REKURENCJE
(DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO, I DO SPRAWDZENIA)

$R\int R$

ABSTRACT. Notatki do ćwiczeń z Algebry I.

Rozważmy jednorodną rekurencję

$$x_n = \sum_{i=1}^{d} a_i \, x_{n-i} \tag{0.1}$$

o stałych (tj. niezależnych od indeksu n) współczynnikach a_i, $i \in \overline{1,d}$. W celu jej rozwiązania wprowadzamy **funkcję tworzącą**, tj. *formalny* szereg potęgowy

$$G \; : \; \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C} \; : \; \lambda \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, \lambda^{-n} \equiv G(\lambda) \, .$$

Przemnożywszy obie strony (0.1) przez $\lambda^{-(n-d)}$ i dokonawszy resumacji w zakresie $n \in \overline{d,\infty}$, dostajemy wynik

$$\lambda^d \left[G(\lambda) - \sum_{m=0}^{d-1} x_m \, \lambda^{-m} \right] = \sum_{i=1}^{d} a_i \, \lambda^{d-i} \left[G(\lambda) - \sum_{m=0}^{d-i-1} x_m \, \lambda^{-m} \right] ,$$

przy czym należy rozumieć, że ostatni wyraz sumy po prawej stronie powyższej równości ma postać $a_d \, G(\lambda)$. Grupując wyrazy zawierające $G(\lambda)$, wyznaczamy stąd funkcję tworzącą

$$G(\lambda) = -\frac{\sum_{j=0}^{d-1} b_j \, \lambda^{d-j}}{\sum_{i=1}^{d} a_i \, \lambda^{d-i} - \lambda^d} \equiv \frac{\sum_{j=0}^{d-1} b_j \, \lambda^{-j}}{\chi_d\big(\lambda^{-1}\big)} \, ,$$

gdzie

$$b_0 = x_0 \, , \qquad\qquad b_j = x_j - \sum_{k=1}^{j} a_k \, x_{j-k} \, ,$$

wprowadzony zaś tutaj wielomian $\chi_d \in \mathbb{C}_d[\cdot]$ o wartościach

$$\chi_d(t) \coloneqq 1 - \sum_{i=1}^{d} a_i \, t^k$$

nosi miano **wielomianu charakterystycznego** rekurencji (0.1). Z uwagi na domkniętość algebraiczną ciała liczb zespolonych wielomian ten możemy przedstawić w postaci

$$\chi_d(t) = -a_d \prod_{l=1}^{P} (t - \lambda_l)^{K_l} \, ,$$

przy czym λ_l, $l \in \overline{1,P}$ są *parami różnymi* pierwiastkami (zespolonymi) χ_d o krotnościach równych, odpowiednio, K_l. Te ostatnie spełniajca tożsamość

$$\sum_{l=1}^{P} K_l = d \, .$$

Po przepisaniu w terminach nowych współczynników $\widetilde{b}_j := -\frac{b_j}{a_d}$ funkcja tworząca przyjmuje zatem postać

$$G(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{b}_j\, \lambda^{-j}}{\prod_{l=1}^{P} \left(\lambda^{-1} - \lambda_l\right)^{K_l}} =: \frac{B_{d-1}\left(\lambda^{-1}\right)}{\prod_{l=1}^{P} \left(\lambda^{-1} - \lambda_l\right)^{K_l}} .$$

Dokonując rozkładu iloczynu $\frac{1}{\prod_{l=1}^{P} (\lambda^{-1}-\lambda_l)^{K_l}}$ na ułamki proste, a następnie wykorzystując wzór $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (dla $|x| < 1$) możemy przepisać powyższą formułę, jak następuje:

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= B_{d-1}\left(\lambda^{-1}\right) \sum_{l=1}^{P} \frac{P_{d_l}^{l}\left(\lambda^{-1}\right)}{\left(\lambda^{-1} - \lambda_l\right)^{K_l}} = \sum_{l=1}^{P} (-1)^{K_l}\, B_{d-1}\left(\lambda^{-1}\right) P_{d_l}^{l}\left(\lambda^{-1}\right) \lambda_l^{-K_l} \left(\frac{1}{1 - (\lambda_l\, \lambda)^{-1}}\right)^{K_l} \\ &= \sum_{l=1}^{P} \widetilde{P}_{\widetilde{d}_l}^{l}\left(\lambda^{-1}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_l\, \lambda)^{-n}\right)^{K_l} \end{aligned}$$

dla pewnych wielomianów $P_{d_l}^{l} \in \mathbb{C}_{d_l}[\cdot]$ stopnia $d_l < K_l$ oraz wielomianów $\widetilde{P}_{\widetilde{d}_l}^{l} \in \mathbb{C}_{\widetilde{d}_l}[\cdot]$ stopnia $\widetilde{d}_l < d + K_l - 1$. Zachodzi oczywista tożsamość

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_l\, \lambda)^{-n}\right)^{K_l} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi\binom{n}{K_l} (\lambda_l\, \lambda)^{-n} ,$$

gdzie $\Pi\binom{n}{K_l}$ jest liczbą wszystkich K_l-składnikowych partycji liczby n, tj. mocą podzbioru $\left(\overline{0,n}\right)^{K_l}$ złożonego z elementów $(m_1, m_2, \ldots, m_{K_l})$ o własności

$$\sum_{p=1}^{K_l} m_k = n .$$

Łatwo się przekonać, że $\Pi\binom{n}{K_l}$ jest wielomianem stopnia $K_l - 1$ zmiennej n o współczynnikach wymiernych. Istotnie, dla kilku pierwszych wartości K_l otrzymujemy

$$\Pi\binom{n}{1} = 1 , \qquad \Pi\binom{n}{2} = \left|\{\ (m, n-m) \quad | \quad m \in \overline{0,n}\ \}\right| = n + 1 ,$$

$$\Pi\binom{n}{3} = \left|\{\ (m_1, m_2, n - m_1 - m_2) \quad | \quad m_1 \in \overline{0,n} \quad \wedge \quad m_2 \in \overline{0, n - m_1}\ \}\right| = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} .$$

Załóżmy dalej, że jest $\Pi\binom{n}{K_l - 1} = \pi_{K_l-2}(n)$ dla pewnego $\pi_{K_l-2} \in \mathbb{Q}_{K_l-2}[\cdot]$ danego wzorem

$$\pi_{K_l-2}(t) = \sum_{l=0}^{K_l-2} \alpha_l\, t^l , \qquad \alpha_l \in \mathbb{Q} , \quad l \in \overline{0, K_l - 2} .$$

Wówczas dostajemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_l\, \lambda)^{-n}\right)^{K_l} &\equiv \left(\sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_l\, \lambda)^{-m}\right)^{K_l-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_l\, \lambda)^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_{K_l-2}(m)\, (\lambda_l\, \lambda)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_l\, \lambda)^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \pi_{K_l-2}(m)\right) (\lambda_l\, \lambda)^{-n} , \end{aligned}$$

a zatem

$$\Pi\binom{n}{K_l} = \sum_{m=0}^{n} \pi_{K_l-2}(m) = \sum_{l=0}^{K_l-2} \alpha_l \sum_{m=0}^{n} m^l .$$

Suma ostatniego szeregu po prawej stronie powyższej równości jest wielomianem stopnia $l+1$ zmiennej n o współczynnikach wymiernych, skąd ostatecznie wynika postawiona teza,

$$\Pi\binom{n}{K_l} = \pi_{K_l-1}(n)\,.$$

W konsekwencji możemy przepisać funkcję tworzącą w postaci

$$G(\lambda) = \sum_{l=1}^{P} \widetilde{P}^l_{\widetilde{d}_l}\left(\lambda^{-1}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{K_l-1}(n)\,(\lambda_l\,\lambda)^{-n}\,.$$

Zapiszmy

$$\widetilde{P}^l_{\widetilde{d}_l}(t) = \sum_{m=0}^{d+K_l-2} \beta^l_m\, t^m\,,$$

a wtedy

$$G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{P}\sum_{m=0}^{d+K_l-2} \beta^l_m\,\pi_{K_l-1}(n)\,\lambda^{-m-n}\,\lambda_l^{-n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{P}\sum_{m=0}^{d+K_l-2} \widetilde{\beta}^l_m\,\pi_{K_l-1}(n)\,\lambda^{-m-n}\,\lambda_l^{-m-n}\,,$$

zatem wprost z definicji funkcji tworzącej otrzymujemy wynik

$$x_n = \sum_{l=1}^{P} w_{K_l-1}(n)\,\lambda_l^{-n}$$

dla pewnych wielomianów $w_{K_l-1} \in \mathbb{C}_{K_l-1}[\cdot]$. Innymi słowy, ogólny wyraz x_n rekurencji (0.1) jest $\mathbb{C}$-liniową kombinacją wyrażeń

$$\lambda_1^{-n}\,,\; n\,\lambda_1^{-n}\,,\;\ldots\,,\; n^{K_1-1}\,\lambda_2^{-n}\,,\;\lambda_2^{-n}\,,\; n\,\lambda_2^{-n}\,,\;\ldots\,,\; n^{K_2-1}\,\lambda_2^{-n}\,,\;\ldots\,,\;\lambda_P^{-n}\,,\; n\,\lambda_P^{-n}\,,\;\ldots\,,\; n^{K_P-1}\,\lambda_P^{-n}\,.$$

Współczynniki tej kombinacji (w liczbie $\sum_{l=1}^{P} K_l = d$) są wyznaczane przez dane zadające rekurencję, tj. $\{x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}\}$.

Powyższe rozważania ogólne zilstrujemy teraz na dwóch prostych przykładach, szczególnie przydatnych w kontekście obliczeń wyznaczników macierzy trójpasmowej.

Rozważmy prostą rekurencję

$$x_{n+2} = \alpha\,x_{n+1} + \beta\,x_n\,,\qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}^\times\,.$$

Funkcja tworząca tej rekurencji ma postać

$$G(\lambda) = \frac{x_0 + (x_1 - \alpha\,x_0)\,\lambda^{-1}}{\chi_2\left(\lambda^{-1}\right)}\,,$$

przy czym wielomian charakterystyczny to

$$\chi_2(t) = 1 - \alpha\,t - \beta\,t^2\,.$$

Rozpatrzymy oddzielnie dwa przypadki: $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$ oraz $\alpha^2 + 4\beta = 0$.

1) Jeśli $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$, to wówczas funkcję tworzącą możemy przepisać jako

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \frac{x_0 + (x_1 - \alpha\,x_0)\,\lambda^{-1}}{\beta\,(\lambda_2 - \lambda_1)}\left(\frac{1}{\lambda^{-1} - \lambda_1} - \frac{1}{\lambda^{-1} - \lambda_2}\right) \\ &= \frac{x_0 + (x_1 - \alpha\,x_0)\,\lambda^{-1}}{\beta\,(\lambda_2 - \lambda_1)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda_2^{-n-1} - \lambda_1^{-n-1}\right)\lambda^{-n} \end{aligned}$$

w terminach pierwiastków $\lambda_1 \neq \lambda_2$ wielomianu charakterystycznego. Ostatecznie rozwiązaniem rekurencji jest

$$x_n = c_1\,\lambda_1^{-n} + c_2\,\lambda_2^{-n}\,,$$

gdzie

$$c_k = (-1)^k \cdot \frac{x_0\,\lambda_k^{-1} + x_1 - \alpha\,x_0}{\beta\,(\lambda_2 - \lambda_1)}\,, \qquad k \in \{1,2\}\,.$$

2) Jeśli $\alpha^2 + 4\beta = 0$, to wtedy

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= -\frac{x_0 + (x_1 - \alpha\,x_0)\,\lambda^{-1}}{\beta}\,\frac{1}{(\lambda^{-1} - \lambda_1)} = -\frac{x_0 + (x_1 - \alpha\,x_0)\,\lambda^{-1}}{\beta\,\lambda_1^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^{-n}\,\lambda^{-n}\right)^2 \\ &= -\frac{x_0 + (x_1 - \alpha\,x_0)\,\lambda^{-1}}{\beta\,\lambda_1^2}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\lambda_1^{-n}\,\lambda^{-n}\,, \end{aligned}$$

przy czym $\lambda_1 \in \mathbb{R}^\times$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Rozwiązenie rekurencji to tutaj

$$x_n = (c_1 + c_2\,n)\,\lambda^{-n}\,,$$

gdzie

$$c_1 = -\frac{x_0}{\beta\,\lambda_1^2}\,, \qquad\qquad c_2 = -\frac{x_0 + (x_1 - \alpha\,x_0)\,\lambda_1}{\beta\,\lambda_1^2}\,.$$

Warszawa, 28. lutego 2011 r.

Adres: Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Hoża 74, PL-00-682 Warszawa, Poland

E-mail address: `suszek@fuw.edu.pl`