UZUPEŁNIANIE PRZESTRZENI Z MIARĄ (DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$R \int R$

Punktem wyjścia naszej dyskusji jest **przestrzeń z miarą** $(\Omega, \mathcal{F}^\sigma, \mu)$, złożona ze zbioru Ω, pewnej σ-algebry zbiorów $\mathcal{F}^\sigma \subseteq 2^\Omega$ oraz miary $\mu : \mathcal{F}^\sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ na $\mathcal{F}^\sigma$. W ogólności nie wszystkie podzbiory $\mathcal{F}^\sigma$-zbiorów μ-miary zero należą do $\mathcal{F}^\sigma$, zasadnym jest zatem pytanie, czy można tak rozszerzyć σ-algebrę wraz z określoną na niej miarą, iżby warunek ten był spełniony. Niniejsze notatki poświęcone są szczegółowemu zbadaniu tego zagadnienia.

Zdefiniujmy symbole

$$\begin{aligned} N(\mu) &:= \{ A \in \mathcal{F}^\sigma \quad | \quad \mu(A) = 0 \}, \\ N_0(\mu) &:= \{ B \in 2^\Omega \quad | \quad \exists_{N \in N(\mu)} : N \supseteq B \}. \end{aligned}$$

Oczywiście $N(\mu) \subseteq N_0(\mu)$. Idąc dalej, σ-algebrę $\mathcal{F}^\sigma$ nazwiemy **μ-zupełną** (wzgl. **zupełną względem** μ), ilekroć $N_0(\mu) \subseteq \mathcal{F}^\sigma$. Zagadnienie opisane we otwierającym paragrafie można teraz przeformułować jako pytanie o istnienie uzupełnienia (w sensie miary) danej przestrzeni z miarą.

Na ćwiczeniach wprowadziliśmy, za [Ves03], trzy naturalne rozszerzenia wyjściowej σ-algebry, tj.

$$\overline{\mathcal{F}}^\sigma_\cup := \{ A \cup B \quad | \quad A \in \mathcal{F}^\sigma \quad \wedge \quad B \in N_0(\mu) \}, \tag{1}$$

$$\overline{\mathcal{F}}^\sigma_\triangle := \{ A \triangle B \quad | \quad A \in \mathcal{F}^\sigma \quad \wedge \quad B \in N_0(\mu) \}, \tag{2}$$

$$\overline{\mathcal{F}}^\sigma_\setminus := \{ A \setminus B \quad | \quad A \in \mathcal{F}^\sigma \quad \wedge \quad B \in N_0(\mu) \}, \tag{3}$$

a następnie udowodniliśmy

Stw. 1. $\mathcal{F}^\sigma \subseteq \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\cup = \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\triangle = \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\setminus$.

Dowód wykorzystywał następujący prosty do wykazania i przydatny także w dalszej części dyskusji

Lemat 1. Niechaj $A, B, N \subseteq \Omega$, przy czym $B \subseteq N$. Wówczas zachodzą nastące tożsamości:

(i) $A \cup B = (A \setminus N) \triangle [N \cap (A \cup B)]$;
(ii) $A \triangle B = (A \setminus N) \cup [N \cap (A \triangle B)]$;
(iii) $A \cup B = (A \cup N) \setminus [(N \setminus B) \setminus A]$;
(iv) $A \setminus B = (A \setminus N) \cup (A \cap N \cap B^c)$.

Obok powyższego lematu w dalszej części naszych rozważań wykorzystujemy także oczywisty

Lemat 2. $A \triangle B = C \triangle D \quad \Longleftrightarrow \quad A \triangle C = B \triangle D$.

Ponadto mamy

Lemat 3. Niechaj $(\Omega, \mathcal{F}^\sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Wówczas dla dowolnych $A_1, A_2 \in \mathcal{F}^\sigma$ zachodzi

(i) $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$;
(ii) $\mu(A_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A_1) = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \triangle A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2)$.

Dowód tego ostatniego stwierdzenia jest przedmiotem jednego z zadań domowych.

Zdefiniujmy następnie trzy *a priori* wzajem nierównoważne rozszerzenia wyjściowej miary μ odpowiadające wypisanym wcześniej trzem rozszerzeniom jej dziedziny, mianowicie (w notacji definicji (1)-(3))

$$\overline{\mu}_\cup \,:\, \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\cup \to \overline{\mathbb{R}} \,:\, A \cup B \mapsto \mu(A)\,,$$

$$\overline{\mu}_\triangle \,:\, \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\triangle \to \overline{\mathbb{R}} \,:\, A \triangle B \mapsto \mu(A)\,,$$

$$\overline{\mu}_\setminus \,:\, \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\setminus \to \overline{\mathbb{R}} \,:\, A \setminus B \mapsto \mu(A)\,.$$

Wówczas

Stw. 2. $\overline{\mu}_\cup, \overline{\mu}_\triangle$ i $\overline{\mu}_\setminus$ są dobrze określone i zachodzą tożsamości

$$\overline{\mu}_\cup \equiv \overline{\mu}_\triangle \equiv \overline{\mu}_\setminus\,.$$

Dowód: Sprawdzamy najpierw definicję $\overline{\mu}_\cup$. Niechaj

$$A_1 \cup B_1 = C = A_2 \cup B_2 \in \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\cup\,, \tag{4}$$

przy czym $A_1, A_2 \in \mathcal{F}^\sigma$ i $B_i \subseteq N_i \in N(\mu)$, $i \in \{1, 2\}$. Chcemy pokazać, że

$$\mu(A_1) = \mu(A_2)\,.$$

Równość (4) jest w świetle punktu (i) Lematu 1. równoważna równości

$$(A_1 \setminus N_1) \triangle (N_1 \cap C) = (A_2 \setminus N_2) \triangle (N_2 \cap C)\,,$$

która z kolei implikuje, na mocy Lematu 2.,

$$(A_1 \setminus N_1) \triangle (A_2 \setminus N_2) = (N_1 \cap C) \triangle (N_2 \cap C) \subseteq N_1 \cup N_2 \,.$$

Stąd wobec nieujemności miary μ, jej monotoniczności i skończonej subaddytywności dostajemy

$$0 \leq \mu\left((A_1 \setminus N_1) \triangle (A_2 \setminus N_2)\right) \leq \mu(N_1 \cup N_2) \leq \mu(N_1) + \mu(N_2) = 0\,,$$

a zatem

$$\mu\left((A_1 \setminus N_1) \triangle (A_2 \setminus N_2)\right) = 0\,.$$

Punkt (i) Lematu 2. prowadzi nas teraz do wniosku, iż

$$\mu(A_1 \setminus N_1) = \mu(A_2 \setminus N_2)\,,$$

więc też wobec $\mu(N_i) = 0,\ i \in \{1, 2\}$ mamy, na mocy punktu (ii) tegoż Lematu, żądaną równość

$$\mu(A_1) = \mu(A_2)\,.$$

Podobnie dowodzimy, że odwzorowanie $\overline{\mu}_{\triangle}$ jest dobrze określone. Istotnie, niech (przy dotychczasowych oznaczeniach)

$$A_1 \triangle B_1 = C_1 = A_2 \triangle B_2\,,$$

a wtedy także

$$A_1 \triangle A_2 = B_1 \triangle B_2 \subseteq B_1 \cup B_2 \subseteq N_1 \cup N_2 \in N(\mu)\,,$$

zatem znowu

$$\mu(A_1 \triangle A_2) = 0\,,$$

a stąd

$$\mu(A_1) = \mu(A_2)\,,$$

co należało udowodnić.

Pozostaje pokazać, że także $\overline{\mu}_\setminus$ jest dobrze określone. W tym celu założywszy, że

$$A_1 \setminus B_1 = C = A_2 \setminus B_2\,,$$

dostajemy na mocy punktu (iv) Lematu 1.

$$(A_1 \setminus N_1) \cup (A_1 \cap N_1 \cap B_1^c) = (A_2 \setminus N_2) \cup (A_2 \cap N_2 \cap B_2^c)\,,$$

ponieważ zaś $\overline{\mu}_\cup$ jest dobrze określone, przeto

$$\mu(A_1 \setminus N_1) = \overline{\mu}_\cup(C) = \mu(A_2 \setminus N_2)\,,$$

co wobec $\mu(N_1) = 0 = \mu(N_2)$ implikuje znowu

$$\mu(A_1) = \mu(A_2)\,.$$

Wykażemy teraz po kolei, że $\overline{\mu}_\cup = \overline{\mu}_\triangle$ oraz $\overline{\mu}_\cup = \overline{\mu}_\setminus$. W tym celu rozważmy dowolny zbiór $C \in \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\cup$, czyli $C = A \cup B$ dla pewnych $A \in \mathcal{F}^\sigma$ i $B \subseteq N \in N(\mu)$. Wówczas wprost z definicji zachodzi

$$\overline{\mu}_\cup(C) = \mu(A)\,,$$

ale też na mocy punktu (i) Lematu 1.

$$C = (A \setminus N) \triangle [N \cap (A \cup B)] \in \overline{\mathcal{F}}^\sigma_\triangle\,,$$

więc

$$\overline{\mu}_\triangle(C) = \mu(A \setminus N)\,.$$

Jednakowoż $\mu(N) = 0$, więc $\mu(A \setminus N) = \mu(A)$, a stąd

$$\overline{\mu}_\triangle(C) = \mu(A) = \overline{\mu}_\cup(C)\,,$$

co też wobec dowolności C dowodzi równości

$$\overline{\mu}_\triangle = \overline{\mu}_\cup\,.$$

Drugą równość dowodzimy analogicznie. Biorąc dowolny zbiór

$$C = A \setminus B \in \overline{\mathcal{F}}^{\sigma}_{\setminus}\,,$$

dla którego

$$\overline{\mu}_{\setminus}(C) = \mu(A)\,,$$

i który możemy – wobec punktu (iv) Lematu 1. – przepisać jako

$$C = (A \setminus N) \cup (A \cap N \cap B^{c}) \in \overline{\mathcal{F}}^{\sigma}_{\cup}\,,$$

stwierdzamy (z racji $\mu(N) = 0$)

$$\overline{\mu}_{\cup}(C) = \mu(A \setminus N) = \mu(A) = \overline{\mu}_{\setminus}(C)\,,$$

co kończy dowód. □

Możemy już teraz sformułować i udowodnić fundamentalne

Tw. 1. (o uzupełnianiu miary) Niechaj $(\Omega, \mathcal{F}^{\sigma}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Zdefiniujmy

$$\overline{\mathcal{F}}^{\sigma} := \{\, A \cup B \quad | \quad A \in \mathcal{F}^{\sigma} \quad \wedge \quad B \in N_0(\mu) \,\}$$

oraz

$$\overline{\mu}(C) := \mu(A)$$

dla $C = A \cup B \in \overline{\mathcal{F}}^{\sigma}$ z A i B jak w definicji $\overline{\mathcal{F}}^{\sigma}$. Wówczas

(i) $\mathcal{F}^{\sigma} \subseteq \overline{\mathcal{F}}^{\sigma}$;
(ii) $\overline{\mathcal{F}}^{\sigma}$ jest σ-algebrą zbiorów;
(iii) odwzorowanie $\overline{\mu}$ jest dobrze określone;
(iv) $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}^{\sigma}, \overline{\mu})$ jest przestrzenią z miarą (tj. $\overline{\mu}$ jest miarą na $\overline{\mathcal{F}}^{\sigma}$);
(v) $\overline{\mu}|_{\mathcal{F}^{\sigma}} = \mu$;
(vi) zbiór $\overline{\mathcal{F}}^{\sigma}$ jest $\overline{\mu}$-zupełny (w szczególności dla $D \subseteq A \in N(\overline{\mu})$ mamy $\overline{\mu}(D) = 0$);
(vii) $\overline{\mu}$ jest jedyną miarą na $\overline{\mathcal{F}}^{\sigma}$, która spełnia (v).

Tak zdefiniowaną trójkę $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}^{\sigma}, \overline{\mu})$ określamy mianem **uzupełnienia** $(\Omega, \mathcal{F}^{\sigma}, \mu)$.

Dowód: W świetle dotychczasowych wywodów wystarczy udowodnić prawdziwość punktów (ii), (iv) oraz (v)-(vii).

Zaczynamy od punktu (ii). Oczywiście $\Omega \in \mathcal{F}^\sigma$, skoro więc $\mathcal{F}^\sigma \subseteq \overline{\mathcal{F}}^\sigma$ na mocy punktu (i), to także $\Omega \in \overline{\mathcal{F}}^\sigma$. Niech teraz $D = A \cup B$, przy czym $A \in \mathcal{F}^\sigma$ i $B \in N_0(\mu)$, a wtedy $D^c = A^c \cap B^c \equiv A^c \setminus B$, ale $\mathcal{F}^\sigma$ jest σ-ciałem, więc $A^c \in \mathcal{F}^\sigma$, zatem $D^c \in \overline{\mathcal{F}}^\sigma_{\setminus} = \overline{\mathcal{F}}^\sigma_{\cup} \equiv \overline{\mathcal{F}}^\sigma$. Niech teraz $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem elementów $\overline{\mathcal{F}}^\sigma$, czyli $D_n = A_n \cup B_n$, gdzie $A_n \in \mathcal{F}^\sigma$ i $B_n \subseteq N_n \in N(\mu)$. Wówczas

$$\bigcup_{n=1}^\infty D_n = \bigcup_{m=1}^\infty A_m \cup \bigcup_{n=1}^\infty B_n$$

przy czym $\bigcup_{m=1}^\infty A_m \in \mathcal{F}^\sigma$, gdyż $\mathcal{F}^\sigma$ jest σ-algebrą, a nadto – z tego samego powodu – $\bigcup_{n=1}^\infty B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty N_n \in \mathcal{F}^\sigma$, przy czym

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty N_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(N_n) = 0$$

z racji nieujemności miary i jej przeliczalnej subaddytywności. Zachodzi zatem pożądana relacja

$$\bigcup_{n=1}^\infty D_n \in \overline{\mathcal{F}}^\sigma .$$

Przechodzimy następnie do dowodu punktu (iv). Po pierwsze stwierdzamy, że

$$\overline{\mu}(D) = \mu(A) \geq 0 ,$$

albowiem μ jest miarą, a zatem odwzorowanie $\overline{\mu}$ jest nieujemne. Po drugie

$$\overline{\mu}(\emptyset) \equiv \overline{\mu}(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0 ,$$

przy czym argument $\overline{\mu}$ w drugim wyrażeniu od lewej jest w oczywisty sposób elementem $\overline{\mathcal{F}}^\sigma$. Po trzecie jeśli weźmiemy dowolny ciąg $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ wzajem rozłącznych zbiorów z $\overline{\mathcal{F}}^\sigma$, z których każdy można zapisać w znajomej postaci $D_n = A_n \cup B_n$, to wtedy (wobec przeliczalnej addytywności μ)

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^\infty D_n\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{m=1}^\infty A_m \cup \bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^\infty A_m\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \overline{\mu}(A_n \cup B_n) = \sum_{n=1}^\infty \overline{\mu}(D_n) ,$$

co kończy dowód punktu (iv).

Dowód punktu (v) jest natychmiastowy: dla dowolnego $D \in \mathcal{F}^\sigma$, który zapisujemy w postaci $D = D \cup \emptyset \in \overline{\mathcal{F}}^\sigma$, zachodzi

$$\overline{\mu}(D) = \mu(D)\,,$$

co należało pokazać.

Dla dowodu punktu (vi) przyjmijmy, że $B \in \overline{\mathcal{F}^\sigma}$ jest miary zero, tj. $\overline{\mu}(B) = 0$. Rozważmy teraz dowolny $A \subseteq B$. Chcemy dowieść, że $A \in \overline{\mathcal{F}^\sigma}$ oraz $\overline{\mu}(A) = 0$. W tym celu przedstawmy B w postaci
$B = C \cup D$, gdzie $C \in \mathcal{F}^\sigma$ i $D \subseteq N \in N(\mu)$. Ponieważ jednak $\mu(C) = \overline{\mu}(B) = 0$, więc też wobec relacji

$$A \subseteq B = C \cup D \subseteq C \cup N \in \mathcal{F}^\sigma \subseteq \overline{\mathcal{F}^\sigma}\,,$$

wynikajęcej z tego, że $\mathcal{F}^\sigma \ni C, N$ jest σ-algebrą oraz z udowodnionego wcześniej punktu (i), przeto z racji nieujemności i monotoniczności miary $\overline{\mu}$

$$0 \leq \overline{\mu}(C \cup N) \leq \overline{\mu}(C) + \overline{\mu}(N) = \mu(C) + \mu(N) = 0\,,$$

czyli $\overline{\mu}(C \cup N) = 0$, przy czym przedostatnia rónośc jest konsekwencją punktu (v). Używając tego samego punktu, dostajemy w ten sposób równość

$$\mu(C \cup N) = \overline{\mu}(C \cup N) = 0\,.$$

Powyższy wynik pozwala nam zidentyfikować A jako element $\overline{\mathcal{F}^\sigma}$, a mianowicie

$$A \equiv \emptyset \cup A\,,$$

bo też $\emptyset \in \mathcal{F}^\sigma$ i $A \subseteq C \cup N \in N(\mu)$. Jest ponadto

$$0 \leq \overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(C \cup N) = 0\,,$$

a zatem

$$\overline{\mu}(A) = 0\,.$$

Na koniec dowodzimy punktu (vii). Niechaj $\overline{\nu} : \overline{\mathcal{F}^\sigma} \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie dowolną miarą, która spełnia równość

$$\overline{\nu}|_{\mathcal{F}^\sigma} = \mu = \overline{\mu}|_{\mathcal{F}^\sigma}\,.$$

Biorąc dowolny element $D = A \cup B \in \overline{\mathcal{F}^\sigma}$ z $A \in \mathcal{F}^\sigma$ i $B \subseteq N \in N(\mu)$, znajdujemy – wobec równości $\overline{\nu}(N) = \mu(N) = 0$ oraz monotoniczności miary $\overline{\nu}$ – relację

$$\overline{\mu}(D) = \mu(A) = \overline{\nu}(A) \leq \overline{\nu}(D) .$$

Z drugiej jednak strony zachodzi

$$\overline{\nu}(D) \leq \overline{\nu}(A \cup N) \leq \overline{\nu}(A) + \overline{\nu}(N) = \mu(A) + \mu(N) = \mu(A) = \overline{\mu}(D) ,$$

a to z racji monotoniczności miary $\overline{\nu}$ (w odniesieniu do $D \subseteq A \cup N \in \mathcal{F}^\sigma \subseteq \overline{\mathcal{F}^\sigma}$) i jej skończonej subaddytywności. Wobec dowolności D wnioskujemy, że zachodzi pożądana równość

$$\overline{\nu} = \overline{\mu} .$$

To kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga: Na mocy Stwierdzeń 1. i 2. trójkę $(\Omega, \overline{\mathcal{F}^\sigma}_{(\cup)}, \overline{\mu}_{(\cup)})$ można podstawić dowolną z trójek $(\Omega, \overline{\mathcal{F}^\sigma}_{\triangle}, \overline{\mu}_{\triangle})$ i $(\Omega, \overline{\mathcal{F}^\sigma}_{\setminus}, \overline{\mu}_{\setminus})$.

Wniosek: Ilekroć mamy do czynienia z przestrzenią z miarą nad danym zbiorem, możemy bez straty ogólności zakładać, że rozpatrywana przestrzeń jest zupełna względem tej miary.

Nasze dotychczasowe rozważania doskonale uzupełnia poniższe

Stw. 3. Niechaj $(\Omega, \mathcal{F}^\sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i załóżmy, że jest ona zupełna względem tej miary. Wówczas zachodzi

$$(\Omega, \overline{\mathcal{F}^\sigma}, \overline{\mu}) \equiv (\Omega, \mathcal{F}^\sigma, \mu) ,$$

czyli uzupełnienie przestrzeni z miarą zupełnej względem tej miary jest operacją identycznościową.

Dowód: Na mocy Twierdzenia 1. jest

$$\mathcal{F}^\sigma \subseteq \overline{\mathcal{F}^\sigma} ,$$

niech zatem $C \in \overline{\mathcal{F}^\sigma}$, czyli $C = A \cup B$ dla pewnych $A \in \mathcal{F}^\sigma$ i $B \in N_0(\mu)$. Jako że $(\Omega, \mathcal{F}^\sigma, \mu)$ jest μ-zupełna, przeto $N_0(\mu) \subseteq \mathcal{F}^\sigma$, a stąd $B \in \mathcal{F}^\sigma$, skoro więc $\mathcal{F}^\sigma$ jest z założenia σ-algebrą, to także $C = A \cup B \in \mathcal{F}^\sigma$, więc $\overline{\mathcal{F}^\sigma} \subseteq \mathcal{F}^\sigma$. Stwierdzamy zatem ostatecznie, że zachodzi równość

$$\overline{\mathcal{F}^\sigma} = \mathcal{F}^\sigma .$$

Ponadto $\overline{\mu}$ jest *jedyną* miarą na $\overline{\mathcal{F}^\sigma}$, która pokrywa się z μ na $\mathcal{F}^\sigma$, więc

$$\overline{\mu}|_{\overline{\mathcal{F}^{\sigma}}} \equiv \overline{\mu}|_{\mathcal{F}^{\sigma}} = \mu \equiv \mu|_{\overline{\mathcal{F}^{\sigma}}} \,,$$

co też należało wykazać. □

Literatura

[Ves03] E.M. Vestrup, *The Theory of Measures and Integration*, John Wiley & Sons, 2003.

Warszawa, 20. marca 2011 r.