,1]}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[\cdot]_{[-1,1]} = n+1$ ma wymiar rzeczywisty 1, wystarczy więc znaleźć *dowolny* wielomian w_n stopnia

(1) $$\deg w_n = n$$

spełniający warunek

(2) $$\forall_{k\in\overline{0,n-1}}\ :\ (e_k|w_n)_Q = 0\,,$$

aby wyznaczyć P_n z dokładnością do niezerowego mnożnika skalarnego,

$$P_n = \alpha_n\,w_n\,, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}^\times\,.$$

Za [Fic48], będziemy szukać w_n w dość szczególnej postaci. Zauważmy najpierw, że (dowolny) wielomian $w_n \in \mathbb{R}_n[\cdot]_{[-1,1]}$ można przedstawić jako pochodną wielomianu W_{n+1} stopnia o jeden wyższego, który ma w punkcie $t = -1$ zero. W rzeczy samej, na mocy podstawowego twierdzenia rachunku całkowego zachodzi

$$w_n(t) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\int_{-1}^{t}\mathsf{d}s\,w_n(s)\,,$$

więc mamy

$$W_{n+1}(t) = \int_{-1}^{t}\mathsf{d}s\,w_n(s)\,.$$

Zastosowawszy ten argument n-krotnie, możemy ostatecznie przepisać w_n w postaci

$$w_n(t) = \frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n}W_{2n}(t)$$

dla pewnego wielomianu $W_{2n} \in \mathbb{R}_{2n}[\cdot]_{[-1,1]}$, który spełnia równości

(3) $$W_{2n}(-1) = 0\,, \qquad \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}t^k}W_{2n}(-1) = 0\,, \quad k \in \overline{1,n-1}\,.$$

Jeśli teraz podstawić tak określony wielomian w_n do warunku (2) i odcałkować uzyskane wyrażenie przez części, to otrzymamy

$$\begin{aligned} 0 = (e_k|w_n)_Q \ \equiv\ & \int_{-1}^{1}\mathsf{d}t\,t^k\,\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n}W_{2n}(t) \\ =\ & \left[\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+1}\,\frac{\mathsf{d}^l}{\mathsf{d}t^l}t^k\,\frac{\mathsf{d}^{n-l-1}}{\mathsf{d}t^{n-k}}W_{2n}(t)\right]\Bigg|_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1}\mathsf{d}t\,W_{2n}(t)\,\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n}t^k\,, \end{aligned}$$

zatem biorąc pod uwagę nierówność $k < n$ oraz (3), sprowadzamy powyższe wyrażenie do postaci

$$\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+1}\,\frac{\mathsf{d}^l}{\mathsf{d}t^l}\bigg|_{t=1}t^k\,\frac{\mathsf{d}^{n-l-1}}{\mathsf{d}t^{n-k}}W_{2n}(1) = 0\,.$$

Skoro jednak $0 \leq k < n$ jest dowolne, to dostajemy tym sposobem układ równości

$$W_{2n}(1) = 0\,, \qquad\qquad \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}t^k} W_{2n}(1) = 0\,, \quad k \in \overline{1, n-1}\,.$$

Jest zatem koniecznie

$$W_{2n}(t) = (t-1)\,(t+1)\,W'_{2n-2}(t)$$

dla pewnego $W'_{2n-2} \in \mathbb{R}_{2n}[\cdot]_{[-1,1]}$, a nadto

$$0 = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\,\left[(t-1)\,(t+1)\,W'_{2n-2}(t)\right]\Big|_{t=\pm1} = \pm 2 W_{2n-2}(\pm 1)\,,$$

więc też

$$W'_{2n-2}(t) = (t-1)\,(t+1)\,\widetilde{W}''_{2n-4}(t)$$

dla pewnego $W''_{2n-4} \in \mathbb{R}_{2n}[\cdot]_{[-1,1]}$. Jest całkowicie jasnym, że na koniec dostajemy

$$W_{2n}(t) = (t-1)^n\,(t+1)^n \equiv \left(t^2-1\right)^n\,,$$

przeto ostatecznie

$$w_n(t) = \frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n}\left(t^2-1\right)^n\,.$$

Wniosek:

$$P_n = \alpha_n\,\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n}\left(t^2-1\right)^n\,.$$

Wartość mnożnika α_n ustalamy narzucając dodatkowy warunek

$$P_n(1) \stackrel{!}{=} 1\,,$$

przy którym

$$1 = \alpha_n\,\frac{\mathsf{d}^{n-1}}{\mathsf{d}t^{n-1}}\Big|_{t=1} 2nt\,\left(t^2-1\right)^{n-1} = \alpha_n\,\frac{\mathsf{d}^{n-2}}{\mathsf{d}t^{n-2}}\Big|_{t=1} (2t)^2\,n\,(n-1)\,\left(t^2-1\right)^{n-2} = \ldots = \alpha_n\,2^n\,n!\,,$$

czyli

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n}\left(t^2-1\right)^n\,. \tag{4}$$

Powyższy zapis nosi miano **formuły Rodriguesa**.

Powyższa formuła pozwala w prosty sposób wykazać ortogonalność bazy Legendre'a przestrzeni $\mathcal{V}$ i zarazem ustalić normalizację wielomianów P_n. Istotnie, bez trudu obliczamy

$$\begin{aligned}
(P_m|P_n)_Q &= \frac{1}{2^{m+n}\,m!\,n!}\int_{-1}^{1}\mathsf{d}t\,\frac{\mathsf{d}^m}{\mathsf{d}t^m}\left(t^2-1\right)^m\,\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}t^n}\left(t^2-1\right)^n \\
&= \frac{(-1)^m}{2^{m+n}\,m!\,n!}\int_{-1}^{1}\mathsf{d}t\,\left(t^2-1\right)^m\,\frac{\mathsf{d}^{m+n}}{\mathsf{d}t^{m+n}}\left(t^2-1\right)^n\,,
\end{aligned}$$

skąd wniosek, że ilekroć $m > n$ lub – z uwagi na symetrię $(\cdot|\cdot)_Q$ – $m < n$, zachodzi równość

$$(P_m|P_n)_Q = 0\,,$$

wyrażająca wzajemną ortogonalność wielomianów Legendre'a różnego stopnia. W ten sam sposób dochodzimy do wzoru

$$\begin{aligned}(P_n|P_n)_Q &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\int_{-1}^{1}\mathsf{d}t\,\left(t^2-1\right)^n\frac{\mathsf{d}^{2n}}{\mathsf{d}t^{2n}}\left(t^2-1\right)^n = \frac{(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\int_{-1}^{1}\mathsf{d}t\,\left(1-t^2\right)^n \\ &= \frac{2\cdot(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\int_0^1\mathsf{d}t\,\left(1-t^2\right)^n = \|t=\cos\theta\| = -\frac{2\cdot(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\mathsf{d}\theta\,\sin\theta\,(\sin\theta)^{2n} \\ &\equiv \frac{2\cdot(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathsf{d}\theta\,(\sin\theta)^{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Powyższą całkę można bez trudu policzyć, np. korzystając z metody "całkowania przez części", a następnie (rekurencyjnie) wyrażając ją przez analogiczną całkę dla $n=0$. Na koniec dostajemy

$$\begin{aligned}(P_n|P_n)_Q &= \frac{2\cdot(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\cdot\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{3\cdot5\cdots(2n+1)} \equiv \frac{2\cdot(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\cdot\frac{[2\cdot4\cdots(2n)]^2}{(2n+1)!} = \frac{2\cdot(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\cdot\frac{(2^n\,n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Wprost z konstrukcji wielomianów Legendre'a wynika następujące

Stw. 1. Wielomian Legendre'a P_n ma na odcinku otwartym $]-1,1[$ dokładnie n parami różnych miejsc zerowych.

Dowód: [za [Arn97]] Liczba zer $\sharp_0(P_n)$ wielomianu P_n (stopnia n) spełnia oczywistą nierówność

$$\sharp_0(P_n) \leq n\,.$$

Załóżmy – przeciwnie do dowodzonej tezy – że

$$\sharp_0(P_n) < n\,.$$

Niechaj $\sharp_0^\pm(P_n)$ oznacza liczbę tych zer, w których (wartość) P_n zmienia znak, czyli tzw. zer prostych – oznaczmy je jako $t_k \in]-1,1[$, $k \in \overline{1,\sharp_0^\pm(P_n)}$. Naturalnie

$$\sharp_0^\pm(P_n) < n\,.$$

Utwórzmy kombinację liniową

$$\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)} := \sum_{k=0}^{\sharp_0^\pm(P_n)} \lambda_k\,P_k$$

wielomianów Legendre'a stopnia nie większego niż $\sharp_0^\pm(P_n)$ o tej własności, że $\pi_{\sharp_0^\pm}$ ma zera (tylko) w punktach t_k i są to zera proste, a nadto

$$\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)}(1) > 0\,.$$

Jest oczywistym, że $\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)}$ istnieje, gdyż np.

$$\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)}(t) := \prod_{k=1}^{\sharp_0^\pm(P_n)}(t-t_k)$$

ma żądane własności (w szczególności $\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)}(1) > 0$ jako iloczyn $\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)}$ czynników dodatnich), a przy tym $\deg\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)} = \sharp_0^\pm(P_n)$, więc na mocy konstrukcji

$$\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)} \in \mathbb{R}_{\sharp_0^\pm(P_n)}[\cdot]_{[-1,1]} \equiv \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\langle P_k\rangle_{k\in\overline{0,\sharp_0^\pm(P_n)}}\,.$$

Ponieważ zarówno (wartości) P_n jak i (wartości) $\pi_{\sharp_0^\pm(P_n)}$ zmieniają znak *wyłącznie* w punktach t_k i w każdym z przedziałów $]t_k, t_{k+1}[,\ k \in \overline{1, \sharp_0^\pm(P_n) - 1}$ (ich wartości) mają ten sam znak, przeto

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, P_n(t)\, \pi_{\sharp_0^\pm(P_n)}(t) > 0\,,$$

co jednak jawnie przeczy ortogonalności P_n względem wszystkich $P_k,\ k < n$, wynikającej wprost z konstrukcji wielomianów Legendre'a. Ta sprzeczność pokazuje, że musi zachodzić równość

$$\sharp_0(P_n) = n\,.$$

□

Podamy teraz reprezentację całkową wielomianów Legendre'a, szczególnie przydatną w dowodzeniu spełnianych przez nie rekurencji oraz równania różniczkowego, dla którego tworzą one bazę rozwiązań. W celu wyprowadzenia rzeczonej reprezentacji rozpatrzymy przedłużenie analityczne analityczne napotkanej wcześniej funkcji zmiennej rzeczywistej

$$f_n(t) := \frac{1}{2^n}\left(t^2 - 1\right)^n\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

na płaszczynę zespoloną, dane wzorem

$$\widetilde{f_n}(z) := \frac{1}{2^n}\left(z^2 - 1\right)^n\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Na mocy uogólnionego wzoru Cauchy'ego dla dowolnie wybranego konturu $\Gamma_t \cong \mathbb{S}^1$ obiegającego jednokrotnie (w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara) punkt $t \in \mathbb{R}$ otrzymujemy wynik

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\widetilde{f_n}(\zeta)}{(\zeta - t)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\widetilde{f_n}(t) \equiv \frac{1}{2^n\, n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(t^2 - 1\right)^n\,.$$

Prawdziwą jest więc poniższa **formuła całkowa Schläfliego**:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, 2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\left(\zeta^2 - 1\right)^n}{(\zeta - t)^{n+1}}\,, \tag{5}$$

która stanowi punkt wyjścia do naszych dalszych rozważań, prowadzonych zasadniczo według [WW02].

W pierwszej kolejności wykorzystamy powyższą formułę do wyprowadzenia dwóch prostych relacji (pseudo-)rekurencyjnych spełnianych przez wielomiany Legendre'a. Będziemy przy tym korzystać z twierdzenia o różniczkowaniu całki z parametrem, którego założenia w oczywisty sposób spełnia całka Schläfliego. Zacznijmy od prostej obserwacji:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{n+1}\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\left(\zeta^2 - 1\right)^{n+1}}{(\zeta - t)^{n+1}} = \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{2\zeta\,\left(\zeta^2 - 1\right)^n}{(\zeta - t)^{n+1}} - \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\left(\zeta^2 - 1\right)^{n+1}}{(\zeta - t)^{n+2}} \\
&\equiv \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{2(\zeta - t + t)\,\left(\zeta^2 - 1\right)^n}{(\zeta - t)^{n+1}} - \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\left(\zeta^2 - 1\right)^{n+1}}{(\zeta - t)^{n+2}} \\
&= 2\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\left(\zeta^2 - 1\right)^n}{(\zeta - t)^n} + 2t \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\left(\zeta^2 - 1\right)^n}{(\zeta - t)^{n+1}} - \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\left(\zeta^2 - 1\right)^{n+1}}{(\zeta - t)^{n+2}}\,,
\end{aligned}$$

którą przepiszemy w postaci

$$\frac{1}{2}\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n+1}}{(\zeta-t)^{n+2}} - t\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n+1}} = \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n}}\,.$$

Przemnożywszy obie strony ostatniej równości przez $\frac{1}{2^n\,2\pi\mathrm{i}}$, dostajemy

$$P_{n+1}(t) - t\,P_n(t) = \frac{1}{2^n\,2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n}}\,, \tag{6}$$

co po zróżniczkowaniu względem zmiennej t prowadzi do pierwszej z poszukiwanych (pseudo-)rekurencji

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{n+1}(t) - P_n(t) - t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n(t) = n\,P_n(t)\,.$$

W podobny sposób obliczamy

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\zeta\,(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n}} \\
&= \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n}} + 2n\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1+1)\,(\zeta^2-1)^{n-1}}{(\zeta-t)^{n}} - n\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta-t+t)\,(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n+1}} \\
&= (n+1)\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n}} + 2n\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n-1}}{(\zeta-t)^{n}} - nt\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n+1}}\,,
\end{aligned}$$

co w świetle (6) można przepisać w postaci **podstawowej rekurencji dla wielomianów Legendre'a**:

$$(n+1)\,P_{n+1}(t) - (2n+1)\,t\,P_n(t) + n\,P_{n-1}(t) = 0\,.$$

Następnie wyprowadzimy równanie różniczkowe spełniane przez wielomian Legendre'a P_n a opisane w poniższym

Stw. 2. Wielomian Legendre'a P_n spełnia **równanie różniczkowe Legendre'a**

$$\left(1-t^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}P_n(t) - 2t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n(t) + n\,(n+1)\,P_n(t) = 0\,. \tag{7}$$

Dowód: Różniczkujemy stronami równość (5), otrzymując przy tym tożsamości

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n(t) &= \frac{n+1}{2^n\,2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n+2}}\,, \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}P_n(t) &= \frac{(n+1)\,(n+2)}{2^n\,2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n+3}}\,.
\end{aligned}$$

Pozwalają one zapisać (przeskalowaną) lewą stronę dowodzonego równania, jak następuje:

$$\begin{aligned}
&\frac{2^n\,2\pi\mathrm{i}}{n+1}\left[\left(1-t^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}P_n(t) - 2t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_n(t) + n\,(n+1)\,P_n(t)\right] \\
=\ &\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n+3}}\left[(n+2)\left(1-t^2\right) - 2t\,(\zeta-t) + n\,(\zeta-t)^2\right] \\
\equiv\ &\oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta\, \frac{(\zeta^2-1)^{n}}{(\zeta-t)^{n+3}}\left[n\,\zeta^2 - 2(n+1)\,t\,\zeta + n + 2\right]
\end{aligned}$$

$$\equiv \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta \, \frac{\left(\zeta^2-1\right)^n}{(\zeta-t)^{n+3}} \left[-(n+2)\left(\zeta^2-1\right)+2(n+1)\,\zeta\,(\zeta-t)\right].$$

Na podobieństwo wcześniejszych rachunków liczymy

$$0 = \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta} \frac{\left(\zeta^2-1\right)^{n+1}}{(\zeta-t)^{n+2}} = (n+1) \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta \, \frac{2\zeta\,\left(\zeta^2-1\right)^n}{(\zeta-t)^{n+2}} - (n+2) \oint_{\Gamma_t} \mathrm{d}\zeta \, \frac{\left(\zeta^2-1\right)^{n+1}}{(\zeta-t)^{n+3}}.$$

To ostatecznie daje

$$\frac{2^n\, 2\pi\mathrm{i}}{n+1} \left[\left(1-t^2\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} P_n(t) - 2t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_n(t) + n\,(n+1)\, P_n(t)\right] = 0\,,$$

co należało wykazać. □

Uwaga kulturoznawcza: Równanie Legendre'a

$$\left(1-t^2\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) - 2t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + n(n+1)\, y(t) = 0 \tag{8}$$

pojawia się w nader naturalny sposób w analizie zagadnienia Laplace'a w trzech wymiarach,

$$\Delta^{(3)} u = 0\,, \tag{9}$$

gdy tylko dokonać rozdzielenia zmiennych[2]

$$u(r,\varphi,\theta) = R(r)\,\Phi(\varphi)\,\Theta(\theta)$$

po przejściu do (standardowych) współrzędnych kulistych (r,φ,θ). W tych współrzędnych

$$\Delta^{(3)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(r\,\sin\theta)^2} \frac{\partial}{\partial\varphi}\,,$$

więc też równanie (9) przybiera postać

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}(r)\right) + \frac{1}{\sin\theta\,\Theta(\theta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2\,\Phi(\varphi)} \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = 0\,,$$

a dalej przepisuje się jako układ równań

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}(\varphi) = -\lambda\,\Phi(\varphi) \\ \\ \frac{(\sin\theta)^2}{R(r)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) = \lambda \end{cases}$$

zadanych dla pewnej stałej rzeczywistej λ. Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym 2π-okresowość rozwiązania u wymaga istnienia liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ spełniającej tożsamość

$$\lambda = n^2\,,$$

gdyż mamy

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\,\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B_n\,\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) = A_n\,\cos(n\varphi) + B_n\,\sin(n\varphi)\,.$$

Możemy zatem przyjąć, bazę rozwiązań pierwszego z zagadnień składowych stanowią funkcje $\sin(n\varphi)$ oraz $\cos(n\varphi)$, indeksowane liczbami naturalnymi

[2] W pełnej analogii do przypadku dwuwymiarowego w poniższych rozważaniach antycypujemy jednoznaczność rozwiązania zagadnienia (brzegowego) Laplace'a w konkretnej sytuacji fizycznej, którą modelujemy przy użyciu harmonicznego pola skalarnego u.

$n \in \mathbb{N}$. Podstawiając λ w tak określonej postaci do drugiego z zagadnień składowych, otrzymujemy równanie

$$\frac{(\sin\theta)^2}{R(r)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) = n^2\,,$$

które znowu możemy rozpisać jako układ dwóch równań

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \mu\, R(r)\,, \\ \\ -\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) - \left(\mu - \frac{n^2}{(\sin\theta)^2}\right)\Theta(\theta) \end{cases}$$

zdefiniowanych dla pewnej stałej rzeczywistej μ. Postulujemy

$$R_m(r) = r^m\,, \quad m \in \mathbb{Z}\,,$$

a wówczas koniecznie

$$\mu = m(m+1)\,.$$

Na koniec wprowadzamy nową zmienną

$$t := \cos\theta$$

i w ten sposób dla

$$\widetilde{\Theta}(t) := \Theta\left(\theta(t)\right)$$

otrzymujemy (uogólnione) równanie Legendre'a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1-t^2\right) \frac{\mathrm{d}\widetilde{\Theta}(t)}{\mathrm{d}t}\right] + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{1-t^2}\right]\widetilde{\Theta}(t) = 0\,.$$

Bazę jego rozwiązań tworzą tzw. stowarzyszone wielomiany Legendre'a. W przypadku istnienia symetrii osiowej w modelowanym zagadnieniu, tj. dla $u \not\propto \varphi$, powyższe równanie sprowadza się do wyprowadzanego uprzednio równania Legendre'a (8).

Literatura

[Arn97] V.I. Arnol'd, *Lectures on Partial Differential Equations*, PHASIS, 1997.

[Fic48] G.M. Fichtenholz, *Course of Differential and Integral Calculus*, vol. 2, Gostekhizdat, 1948.

[WW02] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1902.

Warszawa, 4. marca 2011 r.