

GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA TORSY: KRZYWIZNY POWIĄZANIA

(NOTATKI DO ĆWICZEŃ DO WYKŁADU
Z GEOMETRII RÓŻNICZKOWEJ 2024/25)

[22]

Rozważmy rozmaitość M , w której stycznej TM ①
wybrano powiązanie o współczynnikach Christoffela Γ .
Będą nas interesować dwa zagadnienia początkowe:

(1) ZAGADNIENIE GEODEZYJNE:

$$\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \quad : \quad \ddot{\gamma} = -\Gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \quad \gamma(0) = x \\ \dot{\gamma}(0) = v$$

(2) ZAGADNIENIE TRANSPORTU RÓWNOLEGŁEGO
WZDŁUŻ GEODEZYJNEJ:

$$w:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow TM|_{\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[)} \quad : \quad \dot{w} = -\Gamma(\dot{\gamma}, w), \quad w(0) = w$$

NA POZĄTKU ZBADAMY DOMYKALNOŚĆ PĘTLI GEODEZYJNEJ ②
W PRZYBLIŻENIU KWADRATOWYM W PARAMETRZE EWOLUCJI.

ROZWAJAMY ZATEM NASTĘPUJĄCY PROBLEM

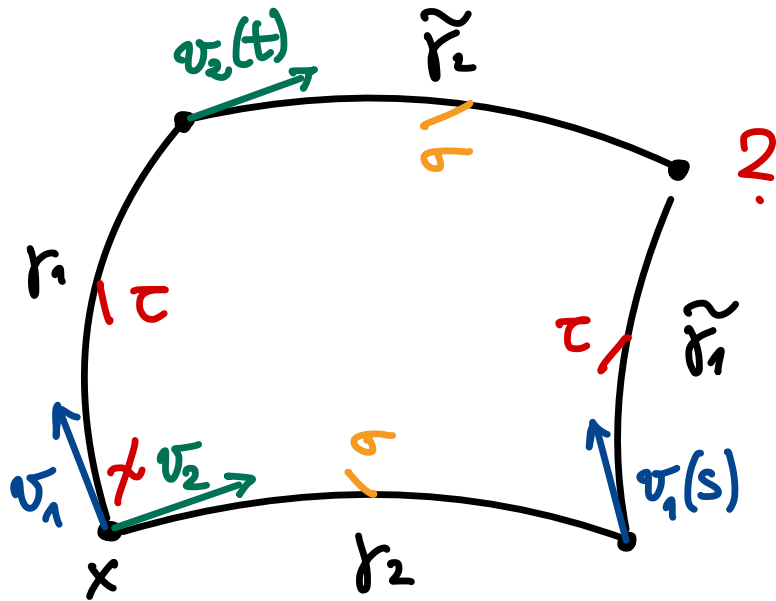
WARUNEK POZĄTKOWY

$$\tilde{\gamma}_2 : \gamma_1(t), \bar{\gamma}_2(t)$$

↑ WYEWOLUOWANY
z $\sigma_2 \equiv \tilde{\gamma}_2(0)$

$$\tilde{\gamma}_1 : \gamma_2(s), \bar{\gamma}_1(s)$$

↑ WYEWOLUOWANY
z $\sigma_1 \equiv \tilde{\gamma}_1(0)$



$$\tau \in [0, t], \quad t < \varepsilon \approx 0$$

$$\sigma \in [0, s], \quad s < \varepsilon \approx 0$$

ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE 3.4. (1):

③

$$(\dot{\gamma})(z) = -\Gamma_{\gamma}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(z) = -\Gamma_{\gamma(0)}(v, v) + O(\tau)$$

$$\Gamma_{\gamma(0)} \equiv \Gamma(O_3 N.)$$

$$\Downarrow$$
$$\dot{\gamma}(z) = v - \tau \Gamma(v, v) + O(\tau^2)$$

$$\Downarrow$$
$$\gamma(z) = x + \tau v - \frac{1}{2} \tau^2 \Gamma(v, v) + O(\tau^3)$$

(w lokalnej reprezentacji współrzędnicowej)

④

W 1. RZĘDZIE :

$$\tilde{w}(z) = w - \tau \Gamma(v, w) + O(z^2), \text{ co uwzględniamy } w$$

$$\vec{w}(z) \equiv w - \int_0^z d\xi \Gamma_r(\xi) (\vec{v}(\xi), \vec{w}(\xi))$$

$$= w - \int_0^\tau d\xi \left(\Gamma + (\gamma(\xi) - x)^i \partial_i \Gamma \right) (\nu - \xi \Gamma(\nu, \nu), w - \xi \Gamma(\nu, w))$$

$\nwarrow \xi=0$ $\nwarrow w \xi=0$
 $\uparrow$ oblique na

$\Gamma: \varphi_{ijk}$ $\tilde{w}(\tau; w)$
 III

$$= \kappa - \tau \Gamma(v, \kappa) - \frac{1}{2} \tau^2 (\partial_i \Gamma_{jk} - \Gamma_{ik} \Gamma_{jk}^l) v^i v^j \kappa^k + \frac{1}{2} \tau^2 \Gamma(\Gamma(v, v), \kappa) + O(\tau^3)$$

(5)

BEST ZATEM

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = x + t v_1 - \frac{1}{2} t^2 \Gamma(v_1, v_1) + O(t^3) \\ \tilde{v}_2(t) = v_2 - t \Gamma(v_1, v_2) + O(t^2) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\gamma}_2(s) = \gamma_1(t) + s v_2(t) - \frac{1}{2} s^2 \Gamma(v_2, v_2) + O(s^k t^{3-k}) \stackrel{\tau=0}{\Leftarrow} \stackrel{\Delta}{=} \Delta_{\text{ogn.}}$$

$$= x + t v_1 - \frac{1}{2} t^2 \Gamma(v_1, v_1) + s v_2 - s t \Gamma(v_1, v_2) - \frac{1}{2} s^2 \Gamma(v_2, v_2) + \Delta$$

$$| \text{ANALOGICZNIK} : \quad \begin{cases} \gamma_2(s) = x + s v_2 - \frac{1}{2} s^2 \Gamma(v_2, v_2) + O(s^3) \\ \tilde{v}_1(s) = v_1 - s \Gamma(v_2, v_1) + O(s^2) \end{cases}$$

$$(s, t, 1, 2) \rightarrow (t, s, 2, 1)$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} \tilde{v}_1(s) = v_1 - s \Gamma(v_2, v_1) + O(s^2) \end{cases}$$

$$\tilde{\gamma}_1(t) = x + s v_2 - \frac{1}{2} s^2 \Gamma(v_2, v_2) + t v_1 - t s \Gamma(v_2, v_1) - \frac{1}{2} t^2 \Gamma(v_1, v_1) + \Delta$$

NA OBECNYM ETAPIE STWIERDZAMY :

⑥

$$\tilde{\gamma}_2(s) - \tilde{\gamma}_1(t) = st \left(\Gamma(v_2, v_1) - \Gamma(v_1, v_2) \right) + \Delta$$

EFEKT II RZĘDU

(DE FACTO SYLIZNOŚCIOWY,
BO BIORĄCY SIĘ Z NIESYM.
PRZYRÓSTÓW v_1 I v_2)

: NIEDOMYKANIE SIĘ
PĘTLI GEODEZYJNEJ,
KTÓREGO ŹRÓDŁEM JEST
TORSJA.

W NASTĘPNEJ KOLEJNOŚCI PRZESLEDZIMY TRANSPORT
WEKTORA WZDŁUŻ OBU „PÓŁPĘTLI” GEODEZYJNYCH...

NAJPIERW EWOLUCYJENY W z x DO $\gamma_1(t)$ WZDUŻ γ_1 (7)
 i DALEJ Z $\gamma_1(t)$ DO $\tilde{\gamma}_2(s)$ WZDUŻ $\tilde{\gamma}_2$:

$$\begin{aligned}\tilde{w}(s; \tilde{w}(t; w)) &= \tilde{w}(t; w) - s \Gamma_{\gamma_1(t)}(\tilde{v}_2(t), \tilde{w}(t; w)) \\ &\quad + \frac{1}{2} s^2 \Gamma_{\gamma_1(t)}(\Gamma_{\gamma_1(t)}(\tilde{v}_2(t), \tilde{v}_2(t)), \tilde{w}(t; w)) \\ &\quad - \frac{1}{2} s^2 \rho_{\gamma_1(t)}(\tilde{v}_2(t), \tilde{v}_2(t), \tilde{w}(t; w)) + \Delta \\ &= w - t \Gamma(v_1, w) + \frac{1}{2} t^2 \Gamma(\Gamma(v_1, v_1), w) - \frac{1}{2} t^2 \rho_2'''(v_1, v_1, w) \\ &\quad - s \Gamma(v_2, w) - s t v_1^i \partial_i \Gamma(v_2, w) + s t \Gamma(\Gamma(v_1, v_2), w) + s t \Gamma(v_2, \Gamma(v_1, w)) \\ &\quad + \frac{1}{2} s^2 \Gamma(\Gamma(v_2, v_2), w) - \frac{1}{2} s^2 \rho(v_2, v_2, w) + \Delta\end{aligned}$$

NASTĘPNIE PROWADZIMY EWOLUCJĘ W $z \times$ DO $\gamma_2(s)$ WZDŁUG γ_2 (2)
 i DALEJ Z $\gamma_2(s)$ DO $\tilde{\gamma}_1(t)$ WZDŁUG $\tilde{\gamma}_1$: $(1, 2, s, t) \mapsto (2, 1, t, s)$

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(t; \tilde{w}(s; w)) &= w - s \Gamma(v_2, w) + \frac{1}{2} s^2 \Gamma(\Gamma(v_2, v_2), w) - \frac{1}{2} s^2 \rho(v_2, v_2, w) \\ &\quad - t \Gamma(v_1, w) - ts v_2^i \partial_i \Gamma(v_1, w) + ts \Gamma(\Gamma(v_2, v_1), w) + ts \Gamma(v_1, \Gamma(v_2, w)) \\ &\quad + \frac{1}{2} t^2 \Gamma(\Gamma(v_1, v_1), w) - \frac{1}{2} t^2 \rho(v_1, v_1, w) + \Delta \end{aligned}$$

Z PORÓWNIANIA OTRZYMUJEMY:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(s; \tilde{w}(t; w)) - \tilde{w}(t; \tilde{w}(s; w)) &= -st \left(\partial_i \Gamma_{jk} - \partial_j \Gamma_{ik} + \Gamma_{il} \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{jl} \Gamma_{ik}^l \right) v_1^i v_2^j w^k \\ &\quad + st \Gamma(\Gamma(v_1, v_2) - \Gamma(v_2, v_1), w) + \Delta \\ &\equiv -st R(v_1, v_2, w) + st \Gamma(\Gamma(v_1, v_2), w) + \Delta \end{aligned}$$

STwierdzamy: (*) PIERWOTNY EFEKT II RZĘDU: (9)

NIEDOMYKANIE SIĘ
POZIOMEJ PODNIESIENIA
"PĘTLI" W BAZIE DO STYCZNEJ,
PROPORTYONALNY DO PŁA POWIERZCHNI
"PĘTLI" BAZOWEJ,
którego źródłem jest KRZYWIŻNA.

(**) WTÓRNY EFEKT II RZĘDU:

NIEDOMKNIĘCIE TORZYŃNE