

## LISTA PYTAŃ EGZAMINACYJNYCH (TGI '23/24 [RRS])

### • Pytania podstawowe:

- (1) Struktura, aksjomatyka i przykłady grup.
- (2) Homomorfizmy grup – definicja, właściwości, typy i przykłady.
- (3) Automorfizmy grup.
- (4) Jądro i obraz homomorfizmu – właściwości i przykłady.
- (5) Warstwy jednostronne – opis relacyjny, przykłady, twierdzenie Lagrange’a i jego konsekwencje.
- (6) Grupa symetryczna w terminach generatorów i relacji.
- (7) Dzielniki normalne, konstrukcja ilorazowa, dopełnienie. Twierdzenie o uniwersalności rzutu kanonicznego.
- (8) Dwa twierdzenia o izomorfizmie.
- (9) Iloczyn prosty i półprosty grup – konstrukcja (wewnętrzna i zewnętrzna), przykłady.
- (10) Lemat o pięciu morfizmach.
- (11) Działanie grupy na zbiorze – struktura, aksjomatyka, przykłady.
- (12) Twierdzenie Cayleya i wariacje na temat (dla podgrup normalnych).
- (13) Odwzorowania ekwiwariantne – definicja, właściwości, typy i przykłady.
- (14) Orbity działania w opisie relacyjnym. Przykłady.
- (15) Stabilizator punktu zbioru z działaniem. Opis jądra działania w terminach stabilizatorów. Relacje na orbicie.
- (16) Twierdzenie o klasyfikacji orbit.
- (17) Lemat Cauchy’ego–Frobeniusa.
- (18) Reprezentacje grup – definicja, przykłady, przestrzenie niezmiennicze.
- (19) Splatacze i równoważności. Jądro i obraz splatacza – właściwości.
- (20) Naturalne operacje algebraiczne na reprezentacjach.
- (21) Reprezentacja i reprezentacja kontragredientna – warunki równoważności.
- (22) Rozkładalność i (nie)przywiedlność reprezentacji.
- (23) Reprezentacje unitarne – definicje i przykłady. Równoważność a równoważność unitarna.
- (24) Unitarność a rozkładalność.
- (25) Lematy Schura. Wersja unitarna.
- (26) Unitaryzowalność reprezentacji grup skończonych i jej konsekwencje.
- (27) Reprezentacja zespolenie sprzężona i warunki jej równoważności z wyjściową.
- (28) Pseudounitarność reprezentacji – definicja i opis w terminach relacji między dualizacją a sprzężeniem zespolonym. Specjalizacja dla przypadku unitarnego.
- (29) Algebra splotowa i jej centrum.
- (30) Charaktery – definicja i właściwości, zachowanie względem operacji algebraicznych na reprezentacjach, związek z równoważnościami.
- (31) Charaktery jako baza ortonormalna w centrum algebry splotowej.
- (32) Klasy sprzężoności w grupie skończonej a klasy równoważności jej reprezentacji. Rozkład reprezentacji na elementy nieprzywiedlne w terminach charakterów. Równość charakterów dla reprezentacji nieprzywiedlnych.
- (33) Związek mocy grupy skończonej z wymiarami jej reprezentacji nieprzywiedlnych i konsekwencje dla reprezentacji permutacyjnej.
- (34) Twierdzenie Frobeniusa–Schura–Petera–Weyla.
- (35) Twierdzenie Mazura–Ulama w wersji euklidesowej.
- (36) Oś obrotu i jej odpowiednik niewłaściwy.
- (37) Postać kanoniczna izoterii w  $\mathbb{R}^{\times 3}$ .

- (38) Sieci krystalograficzne translacyjnie niezmiennicze – definicja i podstawowe elementy opisu. Sieci Bravais'ego.
  - (39) Krystalograficzna grupa przestrzenna i punktowa sieci jako grupy w relacji. Grupa stacjonarna sieci. Przypadek sieci Bravais'ego.
  - (40) Struktura składowej właściwej grupy stacjonarnej sieci w wymiarze 2 i 3.
  - (41) Komórki Wignera–Seitza i dokładne parkietaże płaszczyzny.
  - (42) Struktura grupy stacjonarnej sieci w wymiarze 2.
  - (43) Podgrupy skończone  $SO(3)$  – klasyfikacja.
- **Pytania o podwyższonym poziomie trudności:**
- (1) Iloczyny półproste a krótkie ciągi dokładne grup.
  - (2) Homomorfizm łączący w kohomologii.
  - (3) Charaktery grup skończonych a całkowite liczby algebraiczne. Moc grupy a wymiar reprezentacji.
  - (4) Algebra grupowa w ujęciu kategorijskim.