TOPOLOGIA PRZESTRZENI METRYCZNYCH, ZWARTOŚĆ, SPÓJNOŚĆ I POJĘCIA BLISKIE (DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$R \int R$

Abstract. Poniższe notatki do ćwiczeń zbierają podstawowe pojęcia i stwierdzenia wypowiadane w dyskusji podstawowych własności przestrzeni metrycznych. Podstawą do ich opracowania były skrypty do ćwiczeń z analizy matematycznej autorstwa G. Cieciury i J. Jezierskiego oraz książka J. Dieudonné'go pt. "Éléments d'analyse" (tom I).

1. Rekwizyty

W pierwszej części notatek zgromadzimy wszelkie potrzebne definicje.

Definicja 1.1. **Przestrzeń metryczna** to para (X,d) złożona ze zbioru X i odwzorowania $d : X \times X \to \mathbb{R}$, zwanego **metryką**, które spełnia następujące warunki:

(M.1) $d(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (niezwyrodnienie);
(M.2) $\forall_{x,y \in X} : d(x,y) = d(y,x)$ (symetria);
(M.3) $\forall_{x,y,z \in X} : d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (nierówność trójkąta).

✓

Uwaga 1.2. Z powyższych aksjomatów wynika[1] warunek

(M.4) $\forall_{x,y \in X} : d(x,y) \ge 0$ (nieujemność),

który bywa (niepotrzebnie) dodawany do definicji.

* * *

Definicja 1.3. Niechaj (X,d) będzie przestrzenią metryczną, $A \subset X$ zaś – dowolnym jej podzbiorem. **Średnicą zbioru** A nazywamy liczbę

$$\varnothing(A) := \sup_{x,y \in A} \{ d(x,y) \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} .$$

✓

Definicja 1.4. Niechaj (X,d) będzie przestrzenią metryczną, $A,B \subset X$ zaś – dowolnymi dwoma jej podzbiorami. **Odległością między zbiorami** A **i** B **w** X nazywamy liczbę

$$d(A,B) := \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{ d(x,y) \} .$$

W szczególności możemy mówić o **odległości punktu** $x \in X$ **od zbioru** $A \subset X$

$$d(x,A) \equiv d(\{x\},A) = \inf_{y \in B} \{ d(x,y) \} .$$

✓

[1] Wystarczy zauważyć, że $2d(x,y) = d(x,y) + d(y,x) \ge d(x,x) = 0$.

Definicja 1.5. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $Y \subset X$ zaś – dowolnym jej podzbiorem. Parę $(Y, d|_{Y \times Y})$ nazywamy wówczas **podprzestrzenią** przestrzeni metrycznej (X, d).

$\checkmark$

Definicja 1.6. Niechaj (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Mianem **izometrii** określamy odwzorowanie $f : X \to Y$ o własności

$$\forall_{x,y \in X} \ : \ d_Y\left(f(x), f(y)\right) = d_X(x, y)\,.$$

$\checkmark$

Definicja 1.7. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, niech $x \in X$ i $r \in \mathbb{R}_{>0}$. **Kulą otwartą o środku w** x **i promieniu** r nazywamy zbiór

$$K(x; r) \coloneqq \{\ y \in X \quad | \quad d(y, x) < r\ \}\,.$$

$\checkmark$

Definicja 1.8. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $O \subset X$ nazywamy **otwartym**, gdy wraz z dowolnym swoim elementem $x \in O$ zawiera także pewną kulę otwartą o środku w tym punkcie,

$$\forall_{x \in O} \ : \ \exists_{r \in \mathbb{R}_{>0}} \ : \ K(x; r) \subset O\,.$$

Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych X określamy mianem **topologii (metrycznej)** (X, d) i oznaczamy $\mathcal{T}_{(X,d)}$.

$\checkmark$

Definicja 1.9. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $(Y, d|_{Y \times Y})$ zaś – dowolną jej podprzestrzenią, a nadto niech $y \in Y$ i $r \in \mathbb{R}_{>0}$. **Kulą otwartą w** $(Y, d|_{Y \times Y})$ **o środku w** y **i promieniu** r nazywamy zbiór

$$K_Y(y; r) \coloneqq K(y; r) \cap Y\,.$$

$\checkmark$

Definicja 1.10. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $S \subset X$ – jej dowolnym podzbiorem, $O_\Lambda \coloneqq \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ zaś – dowolną rodziną podzbiorów X indeksowaną przez zbiór Λ. Rodzinę O_Λ nazywamy **pokryciem** S, jeśli

$$S \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\,.$$

Dowolna rodzina podzbiorów $O_{\Lambda'} \eqqcolon\coloneqq \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ utworzona z elementów O_Λ o indeksach z podzbioru (właściwego) $\Lambda' \subsetneq \Lambda$ i zarazem będąca pokryciem S nosi miano **podpokrycia (pokrycia)** O_Λ. Ilekroć $\forall_{\lambda \in \Lambda} \ : \ O_\lambda \in \mathcal{T}_{(X,d)}$, mówimy o **otwartym pokryciu** S. W szczególności, gdy $S = X$, mamy do czynienia z **(otwartym) pokryciem**.

$\checkmark$

Definicja 1.11. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $S \subset X$ zaś – dowolnym jej podzbiorem. **Otwartym otoczeniem zbioru** S **w** X nazwiemy dowolny zbiór otwarty $O_S \subset X$ zawierający S,

$$O_S \supset S\,.$$

Otoczeniem zbioru S **w** X jest dowolny podzbiór $U_S \subset X$ zawierający pewne otoczenie otwarte S w X.

W przypadku podzbioru jednoelementowego $\{x\} \subset X$ mówimy o **(otwartym) otoczeniu punktu** x **w** X i piszemy $U_x \equiv U_{\{x\}}$ (wzgl. $O_x \equiv O_{\{x\}}$).

$\checkmark$

Przykład 1.12. Przykładem otwartego otoczenia podzbioru $S \subset X$ przestrzeni metrycznej (X, d) jest

$$O_S := \{ x \in X \quad | \quad d(x, S) < r \} .$$

Definicja 1.13. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $S \subset X$ zaś – dowolnym jej podzbiorem. Punkt $x \in S$ określamy mianem **punktu wewnętrznego zbioru** S, jeśli S jest otoczeniem x w X.

Wnętrzem zbioru S nazywamy zbiór

$$\mathrm{Int}\, S := \{ x \in S \quad | \quad x \text{ wewnętrzny dla } S \} .$$

$\checkmark$

Definicja 1.14. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $F \subset X$ nazywamy **domkniętym**, jeśli istnieje zbiór otwarty $O \subset X$ o własności

$$F = \complement_X O .$$

$\checkmark$

Definicja 1.15. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $S \subset X$ zaś – dowolnym jej podzbiorem. Punkt $x \in S$ określamy mianem **punktu skupienia zbioru** S, jeśli dowolne otoczenie x ma niepuste przecięcie z S.

Domknięciem zbioru S nazywamy zbiór

$$\overline{S} := \{ x \in S \quad | \quad x \text{ punkt skupienia } S \} .$$

$\checkmark$

Definicja 1.16. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $A, B \subset X$ zaś – dowolnymi dwoma jej podzbiorami. Mówimy, że A i B są **(wzajem) rozgraniczone**, jeśli

$$A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B .$$

$\checkmark$

Definicja 1.17. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $A, B \subset X$ zaś – dowolnymi dwoma jej podzbiorami. Zbiór $A \subset B$ jest **gęsty w(zględem)** B, jeśli każdy element zbioru B jest punktem skupienia zbioru A, czyli

$$B \subset \overline{A} .$$

W szczególności zbiór $A \subset X$ gęsty w X określamy mianem **zbioru wszędzie gęstego** lub inaczej **gęstego w** X.

$\checkmark$

Przykład 1.18. Przykładem zbioru wszędzie gęstego jest podzbiór $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}, d_{\mathrm{E}})$, gdzie d_{E} jest standardową metryką euklidesową.

Definicja 1.19. Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną. **Ciągiem Cauchy'ego w** X nazwiemy dowolny ciąg nieskończony $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in X$ o własności

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; : \; \exists_{N \in \mathbb{N}} \; : \; \forall_{m,n > N} \; : \; d(x_m, x_n) < \varepsilon .$$

$\checkmark$

Definicja 1.20. Przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy **zupełną**, gdy każdy ciąg Cauchy'ego w X jest zbieżny, tj. zbiega do punktu z X.

$\checkmark$

Definicja 1.21. Przestrzeń metryczną (X,d) określamy mianem **prezwartej**, gdy można ją pokryć skończoną liczbą zbiorów o średnicy mniejszej od dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej, tj.

$$\forall_{\varepsilon>0} \;:\; \exists_{N\in\mathbb{N}^*} \;:\; \exists_{\{O_n\}_{n\in\overline{1,N}}} \;:\; \left(\varnothing(O_n) < \varepsilon \quad \wedge \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} O_n \right).$$

$\checkmark$

Definicja 1.22. Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy **zwartą**, gdy każde jej otwarte pokrycie O_Λ ma skończone podpokrycie O_L, $L \subset \Lambda$, $|L| < \infty$.

Podzbiór $Y \subset X$ nazwiemy **zwartym**, jeśli odnośna podprzestrzeń $(Y, d|_{Y\times Y})$ jest zwarta.

$\checkmark$

Definicja 1.23. Przestrzeń metryczna (X,d) jest **spójna**, jeśli nie istnieją dwa takie jej niepuste podzbiory otwarte $A, B \subset X$, które spełniałyby warunki

(S.1) $A \cup B = X$;
(S.2) $A \cap B = \varnothing$.

Podzbiór $S \subset X$ nazwiemy **spójnym**, ilekroć odnośna podprzestrzeń $(S, d|_{S\times S})$ jest spójna.

$\checkmark$

Definicja 1.24. Niechaj (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f : X \to Y$ jest **ciągłe w punkcie** $x \in X$, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \;:\; \exists_{\delta_{\varepsilon,x}>0} \;:\; \forall_{y\in X} \;:\; d_X(x,y) < \delta_{\varepsilon,x} \quad\Rightarrow\quad d_Y\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon\,.$$

Odwzorowanie ciągłe to takie, które jest ciągłe w każdym punkcie swej dziedziny,

$$\forall_{\varepsilon>0} \;:\; \forall_{x\in X} \;:\; \exists_{\delta_{\varepsilon,x}>0} \;:\; \forall_{y\in X} \;:\; d_X(x,y) < \delta_{\varepsilon,x} \quad\Rightarrow\quad d_Y\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon\,.$$

$\checkmark$

Definicja 1.25. Niechaj (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f : X \to Y$ jest **jednostajnie ciągłe**, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \;:\; \exists_{\delta_\varepsilon>0} \;:\; \forall_{x,y\in X} \;:\; d_X(x,y) < \delta_\varepsilon \quad\Rightarrow\quad d_Y\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon\,.$$

$\checkmark$

Uwaga 1.26. Podczas gdy ciągłość charakteryzuje funkcję lokalnie, ciągłość jednostajna jest jej cechą globalną.

* * *

Definicja 1.27. Niechaj (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Odwzorowanie $f : X \to Y$ określamy mianem **homeomorfizmu**, gdy

(H.1) f jest bijekcją;
(H.2) zarówno f jak i f^{-1} są ciągłe.

$\checkmark$

2. Implikacje znane

W części drugiej wypiszemy bez dowodów stwierdzenia udowodnione na wykładzie.

Stwierdzenie 2.1 (Algebra zbiorów otwartych). *Niechaj* (X,d) *będzie przestrzenią metryczną,* $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *zaś – dowolną rodziną zbiorów otwartych* $O_\lambda \in \mathcal{T}_{(X,d)}$*, indeksowaną przez zbiór* Λ *(niekoniecznie skończony). Wówczas*

(O.1) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}_{(X,d)}$ *(suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych) jest otwarta.*
(O.2) $\forall_{\substack{L\subset\Lambda \\ |L|<\infty}} : \bigcap_{\lambda\in L} O_\lambda \in \mathcal{T}_{(X,d)}$ *(przecięcie dowolnej skończonej liczby zbiorów otwartych) jest otwarte.*

Ponadto

(O.3) $\varnothing \in \mathcal{T}_{(X,d)}$.
(O.4) $X \in \mathcal{T}_{(X,d)}$.

Stwierdzenie 2.2 (Algebra zbiorów domkniętych). *Niechaj* (X,d) *będzie przestrzenią metryczną,* $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *zaś – dowolną rodziną zbiorów domkniętych* $F_\lambda = \complement_X O_\lambda,\ O_\lambda \in \mathcal{T}_{(X,d)}$*, indeksowaną przez zbiór* Λ *(niekoniecznie skończony). Wówczas*

(O.1) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{T}_{(X,d)}$ *(przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych) jest domknięte.*
(O.2) $\forall_{\substack{L\subset\Lambda \\ |L|<\infty}} : \bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda \in \mathcal{T}_{(X,d)}$ *(suma dowolnej skończonej liczby zbiorów domkniętych) jest domknięta.*

Ponadto

(O.3) $\varnothing$ *jest domknięty.*
(O.4) X *jest domknięta.*

Stwierdzenie 2.3. *W zwartej przestrzeni metrycznej każdy ciąg nieskończony ma punkt skupienia (tj. da się z niego wybrać podciąg zbieżny).*

Stwierdzenie 2.4. *Obraz zwartego podzbioru przestrzeni metrycznej względem odwzorowania ciągłego jest zwarty.*

3. Implikacje mniej znane, lecz nie mniej ważne

W części ostatniej wysłowimy i (w większości przypadków) udowodnimy stwierdzenia nie omawiane na wykładzie a stanowiące przydatne uzupełnienie dyskusji wprowadzonych pojęć.

Stwierdzenie 3.1. *Podprzestrzeń przestrzeni metrycznej jest przestrzenią metryczną.*

Dowód: Oczywisty. □

Stwierdzenie 3.2. *Niechaj* (X,d) *będzie przestrzenią metryczną,* $S\subset X$ *zaś – dowolnym jej podzbiorem. Wówczas* S *jest otwarty* $\Leftrightarrow$ S *jest otoczeniem wszystkich swoich punktów.*

Dowód:

$\Rightarrow$ Oczywiste.

$\Leftarrow$ Skoro S jest otoczeniem każdego $x \in S$, to istnieje $O_x \subset S$ otwarty zawierający x, wtedy jednak

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\} \subset \bigcup_{x \in S} O_x \subset S\,,$$

więc też musi zachodzić $S = \bigcup_{x \in S} O_x$, czyli S otwarty na mocy punktu (O.1) Stwierdzenia 2.1.

□

Stwierdzenie 3.3. *Niechaj* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną,* $(Y, d|_{Y \times Y})$ *– dowolną jej podprzestrzenią,* $S_Y \subset Y$ *zaś – dowolnym podzbiorem* Y*. Wówczas* S_Y *jest otwarty w* Y $\Leftrightarrow$ *istnieje zbiór otwarty (w* X*)* $O_X \subset X$ *o własności*

$$S_Y = O_X \cap Y\,.$$

Dowód:

$\Rightarrow$ Skoro $O_Y \subset Y$ jest otwarty w Y, to

$$\forall_{y \in O_Y} \ : \ \exists_{r_y > 0} \ : \ Y \cap K(y; r_y) \subset O_Y\,,$$

wtedy jednak

$$O_Y = \bigcup_{y \in O_Y} (Y \cap K(y; r_y)) = Y \cap \bigcup_{y \in O_Y} K(y; r_y)\,.$$

Ale zbiór $\bigcup_{y \in O_Y} K(y; r_y) =: O_X$ jest otwarty w X jako suma rodziny zbiorów (kul) otwartych w X.

$\Leftarrow$ Dla dowolnego punktu $y \in O_X \cap Y$ z otwartości $O_X \subset X$ w X wynika, że

$$\exists_{r > 0} \ : \ K(y; r) \subset O_X\,,$$

a stąd $y \in Y \cap K(y; r) \subset Y \cap O_X$, zatem $Y \cap O_X$ zawiera wraz z dowolnym punktem y pewną kulę otwartą w Y, mianowicie $Y \cap K(y; r)$, co pokazuje, że $O_Y := O_X \cap Y$ jest otwarty w Y.

□

Stwierdzenie 3.4. *Niechaj* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną,* $S \subset X$ *zaś – dowolnym jej podzbiorem. Wówczas* $\operatorname{Int} S$ *jest największym zbiorem otwartym (w* X*) zawartym w* S*.*

Dowód: Pokażemy najpierw, że $\operatorname{Int} S$ jest otwarty. S jest (z definicji) otoczeniem dowolnego punktu z $\operatorname{Int} S$, co oznacza, że dla każdego takiego punktu istnieje $O_x \subset S$ otwarty, który zawiera x. Zarazem jednak S jest otoczeniem dowolnego $y \in O_x$, bowiem, np., $O_x \ni y$ i $O_x \subset S$ jest otwarty. W takim razie

$$x \in \operatorname{Int} S \qquad \Longrightarrow \qquad O_x \subset \operatorname{Int} S\,,$$

co dowodzi otwartości $\operatorname{Int} S$.

I odwrotnie, jeśli $O \subset S$ jest otwarty, to wprost z definicji $O \subset \operatorname{Int} S$. □

Stwierdzenie 3.5 (Algebra wnętrz). *Niechaj* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną,* $A, B \subset X$ *zaś – dowolnymi dwoma jej podzbiorami. Wówczas*

(i) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.

(ii) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

Dowód:

Ad (i) Oczywiście $\operatorname{Int} A \subset A \subset B$, przy czym – na mocy Stwierdzenia 3.4 – $\operatorname{Int} A$ otwarty, ale też $\operatorname{Int} B$ największy otwarty zwarty w B, zatem koniecznie $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.

Ad (ii) Pokażemy najpierw, że $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$. Zachodzi $A \cap B \subset A, B$, skąd – na mocy (i) – także $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A, \operatorname{Int} B$, a w takim razie, istotnie,

$$\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B\,.$$

Z drugiej strony zawierania $\operatorname{Int} A \subset A$, $\operatorname{Int} B \subset B$ implikują

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset A \cap B\,,$$

a że $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ jest otwarty (jako przecięcie dwóch zbiorów otwartych), przeto jest zawarty w największym zbiorze otwartym zawartym w $A \cap B$, tj.

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A \cap B)\,.$$

Ostatecznie więc

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B\,,$$

skąd teza.

$\square$

Stwierdzenie 3.6. *Niechaj (X,d) będzie przestrzenią metryczną, $S \subset X$ zaś – dowolnym jej podzbiorem. Wówczas*

$$\overline{S} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X S\,,$$

a ponadto $\overline{S}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym S.

Dowód: Niechaj $x \notin \overline{S}$. Jest to równoważne stwierdzeniu, że istnieje otwarte otoczenie $O_x \ni x$ o własności $O_x \cap S = \varnothing$, a zatem $x \in \operatorname{Int} \complement_X S$. Negując obie strony równoważności, dostajemy

$$x \in \overline{S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \notin \operatorname{Int} \complement_X S \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \complement_X \operatorname{Int} \complement_X S\,.$$

Domkniętość $\overline{S}$ jest teraz konsekwencją udowodnionej wcześniej otwartości $\operatorname{Int} \complement_X S$. Ponadto (także) na mocy Stwierdzeniaprop:Int-as-max-op $\operatorname{Int} \complement_X S \subset \complement_X S$, a zatem

$$\overline{S} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X S \supset \complement_X \complement_X S = S\,,$$

czyli istotnie $\overline{S} \supset S$.

I wreszcie niech będzie dany $F \supset S$ domknięty. Wówczas $\complement_X F \subset \complement_X S$, ale $\complement_X F$ otwarty, zatem $\complement_X F \subset \operatorname{Int} \complement_X S \subset \complement_X S$, gdyż $\operatorname{Int} \complement_X S$ największy otwarty zawarty w $\complement_X S$. W takim jednak razie

$$F = \complement_X \complement_X F \supset \complement_X \operatorname{Int} \complement_X S = \overline{S}\,.$$

$\square$

Stwierdzenie 3.7 (Algebra domknięć)**.** *Niechaj (X,d) będzie przestrzenią metryczną, $A, B \subset X$ zaś – dowolnymi dwoma jej podzbiorami. Wówczas*

(i) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B}$.
(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(iv) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.
(v) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$.

Dowód:

Ad (i) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \complement_X A \supset \complement_X B \quad \xRightarrow{\text{Stw. 3.5(i)}} \operatorname{Int} \complement_X A \supset \operatorname{Int} \complement_X B \quad \Rightarrow \quad \complement_X \operatorname{Int} \complement_X A \subset \complement_X \operatorname{Int} \complement_X B$.

Ad (ii) $\overline{A \cup B} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X (A \cup B) = \complement_X \operatorname{Int} (\complement_X A \cap \complement_X B) \overset{\text{Stw. 3.5(ii)}}{=} \complement_X (\operatorname{Int} \complement_X A \cap \operatorname{Int} \complement_X B) = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X A \cup \complement_X \operatorname{Int} \complement_X B = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ad (iii) $\overline{\overline{A}} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X \overline{A} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X \complement_X \operatorname{Int} \complement_X A = \complement_X \operatorname{Int} \operatorname{Int} \complement_X A = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X A = \overline{A}$.

Ad (iv) $\overline{\varnothing} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X \varnothing = \complement_X \operatorname{Int} X = \complement_X X = \varnothing$.

Ad (v) Zachodzi równość $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, a zatem

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{(A \setminus B) \cup B} = \overline{A \setminus B} \cup \overline{B}\,.$$

Stąd wniosek, że $\overline{A} \subset \overline{A \setminus B} \cup \overline{B}$, a zatem także $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$, bowiem $\left(\overline{A} \setminus \overline{B}\right) \cap \overline{B} = \varnothing$.

□

Stwierdzenie 3.8. *Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $O, F \subset X$ zaś – dowolnymi dwoma jej podzbiorami. Wówczas*

(i) *O otwarty* $\Rightarrow \forall_{A \subset X} \, : \, \left(O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A} \quad \wedge \quad \overline{O \cap \overline{A}} = \overline{O \cap A} \right)$.

(ii) $\left(\forall_{A \subset X} \, : \, O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A} \right) \Rightarrow O$ *otwarty.*

(iii) *F domknięty* $\Rightarrow \forall_{A \subset X} \, : \, \operatorname{Int}(F \cup A) \subset F \cup \operatorname{Int} A$.

Dowód:

Ad (i) Wykażemy (równoważną) implikację

$$x \notin \overline{O \cap A} \quad \Longrightarrow \quad x \notin O \cap \overline{A}\,.$$

Wprost z definicji

$$x \notin \overline{O \cap A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{O_x \ni x \text{ otwarty}} \, : \, O_x \subset \complement_X (O \cap A)\,,$$

ale

$$O_x \subset \complement_X (O \cap A) \quad \Longleftrightarrow \quad O_x \cap O \cap A = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset \complement_X (O_x \cap O)$$

$$\overset{Stw.\,3.7(i)}{\Longleftrightarrow} \quad \overline{A} \subset \complement_X (O_x \cap O)\,,$$

przy czym ostatnia równoważność jest prawdziwa z uwagi na otwartość $O_x \cap O$, która implikuje domkniętość dopełnienia tego zbioru, $\overline{\complement_X (O_x \cap O)} = \complement_X (O_x \cap O)$, a ponadto wykorzystuje relację $A \subset \overline{A}$ mieszczącą się w treści Stwierdzenia 3.6. Zachodzi zatem dalej

$$\Longleftrightarrow \quad O_x \cap O \cap \overline{A} = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad O_x \subset \complement_X (O \cap \overline{A}) \quad \Longrightarrow \quad x \notin O \cap \overline{A}\,.$$

Należy w tym miejscu podkreślić, że ostatnią implikację można odwrócić (a więc zamienić na równoważność) wtedy tylko, gdy $O \cap \overline{A}$ jest domknięty.

Powyższy dowód można też poprowadzić bezpośrednio, z wykorzystaniem Stwierdzenia 3.7(v). Istotnie, mamy

$$O \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \complement_X \complement_X O = \overline{A} \setminus \complement_X O\,,$$

a stąd – wobec domkniętości $\complement_X O$ (będącej następstwem otwartości O) – jest, na mocy Stwierdzenia 3.7(v),

$$O \cap \overline{A} = \overline{A} \setminus \overline{\complement_X O} \subset \overline{A \setminus \complement_X O} = \overline{A \cap O}\,.$$

Drugiej części tezy dowodzimy analogicznie. Zaczynamy od

$$x \notin \overline{O \cap \overline{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists_{O_x \ni x \text{ otwarty}} \, : \, O_x \subset \complement_X (O \cap \overline{A})\,,$$

a dalej

$$
\begin{aligned}
O_x \subset \complement_X (O \cap \overline{A}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{A} \subset \complement_X (O_x \cap O) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset \complement_X (O_x \cap O) \\
&\Longleftrightarrow \quad O_x \cap O \cap A = \setminus \quad \Longleftrightarrow \quad O_x \subset \complement_X (O \cap A) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \notin \overline{O \cap A}\,,
\end{aligned}
$$

przy czym ostatnia równoważność jest prawdziwa ($\Longrightarrow$ zawsze, ale $\Longleftarrow$) z racji domkniętości $\overline{O \cap A}$.

Można też inaczej: Skoro $A \subset \overline{A}$, to także $O \cap A \subset O \cap \overline{A}$, a w takim razie $\overline{O \cap A} \subset \overline{O \cap \overline{A}}$, ale też na mocy (i) jest $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$, przeto $\overline{O \cap \overline{A}} \subset \overline{\overline{O \cap A}} = \overline{O \cap A}$, skąd $\overline{O \cap A} \subset \overline{O \cap \overline{A}} \subset \overline{O \cap A}$, więc też $\overline{O \cap \overline{A}} = \overline{O \cap A}$.

Ad (ii) Relacja $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$ zachodzi dla dowolnego podzbioru $A \subset X$, a zatem – w szczególności – także dla $A := \complement_X O$. Wtedy to $O \cap \overline{A} = O \cap \overline{\complement_X O}$, ale $\overline{\complement_X O} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X (\complement_X O) = \complement_X \operatorname{Int} O$, zatem $O \cap \overline{A} = O \cap \complement_X \operatorname{Int} O = O \setminus \operatorname{Int} O$. Z drugiej strony $O \cap A = O \cap \complement_X O = \varnothing$, dostajemy więc $\overline{O \cap A} = \overline{\varnothing} = \varnothing$, a stąd

$$
O \setminus \operatorname{Int} O \subset \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad O \setminus \operatorname{Int} O = \varnothing\,,
$$

czyli $O \subset \operatorname{Int} O (\subset O)$, co dowodzi, że $O = \operatorname{Int} O$ jest otwarty.

Ad (iii) Zastosujemy (i) do zbioru otwartego $O := \complement_X F$. Weźmy też dowolny $A = \complement_X (\complement_X A) =: \complement_X B$. Wówczas zachodzi

$$
\begin{aligned}
&\complement_X (F \cup \operatorname{Int} B) = \complement_X F \cap \complement_X \operatorname{Int} B = \complement_X F \cap \complement_X \operatorname{Int} \complement_X (\complement_X B) = \complement_X F \cap \overline{\complement_X B} \\
\subset\ &\overline{\complement_X F \cap \complement_X B} = \complement_X \operatorname{Int} \complement_X (\complement_X F \cap \complement_X B) = \complement_X \operatorname{Int} (F \cup B)\,,
\end{aligned}
$$

a zatem

$$
F \cup \operatorname{Int} B \supset \operatorname{Int} (F \cup B)\,.
$$

□

Stwierdzenie 3.9. *Niechaj* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną. Wówczas* (X, d) *zwarta* $\Leftrightarrow$ (X, d) *prezwarta i zupełna.*

Dowód:

$\Rightarrow$ Ustalmy (dowolnie) liczbę $\varepsilon > 0$ i pokryjmy X kulami otwartymi o promieniu $\frac{\varepsilon'}{2}$ dla pewnego (dowolnego) $\varepsilon' < \varepsilon$, jak następuje:

$$
X = \bigcup_{x \in X} K\left(x; \frac{\varepsilon'}{2}\right).
$$

Jako że (X, d) jest zwarta, z pokrycia $\left\{K\left(x; \frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\}_{x \in X}$ można wybrać skończone podpokrycie o pożądanej własności $\varnothing\left(K\left(x; \frac{\varepsilon'}{2}\right)\right) < \varepsilon$, co dowodzi prezwartości (X, d). Pozostaje wykazać, że (X, d) jest również zupełna. Zauważmy, że na mocy Stwierdzenia 2.3 dowolny ciąg Cauchy'ego ma punkt skupienia w X, ale też wtedy – jako ciąg Cauchy'ego – zbiega on do tegoż punktu skupienia, czyli zbiega w X, co dowodzi zupełności (X, d).

$\Leftarrow$ (A.a.) Niechaj $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie dowolnym otwartym pokryciem X i załóżmy, że nie istnieje taki *skończony* podzbiór $L \subset \Lambda$, dla którego $\{O_\lambda\}_{\lambda \in L}$ byłoby pokryciem X. Z racji prezwartości X wiadomo, że $D := \varnothing(X) < \infty$. Zdefiniujmy następujący ciąg kul otwartych $\mathbb{N} \ni n \mapsto B_n := K(x_n; r_n) \subset X$:

Zaczynamy od dowolnego $x_0 \in X$ i $r_0 = 2D$, co daje $B_0 := K(x_0; r_0) = X$. W następnym kroku pokrywamy X *skończoną* liczbą kul o promieniu $r_1 := \frac{r_0}{2^1}$, co jest możliwe z uwagi na prezwartość X. Przy tym na mocy poczynionego założenia przynajmniej jedna z kul, powiedzmy $K(x_1, r_1) =: B_1$, nie posiada skończonego pokrycia złożonego ze zbiorów otwartych O_λ (w przeciwnym razie biorąc sumę mnogościową skończonych pokryć wszystkich kul otrzymalibyśmy skończone pokrycie X). Wybrawszy w ten sposób kulę B_1, pokrywamy X skończoną liczbą kul o promieniu $r_2 := \frac{r_0}{2^2}$. I tym razem choć jedna z kul *o niepustym przecięciu z* B_1 ma tę własność, że nie pokrywa jej żadna skończona podrodzina zbiorów z $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ – kulę taką (dowolną) oznaczymy przez $B_2 = K(x_2; r_2)$. Postępując dalej w ten sposób, uzyskamy żądany ciąg kul $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o promieniach $r_n = \frac{D}{2^{n-1}}$. Jak wynika wprost z jego konstrukcji, $B_{n-1} \cap B_n \neq \varnothing$, istnieje zatem $x \in B_{n-1} \cap B_n$, co pozwala policzyć

$$d(x_{n-1}, x_n) \le d(x_{n-1}, x) + d(x, x_n) \le \frac{D}{2^{n-2}} + \frac{D}{2^{n-1}} \le \frac{D}{2^{n-3}}\,.$$

W takim razie, jeśli tylko $q > p \ge n$, to wówczas

$$d(x_p, x_q) \le d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \le \frac{D}{2^{p-2}} + \frac{D}{2^{p-1}} + \dots + \frac{D}{2^{q-3}} \le \frac{D}{2^{n-3}}\,,$$

czyli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X, zatem na mocy założenia o zupełności (X, d) zbiega w X do pewnego punktu $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Niechaj $\lambda_0 \in \Lambda$ będzie indeksem pokrycia o własności $O_{\lambda_0} \ni x$ (taki indeks istnieje, gdyż $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ jest pokryciem X), a wtedy istnieje $\rho > 0$ takie, że $K(x; \rho) \subset O_{\lambda_0}$, albowiem O_{λ_0} jest zbiorem otwartym. Jak wynika wprost z definicji x, zawsze można wybrać na tyle wysoki indeks naturalny $n \in \mathbb{N}$, żeby zapewnić spełnianie warunków

$$d(x, x_n) < \frac{\rho}{2}\,, \qquad \frac{D}{2^{n-1}} < \frac{\rho}{2}\,.$$

Istotnie, dla ustalonego ρ wystarczy znaleźć indeks graniczny N_0, powyżej którego spełniony jest pierwszy z powyższych warunków, po czym zwiększać $n \ge N_0$ aż do uzyskania nierówności drugiej. Kiedy już to nastąpi, stwierdzamy, że

$$B_n \subset K(x; \rho) \subset O_{\lambda_0}\,,$$

a to dlatego że dla dowolnego $y \in B_n = K\left(x_n; \frac{D}{2^{n-1}}\right)$ zachodzi

$$d(y, x) \le d(y, x_n) + d(x_n, x) \le \frac{D}{2^{n-1}} + \frac{\rho}{2} < 2 \cdot \frac{\rho}{2} = \rho\,.$$

Wniosek powyższy pozostaje w sprzeczności z założeniem o niemożności pokrycia kuli B_n skończoną liczbą zbiorów O_λ, $\lambda \in \Lambda$, co pokazuje fałszywość tegoż założenia.

□

Stwierdzenie 3.10. *Domknięty podzbiór zwartej przestrzeni metrycznej jest zwarty.*

Dowód: Wykorzystując równoważną charakterystykę przestrzeni zwartej z treści Stwierdzenia 3.9, pokażemy, że podzbiór domknięty F przestrzeni zwartej (X, d)

jest prezwarty i zupełny. Pierwsza z tych cech jest prostym następstwem prezwartości (X, d). Istotnie, jako skończone pokrycie zbiorami o średnicy nieprzekraczającej dowolnej (ustalonej) liczby $\varepsilon > 0$ możemy wybrać przecięcie z F takiegoż przekrycia całej przestrzeni X. Pozostaje zatem wykazać zupełność przestrzeni $(F, d|_{F\times F})$. W tym celu rozważmy dowolny ciąg Cauchy'ego w F. Z racji zupełności (X, d) ciąg ten zbiega w X, ale też jego granica jest jego punktem skupienia, ten zaś należy (z definicji) do domknięcia zbioru F, które pokrywa się z tym zbiorem wobec jego domkniętości. Ostatecznie więc ciąg zbiega w F, co stanowi o zupełności $(F, d|_{F\times F})$. □

Stwierdzenie 3.11. *Zwarty podzbiór przestrzeni metrycznej jest domknięty.*

Dowód: Rozważmy dowolny punkt skupienia x zwartego podzbioru $K \subset X$ przestrzeni metrycznej (X, d). Wprost z definicji z x można stowarzyszyć ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dowolnie wybranych) punktów $x_n \in K_n$ z przecięć $K_n := K(x; \frac{1}{2^n}) \cap K$ kul otwartych $K(x; \frac{1}{2^n})$ ze zbiorem K (wszystkie te przecięcia są niepuste, gdyż x jest punktem skupienia zbioru K). Jak łatwo widać, jest to ciąg Cauchy'ego, dla którego x jest punktem skupienia, a zatem – wobec zupełności przestrzeni $(K, d|_{K\times K})$ wynikającej z jej zwartości – także granicą *w* K. W takim razie K zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, co oznacza, że $\overline{K} = K$, czyli też jest domknięty. □

Stwierdzenie 3.12 (Lemat o Liczbie Lebesgue'a)**.** *Niechaj (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną, $O_\Lambda := \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ zaś – jej dowolnym otwartym pokryciem. Wówczas*

$$\exists_{\delta(O_\Lambda)>0} \;:\; \forall_{x\in X} \;:\; \forall_{K(x;\delta(O_\Lambda))} \;:\; \exists_{\lambda\in\Lambda} \;:\; K\left(x; \delta(O_\Lambda)\right) \subset O_\lambda\,.$$

Każdą taką liczbę $\delta(O_\Lambda)$ stowarzyszoną z pokryciem O_Λ nazywamy **liczbą Lebesgue'a pokrycia** O_Λ.

Dowód: Wobec otwartości O_λ (*pokrywających* X) zachodzi

$$\forall_{x\in X} \;:\; \exists_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ r_x>0}} \;:\; K(x; r_x) \subset O_\lambda\,.$$

Przy tym rodzina kul $\left\{K\left(x; \frac{r_x}{2}\right)\right\}_{x\in X}$ stanowi otwarte pokrycie X, z którego można – z racji zwartości (X, d) – wybrać skończone podpokrycie $\left\{K\left(x_i; \frac{r_{x_i}}{2}\right)\right\}_{i\in\overline{1,N}}$. Oznaczmy

$$\delta(O_\Lambda) := \min_{i\in\overline{1,N}} \left\{\frac{r_{x_i}}{2}\right\}.$$

Jest to liczba (dobrze określona, bo $N < \infty$) dodatnia o własności

$$x \in K\left(x_i; \frac{r_{x_i}}{2}\right) \qquad\Longrightarrow\qquad K\left(x; \delta(O_\Lambda)\right) \subset K(x_i; r_{x_i})\,.$$

Istotnie, niechaj $y \in K\left(x; \delta(O_\Lambda)\right)$, a wtedy $d(y, x) \le \delta(O_\Lambda)$, co daje

$$d(y, x_i) \le d(y, x) + d(x, x_i) \le \delta(O_\Lambda) + \frac{r_{x_i}}{2} \le 2 \cdot \frac{r_{x_i}}{2} = r_{x_i}\,.$$

Skoro zaś $\left\{K\left(x_i; \frac{r_{x_i}}{2}\right)\right\}_{i\in\overline{1,N}}$ jest pokryciem, to każdemu $x \in X$ można przyporządkować właściwy indeks $i \in \overline{1,N}$. Z drugiej jednak strony wprost z konstrukcji wynika, że

$$\forall_{i\in\overline{1,N}} \;:\; \exists_{\lambda_i\in\Lambda} \;:\; K(x_i; r_{x_i}) \subset O_{\lambda_i}\,,$$

co pokazuje, że $\delta(O_\Lambda)$ jest liczbą Lebesgue'a pokrycia O_Λ. □

Stwierdzenie 3.13. *Dowolna izometria zwartej przestrzeni metrycznej jest ciągłą bijekcją.*

Dowód: Zauważmy najpierw, że każda izometria $\varphi : X \to X$ przestrzeni metrycznej (X, d) jest injekcją. Istotnie, niech $\varphi(x') = \varphi(x)$ dla $x, x' \in X$, a wtedy wobec niezwyrodnienia metryki dostajemy

$$d(x', x) = d(\varphi(x'), \varphi(x)) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x' = x\,.$$

Dowód surjektywności φ w przypadku zwartej dziedziny przeprowadzimy metodą sprowadzenia do niedorzeczności. Załóżmy przeto, że $X \setminus \varphi(X) \neq \emptyset$, czyli też $\exists\, x_0 \in X \setminus \varphi(X)$. Na mocy Stwierdzenia 2.4 $\varphi(X) \subset X$ jest zwarty, a to w świetle Stwierdzenia 3.11 przesądza o domkniętości $\varphi(X)$. Wynika stąd, iż liczba

$$\varepsilon := \inf_{x \in \varphi(X)} \{d(x_0, x)\}$$

jest *dodatnia*, gdyż w przeciwnym razie

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \;:\; \exists_{p_n \in \varphi(X)} \;:\; d(x_0, p_n) < \frac{1}{n+1}\,,$$

a wtedy $x_0 = \lim_{n\to\infty} p_n$ (z racji zupełności (X, d) implikowanej przez jej zwartość), co jednak kłóci się z założeniem $x_0 \notin \varphi(X)$, jako że wymaga, iżby x_0 był punktem skupienia ciągu $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tj. punktem skupienia zbioru $\varphi(X)$, a ten ostatni zawiera wszystkie swoje punkty skupienia jako zbiór domknięty.

Oznaczmy

$$x_n := \varphi^n(x_0)\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*\,,$$

a wtedy $d(x_0, x_n) \geq \varepsilon$, gdyż $x_n \in \varphi(X)$. W takim razie

$$\forall_{n>m\geq 1} \;:\; d(x_m, x_n) = d(\varphi^m(x_0), \varphi^m(x_{n-m})) = d(x_0, x_{n-m}) \geq \varepsilon\,,$$

co oznacza, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nie zawiera podciągu zbieżnego, to zaś jest sprzeczne z założeniem o zwartości $\varphi(X)$. □

Stwierdzenie 3.14. *Niechaj (X, d_X) będzie zwartą przestrzenią metryczną, (Y, d_Y) zaś – przestrzenią metryczną. Wówczas dowolna ciągła injekcja $f : X \rightarrowtail Y$ jest homeomorfizmem $X \twoheadrightarrow f(X)$.*

Dowód: Po pierwsze należy zauważyć, że każda injekcja jest bijekcją na obraz, czyli $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow f(X)$ oraz istnieje $f^{-1} : f(X) \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow X$. Wiemy też, że f jest ciągła, pozostaje zatem pokazać, że także f^{-1} jest ciągła, a na to potrzeba i wystarcza, iżby zbiór $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) \equiv f(F)$ był domknięty w $f(X)$ dla dowolnego domkniętego podzbioru $F \subset X$. Ale F jest – na mocy Stwierdzenia 3.10 – zwarty, co pociąga za sobą zwartość jego obrazu w świetle Stwierdzenia 2.4. Przywołując na koniec Stwierdzenie 3.11, wnioskujemy na tej podstawie, że $\varphi(F)$ jest w istocie domknięty. □

Stwierdzenie 3.15 (Twierdzenie o Ciągłości Jednostajnej)**.** *Niechaj (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, przy czym (X, d_X) jest zwarta. Dowolne ciągłe odwzorowanie $f : X \to Y$ jest jednostajnie ciągłe.*

Dowód: Ustalmy (dowolnie) liczbę $\varepsilon > 0$, a następnie pokryjmy Y kulami otwartymi $K\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $y \in Y$. Ich (ciągłe) przeciwobrazy $f^{-1}\left(K\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) =: O_y^\varepsilon$ są otwarte i pokrywają X (w przeciwnym razie istniałby punkt $x \in X$ o własności $f(x) \notin \bigcup_{y\in Y} K\left(y; \frac{\varepsilon}{2}\right) = Y$, co jest niedorzecznością), dostajemy zatem tym sposobem otwarte pokrycie $O_X := \{O_y^\varepsilon\}_{y\in Y}$. Wybierzmy dowolną liczbę Lebesgue'a

$\delta(O_X)$ dla O_X. Ilekroć punkty $x_1, x_2 \in X$ dziedziny odwzorowania f spełniają warunek $d_X(x_1, x_2) < \delta(O_X)$, istnieje – na mocy Stwierdzenia 3.12 – punkt $y \in Y$ w przeciwdziedzinie taki, że $x_1, x_2 \in O_y^\varepsilon$, a zatem

$$d_Y\left(f(x_1), f(x_2)\right) \le d_Y\left(f(x_1), y\right) + d_Y\left(y, f(x_2)\right) \le 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Oto więc (dowolna) liczba Lebesgue'a spełnia założenia globalnie zadanej (dla danego $\varepsilon > 0$) stałej δ_ε z Definicji 1.25. □

Stwierdzenie 3.16. *Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas równoważne są poniższe zdania:*

(i) (X, d) *jest spójna.*

(ii) *Nie istnieją dwa takie niepuste wzajem rozgraniczone podzbiory $A, B \subset X$, które spełniałyby warunek*

$$A \cup B = X\,. \tag{3.1}$$

Dowód:

$\neg$(i) $\Longrightarrow$ $\neg$(ii) Załóżmy, że istnieją dwa niepuste otwarte podzbiory $A, B \subset X$ o własnościach

$$A \cup B = X\,, \qquad A \cap B = \varnothing\,.$$

Druga z relacji implikuje $B \subset \complement_X A$, skąd

$$\complement_X A = \complement_X A \cap (A \cup B) = (\complement_X A \cap A) \cup (\complement_X A \cap B) = \varnothing \cup (\complement_X A \cap B) = \complement_X A \cap B = B\,,$$

czyli B domknięty (jako dopełnienie otwartego A). Analogicznie pokazujemy, że także A domknięty. Ale w takim razie $\overline{A} = A$ i $\overline{B} = B$, a zatem

$$\overline{A} \cap B = A \cap B = \varnothing = B \cap A = \overline{B} \cap A\,,$$

tj. A, B stanowią parę niepustych (otwartych) wzajem rozgraniczonych podzbiorów X o własności (3.1).

$\neg$(ii) $\Longrightarrow$ $\neg$(i) Niechaj teraz $A, B \subset X$ będą dwoma niepustymi wzajem rozgraniczonymi podzbiorami X o własności (3.1). Wówczas na mocy Stwierdzenia 3.6

$$\overline{A} = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A$$

i analogicznie pokazujemy, że także $\overline{B} = B$, zatem oba zbiory są domknięte. W takim jednak razie argument z poprzedniej części dowodu przekonuje nas, iż $\complement_X A = B$ oraz $\complement_X B = A$ i – co za tym idzie –

$$\overline{\complement_X A} = \overline{B} = B = \complement_X A\,, \qquad \overline{\complement_X B} = \complement_X B\,.$$

Na tej podstawie liczymy

$$A \setminus \operatorname{Int} A \;=\; A \cap \complement_X \operatorname{Int} A = A \cap \complement_X \operatorname{Int} \complement_X (\complement_X A) = A \cap \overline{\complement_X A} = A \cap \complement_X A = A \setminus A = \varnothing\,,$$

$$B \setminus \operatorname{Int} B \;=\; \varnothing\,,$$

a stąd wniosek, że $A \subset \operatorname{Int} A$ i $B \subset \operatorname{Int} B$. Ale też – jak pokazuje dowód Stwierdzenia 3.4 – zawsze zachodzą relacje odwrotne, przeto ostatecznie $A = \operatorname{Int} A$ i $B = \operatorname{Int} B$, tj. – w szczególności – zarówno A jak i B są otwarte, a nadto spełniają (pozostałe) warunki Definicji 1.23.

□

Stwierdzenie 3.17. *Niechaj (X, d) będzie przestrzenią metryczną, S, S_1 i S_2 zaś – jej spójnymi podzbiorami. Wówczas prawdziwe są następujące zdania:*

(i) $S \subset A \subset \overline{S} \Rightarrow A$ *spójny.*
(ii) $A_1, A_2 \subset X$ *rozgraniczone* $\Rightarrow (\ S \subset A_1 \cup A_2 \quad \Rightarrow \quad (\ S \subset A_1 \quad \vee \quad S \subset A_2\ )\ )$.
(iii) S_1, S_2 *nie są wzajem rozgraniczone* $\Rightarrow S_1 \cup S_2$ *spójny.*

Dowód:

Ad (i) (A.a.) Załóżmy, że istnieją dwa niepuste podzbiory $B, C \subset A$ otwarte w A o własnościach

$$B \cup C = A\,, \qquad\qquad B \cap C = \varnothing\,.$$

Wykorzystamy to, że S jest gęsty w A, aby stwierdzić, co następuje:

$$S \cap B \neq \varnothing\,, \qquad\qquad S \cap C \neq \varnothing$$

(w przeciwnym razie punkty z otwartego B wzgl. C miałyby otwarte otoczenia (zawarte w B wzgl. C) nieprzecinające się z S, co przeczyłoby temu, że S jest gęsty w A), zauważając dodatkowo, że oba te niepuste przecięcia są otwarte w S w konsekwencji otwartości B i C w A (patrz: Stwierdzenie 3.3). Zachodzą przy tym relacje

$$(S \cap B) \cup (S \cap C) \;=\; S \cap (B \cup C) = S \cap A = S\,,$$

$$(S \cap B) \cap (S \cap C) \;=\; S \cap (B \cap C) = S \cap \varnothing = \varnothing\,,$$

jawnie sprzeczne z założeniem o spójności S.

Ad (ii) Zdefiniujmy

$$S_i := S \cap A_i\,, \qquad i \in \{1, 2\}\,.$$

Zachodzi $S_1 \cup S_2 = S \cap (A_1 \cup A_2) = S$, ale zbiory $S_i \subset A_i$ są rozgraniczone jako podzbiory zbiorów rozgraniczonych (bowiem na mocy Stwierdzenia 3.7(i) $\overline{S_i} \subset \overline{A_i}$, a stąd $\varnothing \subset \overline{S_1} \cap S_2 \subset \overline{A_1} \cap A_2 = \varnothing$ i podobnie $\varnothing \subset \overline{S_2} \cap S_1 \subset \varnothing$), więc koniecznie $S_1 = \varnothing$ lub $S_2 = \varnothing$, bo w przeciwnym razie S byłby niespójny, przeciwnie do naszego założenia. Niech zatem, np., $S_1 = \varnothing$, a wtedy

$$S = S_2 \cup S_1 = S_2 \cup \varnothing = S_2 = S \cap A_2\,,$$

czyli $S \subset A_2$. Analogicznie pokazujemy, że $S \subset A_1$, ilekroć $S_2 = \varnothing$.

Ad (iii) (A.a.) Załóżmy, że zbiór $S_1 \cup S_2$ jest niespójny, tj. istnieją takie niepuste i wzajem rozgraniczone jego podzbiory otwarte A_1, A_2, które spełniają warunek $A_1 \cup A_2 = S_1 \cup S_2$. Wobec $S_1 \subset S_1 \cup S_2 = A_1 \cup A_2$ musi zachodzić (na mocy (ii))

$$S_1 \subset A_1 \qquad \vee \qquad S_1 \subset A_2\,,$$

a ponadto (z tej samej przyczyny)

$$S_2 \subset A_1 \qquad \vee \qquad S_2 \subset A_2\,.$$

Jeśli $S_1 \subset A_1 \ \wedge\ S_2 \subset A_2$ lub też $S_2 \subset A_1 \ \wedge\ S_1 \subset A_2$, to S_1 i S_2 są wzajem rozgraniczone jako podzbiory zbiorów wzajem rozgraniczonych, a to przeczy poczynionemu założeniu. Musi zatem zachodzić

$$S_1, S_2 \subset A_1 \qquad \vee \qquad S_1, S_2 \subset A_2\,.$$

Załóżmy, że spełniona jest pierwsza z relacji. Wówczas

$$A_1 \cup A_2 = S_1 \cup S_2 \subset A_1 \cup A_1 = A_1\,,$$

a zatem $A_2 \subset A_1$, więc też – na mocy Stwierdzenia 3.7(i) – $\overline{A}_2 \subset \overline{A}_1$, czyli koniecznie $A_2 = \emptyset$, gdyż

$$\emptyset \subset A_2 = \overline{A}_2 \cap A_1 \subset \overline{A}_1 \cap A_2 = \emptyset\,.$$

To jednak jest sprzeczne z naszym założeniem odnośnie do A_1 i A_2. Analogiczny wynik uzyskujemy, przyjąwszy, że zachodzi druga z relacji.

□

Warszawa, 26. grudnia 2011 r.

Adres: Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Hoża 74, PL-00-682 Warszawa, Poland

Adres mejlowy: suszek@fuw.edu.pl